УДК 539.3 : 517.958

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СВЯЗИ ДВУХ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Рассматривается функциональная зависимость двух симметричных тензоров второго ранга. Дана новая трактовка компонент тензоров как проекций на ортогональный тензорный базис. Показана возможность записи определяющих соотношений в виде шести функций, каждая из которых зависит от одной переменной.

Ключевые слова: симметричные тензоры, тензорный базис, ортогональные матрицы, определяющие соотношения.

Проблема функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга, важная для построения определяющих соотношений в механике сплошных сред, рассматривалась во многих работах (см., например, [1–7]). Известно, что в пространстве симметричных тензоров второго ранга существует ортонормированный базис из шести тензоров [3, 8–10]

$$t_{ijpq} = t_{jipq}, \qquad t_{ijpq} = t_{ijqp}, \qquad t_{ijpq}t_{ijrs} = \delta_{pqrs} = (\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr})/2,$$

где $\delta_{pr} = 1$ при $p = r$, $\delta_{pr} = 0$ при $p \neq r$. В работе используется прямоугольная декартова система координат x_1, x_2, x_3; по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование. Первые два индекса обозначают компоненты тензора, а два последних — номер тензора, причем тензоры с номерами pq и qp отождествляются. С учетом сокращенных обозначений для индексов симметричных тензоров $h_{ij} = h_{ji}$:

$$\begin{gathered} h_1 = h_{11}, \qquad h_2 = h_{22}, \qquad h_3 = h_{33}, \\ h_4 = \sqrt{2}\, h_{23}, \qquad h_5 = \sqrt{2}\, h_{13}, \qquad h_6 = \sqrt{2}\, h_{12} \end{gathered} \tag{1}$$

тензорам t_{ijpq} соответствует произвольная ортогональная матрица шестого порядка: t_{ip}, $i, p = \overline{1, 6}$, $t_{ip}t_{iq} = \delta_{pq}$. Ортогональная матрица t_{ip} зависит от 15 свободных параметров c_{ip}, $i > p$ и получается ортонормированием произвольной треугольной матрицы [9]

$$[c_{ip}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 1 & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} раскладываются по ортогональному базису t_{ip} [8–10]:

$$\sigma_i = t_{ip}\tilde\sigma_p, \qquad \tilde\sigma_p = \sigma_i t_{ip}, \qquad \varepsilon_i = t_{iq}\tilde\varepsilon_q, \qquad \tilde\varepsilon_q = \varepsilon_i t_{iq}. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00728).

Здесь и далее используются сокращенные обозначения (1). Согласно (2) величины $\tilde{\sigma}_p$, $\tilde{\varepsilon}_q$ являются проекциями тензоров σ_i, ε_i на тензоры ортогонального базиса t_{ip}, $p = \overline{1,6}$, т. е. свертками двух симметричных тензоров второго ранга. Отсюда следует, что величины $\tilde{\sigma}_p$, $\tilde{\varepsilon}_q$ остаются инвариантными при ортогональном преобразовании системы координат x_i.

В [1, 2] рассматриваются вращения и отражения вида

$$\tilde{\varepsilon}_p = \alpha_{pq}\tilde{\varepsilon}^*_q, \qquad \tilde{\varepsilon}^*_q = \tilde{\varepsilon}_p\alpha_{pq}, \qquad p,q = \overline{1,6}, \tag{3}$$

где α_{pq} — произвольная ортогональная матрица шестого порядка ($\alpha_{pq}\alpha_{pr} = \delta_{qr}$). Матрица α_{pq} также определяется 15 независимыми параметрами [9]. Так как

$$\tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_i t_{ip}, \qquad \tilde{\varepsilon}^*_q = \varepsilon_i t^*_{iq}, \tag{4}$$

где t^*_{iq} — ортогональный базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга, отличный от базиса t_{ip}, то из (3), (4) получаем

$$\varepsilon_i t_{ip} = \alpha_{pq}\varepsilon_i t^*_{iq}, \qquad \varepsilon_i(t_{ip} - \alpha_{pq}t^*_{iq}) = 0;$$
$$t_{ip} = t^*_{iq}\alpha_{pq}, \qquad t^*_{iq} = t_{ip}\alpha_{pq}. \tag{5}$$

Таким образом, преобразованию (3) соответствует ортогональное преобразование базиса (5).

Так как выбор базиса t_{ip} или t^*_{iq} произволен, то функциональная связь $\tilde{\sigma}_p$ и $\tilde{\varepsilon}_q$ не должна зависеть от преобразований вида (3) (ср. с [1, 2]):

$$\tilde{\sigma}_p = f_p(\tilde{\varepsilon}_q), \qquad \tilde{\sigma}^*_p = f^*_p(\tilde{\varepsilon}^*_q), \qquad p,q = \overline{1,6}. \tag{6}$$

Отметим, что различие между σ_i и $\tilde{\sigma}_p$ (или ε_i и $\tilde{\varepsilon}_p$), по сути, отсутствует. Действительно, t_{ip}, $p = \overline{1,6}$ — это шесть тензоров второго ранга, которые образуют ортогональный базис в пространстве симметричных тензоров. Матрица t_{ip} может быть произвольной ортогональной матрицей, в частности единичной ($t_{ip} = \delta_{ip}$), тогда

$$\tilde{\sigma}_p = \sigma_i t_{ip} = \sigma_i\delta_{ip} = \sigma_p, \qquad \sigma_i = \delta_{ip}\tilde{\sigma}_p = \tilde{\sigma}_i. \tag{7}$$

Таким образом, из (7) следует, что величины σ_i и $\tilde{\sigma}_p$ различаются только обозначением. Однако представление $\tilde{\sigma}_p = \sigma_i\delta_{ip}$ показывает, что $\tilde{\sigma}_p = \sigma_p$ являются инвариантами и проекциями на базис $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i6}$. Этот базис можно записать следующим образом:

$$\delta_{ij11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_{ij22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_{ij33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sqrt{2}\,\delta_{ij23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sqrt{2}\,\delta_{ij13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sqrt{2}\,\delta_{ij12} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая трактовка тензоров, отличная от традиционной, впервые была предложена в работах [11, 12]. Отсюда следует, что в общем случае определяющие соотношения имеют вид (6):

$$\tilde{\sigma}_p = f_p(\tilde{\varepsilon}_q), \qquad p,q = \overline{1,6}, \tag{8}$$

т. е. функционально связывают инварианты $\tilde{\sigma}_p$ и $\tilde{\varepsilon}_q$.

