

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ОБЪЕМНУЮ СЖИМАЕМОСТЬ

Л. А. Сараяв
(Куйбышев)

Важное практическое значение и актуальность исследования механического макроскопического поведения сложных микронеоднородных сред определяется его способностью давать критерии оценки предельной нагрузки различных элементов конструкций, течения многофазных дисперсных систем, деформирования материалов, изготовленных методами порошковой металлургии и т. д. Теоретическое прогнозирование свойств композитов наиболее эффективно реализуется, как правило, в тех случаях, когда их структурные представления опираются на теорию случайных полей. Применение гипотезы «сильной изотропии» [1] при статистическом осреднении определяющих соотношений идеально пластического тела с микроструктурой позволяет определить его макроскопическую поверхность текучести.

Пусть механические свойства компонент двухфазного изотропного жестко-пластического тела описываются поверхностью текучести, учитывающей гидростатическое давление

$$s_{ij}s_{ij} + a_\alpha \sigma_{11} = k_\alpha^2, \quad \alpha = 1; 2,$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{11}$; σ_{ij} — тензор напряжений; k_α — пределы пластичности фаз; a_α — параметры, характеризующие объемную сжимаемость компонент; σ_{11} — первый инвариант тензора напряжений.

Взаимное расположение составляющих в пространстве, соединенных между собой с идеальной адгезией так, что поле скоростей перемещений $v_i(\mathbf{x})$ непрерывно, характеризуется случайной изотропной индикаторной функцией $\kappa(\mathbf{x})$, равной единице в точках первой фазы и нулю во второй. С ее помощью локальный ассоциированный закон течения среды можно записать в виде

$$(1) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) \frac{\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) - \delta_{ij}b(\mathbf{x})\varepsilon_{11}(\mathbf{x})}{\sqrt{\varepsilon_{mn}(\mathbf{x})\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})\varepsilon_{11}^2(\mathbf{x})}}.$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ — тензор скоростей деформаций; $k(\mathbf{x}) = k_1 + [k]\kappa(\mathbf{x})$; $b(\mathbf{x}) = b_1 + [b]\kappa(\mathbf{x})$; $b_\alpha = (3a_\alpha + 1)/9$, квадратными скобками обозначены величины разрывов параметров при переходе через фазовую границу — $[f] = f_2 - f_1$. Функция $\kappa(\mathbf{x})$, напряжения и скорости деформаций предполагаются случайными однородными и эргодическими полями, и их математические ожидания совпадают с осреднениями по объемам компонент V_α и по полному объему $V = V_1 + V_2$ [2]

$$\langle (\dots) \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\dots) dV, \quad \langle (\dots) \rangle_\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} (\dots) dV.$$

Будем пренебрегать в объеме V флуктуациями диссипативной функции и представим (1) в виде

$$(2) \quad \Lambda \sigma_{ij} = k^2(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) - k^2(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) \delta_{ij} \varepsilon_{11},$$

где $\Lambda = \langle c_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle$. Подставляя (2) в уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0,$$

находим

$$k_1^2 \varepsilon'_{ij,j} - k_1^2 b_1 \varepsilon'_{11,i} + F'_i = 0,$$

где $F_i = [k^2](\kappa \varepsilon_{ij})_{,j} - [k^2 b](\kappa \varepsilon_{il})_{,i}$, штрихами обозначены флуктуации величин. Присоединяя сюда соотношения Коши

$$2\varepsilon'_{ij} = v'_{i,j} + v'_{j,i},$$

получаем относительно $v'_i(\mathbf{x})$ замкнутую систему уравнений, которая при помощи тензора Грина преобразуется в систему интегральных уравнений относительно компонент тензора $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{x})$ [3, 4]:

$$(3) \quad \varepsilon'_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V G_{i(k,l)j}(\mathbf{x} - \xi) \cdot ([k^2] \kappa(\xi) \varepsilon_{kl}(\xi) - \delta_{kl} [k^2 b] \kappa(\xi) \varepsilon_{mm}(\xi) - [k^2] \langle \kappa \varepsilon_{kl} \rangle + [k^2 b] \delta_{kl} \langle \kappa \varepsilon_{mm} \rangle) dV.$$

