

Зная величину скорости звука, можно оценить наклон $dP/du = \pm \rho_0 a$ траекторий изменения состояния резины вдоль характеристик для области $P < 0$ и тем самым оценить максимальные значения растягивающих напряжений, имевших место в экспериментах по разгрузке резины в воздух. Соответствующие построения приведены на рис. 4. Из них следует, что наблюдаемое уменьшение скорости на рис. 3 (кривая 3) отвечает достижению растягивающего напряжения не более 20 МПа. Максимальный уровень отрицательных напряжений σ_m , который может быть достигнут в резине в данных условиях нагружения, оценивается в 100 МПа.

Таким образом, результаты проведенных экспериментов указывают на специфичность поведения резины при ударно-волновом нагружении. Отличия в динамических свойствах резины связаны с ее затвердением под действием давления ударного сжатия и возможностью обратимого роста несплошностей при динамическом растяжении.

Авторы благодарят В. Э. Згаевского и В. К. Голубева за дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухина М. Ф. Техническая физика эластомеров.— М.: Химия, 1984.
2. Аскадский А. А. Деформация полимеров.— М.: Химия, 1973.
3. Канель Г. И., Молодец А. М., Воробьев А. А. О метании пластин взрывом // ФГВ.— 1974.— № 6.
4. Канель Г. И. Сопротивление металлов откольному разрушению // ФГВ.— 1982.— № 3.
5. Asay J. R., Barker L. M. Interferometric measurement of shock-induced internal particle velocity and spatial variations of particle velocity // J. Appl. Phys.— 1974.— V. 45, N 6.
6. Белолов М. И., Вовченко В. И. и др. Применение лазерных интерферометрических измерителей скорости во взрывных экспериментах // ЖТФ.— 1987.— Т. 57, № 5.
7. Дремин А. Н., Канель Г. И. Преломление фронта косо́й ударной волны на границе с менее жесткой средой // ПМТФ.— 1970.— № 3.
8. Weaver C. W., Paterson M. S. Stress-strain properties of rubber at pressures above the glass transition pressure // J. Polym. Sci.— 1969.— V. 7, pt A—2, N 3.
9. Erlich D. C., Wooten D. C., Crewdson R. C. Dynamic tensile failure of glycerol // J. Appl. Phys.— 1971.— V. 42, N 13.
10. Степанов Г. В. Поведение конструкционных материалов в упругопластических волнах нагрузки.— Киев: Наук. думка, 1978.
11. Walsh J. M., Rice M. H. Dynamic of liquids from measurements on strong shock waves // J. Chem. Phys.— 1957.— V. 26, N 4.
12. Ahrens I. J., Ruderman M. H. Immersed-foil method for measuring shock wave profiles in solids // J. Appl. Phys.— 1966.— V. 37, N 13.
13. Эйрих Ф. Р., Смит Т. Л. Молекулярно-механические аспекты изотермического разрушения эластомеров // Разрушение/Под ред. Г. Либовица.— М.: Мир, 1976.— Т. 7, ч. 2.
14. Gent A. N., Lindley P. B. Internal rupture of bouded rubber cylinders in tension // Proc. Roy. Soc. (London).— 1959.— Ser. A, V. 249, N 1.

г. Черноголовка

Поступила 1/III 1988 г.,
в окончательном варианте — 19/VIII 1988 г.

УДК 539.375

В. А. Сарайкин

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ НАКЛОННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ

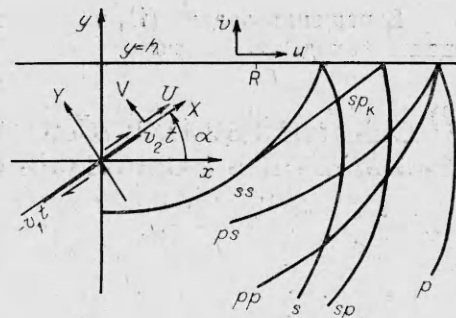
Внутренние дефекты, динамически развивающиеся в материале, излучают возмущения. В геофизике с целью опознания типа, ориентации и протяженности крупномасштабных дефектов — очагов землетрясений — широко применяется упругая модель распространяющегося дислокационного разрыва [1—4]. Согласно ей, на месте разрыва задается скачок вектора перемещений, описывающий подвижку берегов разрыва, безотносительно к деталям распределения исходного поля внутренних на-

© 1990 Сарайкин В. А.