Базис t_{ip}, так же как и система координат x_i, выбираются из соображений простоты и удобства уравнений. Для упругих анизотропных материалов t_{ip} — собственные состояния. В этом случае закон Гука [8–10] записывается в виде

$$\tilde\sigma_p = \lambda_{pq}\tilde\varepsilon_q, \qquad p = q. \tag{9}$$

Базис t_{ip} следует выбирать таким образом, чтобы определяющие соотношения (8) имели наиболее простой вид (например, представлялись в виде (9)):

$$\tilde\sigma_1 = f_1(\tilde\varepsilon_1), \qquad \tilde\sigma_2 = f_2(\tilde\varepsilon_2), \qquad \ldots, \qquad \tilde\sigma_6 = f_6(\tilde\varepsilon_6), \tag{10}$$

т. е. чтобы каждая функция зависела от одной переменной.

Соотношение (8) запишем в виде $\sigma_i t_{ip} = f_p(\varepsilon_i t_{iq})$. Пусть $t_{ip} = t^*_{iq}\alpha_{pq}$, тогда

$$\sigma_i t^*_{ip}\alpha_{pq} = f_p(\varepsilon_i t^*_{ir}\alpha_{sr}), \qquad \tilde\sigma^*_q\alpha_{pq} = f_p(\tilde\varepsilon^*_r\alpha_{sr});$$
$$\tilde\sigma^*_q = f_p(\tilde\varepsilon^*_r\alpha_{sr})\alpha_{pq} = f^*_q(\tilde\varepsilon^*_r) \tag{11}$$

или с учетом (3)

$$\tilde\sigma_p = f_p(\tilde\varepsilon_s), \qquad \alpha_{pq}\tilde\sigma^*_q = f_p(\alpha_{sr}\tilde\varepsilon^*_r);$$
$$\tilde\sigma^*_q = \alpha_{pq} f_p(\alpha_{sr}\tilde\varepsilon^*_r) = f^*_q(\tilde\varepsilon^*_r), \tag{12}$$

т. е. (12) совпадает с (11).

Таким образом, определяющие соотношения (8) при замене базиса (5) преобразуются по формулам (11), (12).

Из (10) и (3) имеем

$$\alpha_{1q}\tilde\sigma^*_q = f_1(\alpha_{1r}\tilde\varepsilon^*_r), \qquad \alpha_{2q}\tilde\sigma^*_q = f_2(\alpha_{2r}\tilde\varepsilon^*_r), \qquad \alpha_{3q}\tilde\sigma^*_q = f_3(\alpha_{3r}\tilde\varepsilon^*_r),$$
$$\alpha_{4q}\tilde\sigma^*_q = f_4(\alpha_{4r}\tilde\varepsilon^*_r), \qquad \alpha_{5q}\tilde\sigma^*_q = f_5(\alpha_{5r}\tilde\varepsilon^*_r), \qquad \alpha_{6q}\tilde\sigma^*_q = f_6(\alpha_{6r}\tilde\varepsilon^*_r),$$

откуда получаем

$$\tilde\sigma^*_q = \alpha_{1q} f_1(\alpha_{1r}\tilde\varepsilon^*_r) + \alpha_{2q} f_2(\alpha_{2r}\tilde\varepsilon^*_r) + \alpha_{3q} f_3(\alpha_{3r}\tilde\varepsilon^*_r) +$$
$$+ \alpha_{4q} f_4(\alpha_{4r}\tilde\varepsilon^*_r) + \alpha_{5q} f_5(\alpha_{5r}\tilde\varepsilon^*_r) + \alpha_{6q} f_6(\alpha_{6r}\tilde\varepsilon^*_r), \tag{13}$$

т. е. от записи (10) заменой базиса t_{ip} на $t^*_{ip} = t_{ip}\alpha_{pq}$ можно перейти к записи (13), и наоборот.

Таким образом, если определяющие соотношения представлены в виде (13), то их можно привести к виду (10), когда каждая функция зависит от одной переменной. Произвольный базис можно получить из какого-либо конкретного по формулам (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А.** О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 6. С. 641–666.
2. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
3. **Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 5. С. 794–812.
4. **Черных К. Ф.** О формах связи между симметричными тензорами в механике сплошных сред // Инж. журн. Механика твердого тела. 1967. № 3. С. 42–51.

5. **Черных К. Ф.** О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга // Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 481–486.
6. **Аннин Б. Д.** Анизотропные тензорные функции // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 11. С. 94–97.
7. **Георгиевский Д. В.** Тензорно-нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 2. С. 150–176.
8. **Рыхлевский Я.** О законе Гука // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420–435.
9. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 66. С. 113–125.
10. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.
11. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
12. **Остросаблин Н. И.** О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: Тез. докл. Всерос. конф. Новосибирск, 9–13 окт. 2006 г. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. С. 96.

Поступила в редакцию 26/X 2006 г.