Для определения реологической зависимости между средними по V напряжениями и скоростями деформаций необходимо вычислить тензор $\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle$. Поскольку рассматриваемый композит изотропен, оправданным является применение гипотезы «сильной изотропии». Корреляционные функции

$$\langle \kappa'(\mathbf{x}) \kappa'(\xi) \varepsilon'_{kl}(\xi) \rangle,$$

возникающие под знаком интеграла при умножении (3) на $\kappa'(\mathbf{x})$ и последующем осреднении по V , считаются зависящими только от расстояния $|\mathbf{x} - \xi|$. Тогда [4]

$$\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle = \frac{c(1-c)}{15k_1^2(1+6a_1)} ((6+54a_1)d_{ij} - \delta_{ij}(2+3a_1)d_{kk}).$$

Здесь $d_{ij} = -[k^2] \langle \varepsilon_{ij} \rangle_2 + \delta_{ij} [k^2 b] \langle \varepsilon_{ll} \rangle_2$; $c = V_2 V^{-1}$ — объемное содержание второй фазы. Присоединяя сюда очевидные соотношения

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_2 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c^{-1} \langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle,$$

получаем систему уравнений для определения $\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle$. Подстановка решения этой системы в осредненное по V выражение (2) дает

$$(4) \quad \Lambda \langle \sigma_{ij} \rangle = A \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \delta_{ij} \left(B - \frac{1}{3} A \right) \langle \varepsilon_{ll} \rangle,$$

где

$$A = k_1^2 \left(1 + \frac{15c [k^2] (1+6a_1)}{15k_1^2 (1+6a_1) + 2(1-c) [k^2] (3+27a_1)} \right);$$

$$B = \frac{k_1^2}{9} \frac{k_2^2 + 6k_1^2 a_2 + 6c(k_2^2 a_1 - k_1^2 a_2)}{a_1(k_2^2 + 6k_1^2 a_2) + c(k_1^2 a_2 - k_2^2 a_1)}.$$

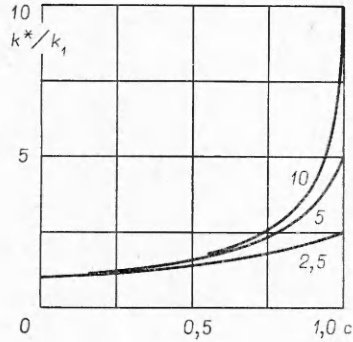
Для определения Λ воспользуемся соотношением

$$\int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV = 0,$$

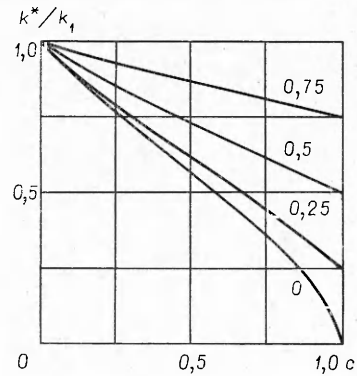
полученным путем умножения уравнений равновесия на v'_i и интегрирования по полному объему композита. Теперь $\Lambda = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Исключая отсюда и из соотношения (4) тензор $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, находим макроскопическую поверхность текучести рассматриваемой микронеоднородной среды

$$(5) \quad \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle + a^* \langle \sigma_{ll} \rangle^2 = k^{*2},$$

где $k^* = A^{1/2}$ — эффективный предел пластичности композита; $a^* = A/9B$ — его макроскопический параметр, учитывающий объемную сжимаемость.