пряжений. При таком подходе получается неплохое качественное соответствие ориентации нодальных плоскостей с наблюдаемой экспериментально при условии, что разрыв относится к сдвиговому типу. При соответствующем подборе скачков перемещений асимптотика решения в дальнем поле для дислокационного разрыва мало отличается от решения задачи о точечном источнике, заданном двумя парами сил без момента.

Точный, в рамках линейной механики разрушения, способ описания разрыва (трещины) заключается в задании на нем сброса напряжений [2]. В этой модели поле перемещений, а также ориентация и размеры трещины согласованы с полем напряжений, подчиненным условию динамической неустойчивости в вершине.

В данной работе рассмотрена плоская задача, в постановке которой отчасти учтены достоинства модели трещины.



Р и с. 1

Рассмотрим полупространство $y < h$ (рис. 1) с границей, свободной от нагрузок. Будем считать, что в точке на расстоянии h от границы в момент времени $t = 0$ зародилась трещина, которая затем распространяется прямолинейно под углом α к границе: $-v_1 t < X < v_2 t$, $Y = 0$ (X , Y — прямоугольные координаты, связанные с трещиной). Предполагается, что скорости вершин трещины различны, но постоянны и меньше скорости волны Рэлея ($v_i < c_R$).

Появление трещины внутри полупространства связано с существующими в нем напряжениями. Природа напряжений может быть различна — это не только действие веса, но и, возможно, дополнительные напряжения, возникающие из-за каких-либо внутренних нарушений или сжатия на бесконечности параллельно границе полупространства. Полагаем, что на месте линии роста трещины имеются начальные касательные напряжения, которые можно аппроксимировать зависимостью

$$\sigma_{xy}(X, 0) = \tau_n^0 X^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \tau_n^0 = \text{const})$$

или линейной комбинацией слагаемых такого вида.

Образование трещины приводит к полному или частичному динамическому сбросу касательных напряжений на берегах. Найдем вначале перемещения в волне, излученной трещиной. До прихода волн к границе полупространства можно считать среду безграничной. Из-за симметрии снимаемых трещиной касательных напряжений задача сводится к дополнительной задаче о полупространстве со следующими условиями, которые обеспечивают автомодельность искомого решения:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sigma_{xy}(t, X, 0) &= -\tau_n X^n \quad (-v_1 t < X < v_2 t), \\ U(t, X, 0) &= 0 \quad (X \leq -v_1 t, X \geq v_2 t), \\ \sigma_{yy}(t, X, 0) &= 0 \quad (-\infty < X < \infty). \end{aligned}$$

Здесь U — составляющая вектора перемещений $\mathbf{U} = (U, V)$ в системе координат X, Y . Равенство нулю нормального напряжения σ_{yy} означает, что начальное сжатие в весомом полупространстве, перпендикулярное линии роста трещины, предполагается неизменным. Начальные условия нулевые.

Данная постановка имеет, конечно, недостатки: 1) движение вершин трещины не определяется из критерия разрушения, а задается принудительно, 2) автомодельная постановка ограничивает возможные варианты задания сброса напряжений, не позволяет учесть вклад в решение обменных волн, который существен, если рассматривается развитие начального дефекта конечной длины. Эти ограничения оправдывает отчасти то, что решение можно подвергнуть достаточно полному исследованию.

В решении задачи (1), полученном в [5, 6], перемещение берегов трещины находится по формулам

$$(2) \quad U(t, X, 0) = U_0(t, X) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \left[W\left(\frac{\tau}{z}\right) - W\left(\frac{\tau}{z}\right) \right] \frac{d\tau}{\tau},$$

$$W\left(\frac{t}{z}\right) = \frac{[(1+v_1 t/z)(1-v_2 t/z)]^{-1/2}}{2\pi i} \left\{ z \int_{-v_1}^{v_2} \frac{S(\xi) \sqrt{v_1 + \xi} \sqrt{v_2 - \xi}}{\xi - z/t} f(\xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + i \sum_{j=0}^n (-t/z)^j \left[\frac{A_j}{(1+v_1 t/z)^{j+1}} + \frac{B_j}{(1-v_2 t/z)^{j+1}} \right] \right\}, \quad z = X + i\eta,$$

$$f(\xi) = -\tau_n t X^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} [H(v_1 t + X) H(v_2 t - X)]|_{X=\xi t},$$

$$S(\xi) = -\frac{ia_2^2 \xi^2 \sqrt{1-a_2^2 \xi^2}}{\mu \left[(2-a_2^2 \xi^2)^2 - 4 \sqrt{1-a_1^2 \xi^2} \sqrt{1-a_2^2 \xi^2} \right]},$$

где a_1, a_2 — величины, обратные к скоростям волн расширения и сдвига; $H(\dots)$ — функция Хевисайда.