Фиг. 1



Фиг. 2

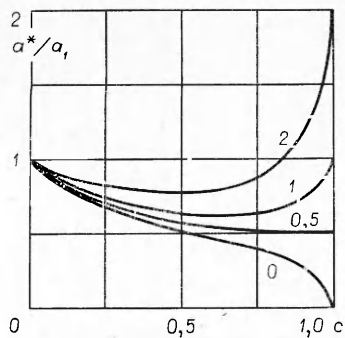
На фиг. 1, 2 показана зависимость эффективного предела пластичности от объемного содержания второй фазы. Цифры у кривых — значения отношения k_2/k_1 , $a_1 = 0,25$. Формула для k^* показывает, что компоненты композита участвуют в деформировании по-разному: если место второй фазы занимают пустоты и полости ($k_2 = 0$), то $k^* \neq 0$, если же такими пустотами является первая фаза ($k_1 = 0$), то $k^* \equiv 0$. Это означает, что построенная модель описывает свойства неоднородного тела, в котором первая составляющая является матрицей, а вторая — включениями.

Фиг. 3 демонстрирует зависимость a^* от объемного содержания включений. Цифры у кривых — значения отношения a_2/a_1 , $a_1 = 0,5$, $k_2/k_1 = 5$. Интересно отметить, что при $a_1 = a_2$ величина $a^* \neq 1$ и зависит от отношения пределов пластичности. Из выражения для величины a^* видно, что композиционный материал, соответствующий построенной модели, является макроскопически несжимаемым тогда и только тогда, когда оба параметра $a_1 = a_2 = 0$.

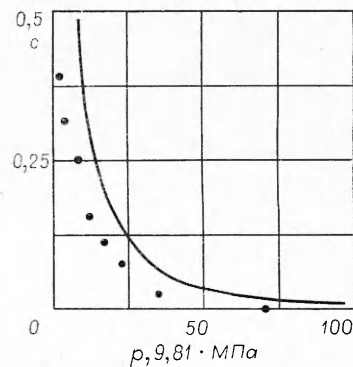
Наглядной иллюстрацией предложенной модели микронеднородной жестко-пластической среды может служить случай, когда включения представляют собой поры ($k_2 = 0$), а материал матрицы пластически несжимаем ($a_1 = 0$). Тогда формула (5) принимает вид

$$(6) \quad \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle + \frac{c}{2(3+2c)} \langle \sigma_{ii} \rangle^2 = k_1^2 \frac{3(1-c)}{3+2c}.$$

Выражение (6) представляет собой макроскопическую поверхность текучести изотропного пористого материала, матрица которого удовлетворяет условию текучести Мизеса. Авторами работы [5] исследованы механические свойства пористого электролитического никеля, подвергнувшегося одноосному сжатию в пресс-форме. Из ассоциированного закона тече-



Фиг. 3



Фиг. 4

ния, соответствующего (6), следует, что давление p внутри такой пресс-формы определяется выражением

$$3p = \langle \sigma_{ii} \rangle = k_1 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{3 - c - 2c^2}{3c + 5c^2}}.$$

Зависимость пористости от давления задается формулой

$$c = (\sqrt{(3m - 1)^2 + 12(5m + 2)} - 3m - 1)/(10m + 4), \quad m = \frac{3p^2}{2k_1^2}.$$

На фиг. 4 приводится сравнение теоретической кривой уплотнения (сплошная линия) с экспериментальными наблюдениями работы [5] (точки).

Поступила 14 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., Наука, 1970.
2. Шермергор Т. Д. Теория упругости микroneоднородных сред. М., Наука, 1977.
3. Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975.
4. Дудукаленко В. В., Мешков С. И., Сараев Л. А. К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред.— ПМТФ, 1979, № 5.
5. Мартынова И. Ф., Скороход В. В. Уплотнение пористых металлов при объемном пластическом деформировании в отсутствие деформационного упрочнения.— Порошковая металлургия, 1976, № 5.