Соотношения (1) позволяют свести задачу об определении излученных трещиной волн к решению несмешанной задачи. Действительно, на линии трещины ($Y=0$) скачки перемещений и напряжений равны $[U] = 2U_0(t, X)$, $[V] = [\sigma_{yy}] = [\sigma_{xy}] = 0$. Отсюда следует, что перемещение U антисимметрично, а V симметрично относительно линии трещины. Перемещения вне трещины поэтому можно найти, склеив решения двух задач для верхнего ($Y > 0$) и нижнего полупространств с граничными условиями

$$U(t, X, \pm 0) = \pm U_0(t, X), \quad \sigma_{yy}(t, X, 0) = 0.$$

Применяя интегральные преобразования Лапласа по t и Фурье вдоль X , наодем LF -изображения перемещений в волне, идущей от трещины:

$$(3) \quad U^{LF}(s, sp, Y) = -\frac{w(p)}{i_2^2 s^{n+3}} \left[2p^2 e^{-sn_1 |Y|} - (n_2^2 + p^2) e^{-sn_2 |Y|} \right] \operatorname{sgn}(Y),$$

$$V^{LF}(s, sp, Y) = \frac{ipw(p)}{a_2^2 s^{n+3}} \left[2n_1 n_2 e^{-sn_1 |Y|} - (n_2^2 + p^2) e^{-sn_2 |Y|} \right],$$

$$n_i^2(p) = a_i^2 + p^2.$$

Здесь s, sp — параметры преобразований Лапласа и Фурье соответственно; $s^{-n-3}w(p)$ — изображение перемещения берега трещины $U_0(t, X)$.

Следующий шаг — учет взаимодействия волны (3) с границей полупространства. Проще это осуществить, если сделать замену координат $x + iy = (X + iY)e^{i\alpha}$ (см. рис. 1) и перейти в (3) от преобразования Фурье F по переменной X к преобразованию \mathcal{F} того же самого решения по переменной x .

Обозначив через sq параметр преобразования Фурье по x , после пересчета получим, что выражения (3) примут вид

$$U^{L\mathcal{F}}(s, sq, y) = \frac{1}{\pi i a_2^2 s^{n+3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z p^2}{N_1} - \frac{a_2^2 + 2p^2}{N_2} \right) (p \cos \alpha - q) w(p) e^{-isMy} dp,$$

$$V^{L\mathcal{F}}(s, sq, y) = -\frac{\sin \alpha}{\pi i a_2^2 s^{n+3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{a_1^2 + p^2}{N_1} - \frac{a_2^2 + 2p^2}{N_2} \right) pw(p) e^{-isMy} dp,$$

$$M = (p - q \cos \alpha) / \sin \alpha, \quad N_i = n_i^2(q) \sin^2 \alpha + (p - q \cos \alpha)^2,$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}(t, x, y) \equiv \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}(t, \operatorname{Re}(x + iy) e^{-i\alpha}, \operatorname{Im}(x + iy) e^{-i\alpha}),$$

$$u + iv = (U + iV) e^{i\alpha}.$$

В последней строке приведена формула перехода от перемещений U, V в системе координат X, Y к перемещениям u, v вдоль осей x, y .

Зная теперь $L\mathcal{F}$ — изображения перемещений в волне, падающей на свободную границу полупространства, — находим, решив динамическую задачу для полупространства $y < h$, изображения перемещений в отраженной волне. Решение представляется в виде интегралов, которые вычисляются по вычетам. Интегралы по разрезам, получаемые при вычислениях, можно опустить, так как они равны нулю для моментов времени, предшествующих выходу вершины трещины на границу полупространства. Опуская эти громоздкие выкладки, приведем окончательный результат для перемещений на границе полупространства [7, 8]:

$$(4) \quad \begin{aligned} a_2^2 s^{n+3} u^{L\mathcal{F}}(s, sq, h) &= \frac{iQ_1}{n_1} \left(1 - 1 + \frac{4a_2^2 n_1 n_2}{R} \right) e^{-sn_1 h} + \\ &+ Q_2 \left(1 - 1 + \frac{2a_2^2 (a_2^2 + 2q^2)}{R} \right) e^{-sn_2 h}, \\ a_2^2 s^{n+3} v^{L\mathcal{F}}(s, sq, h) &= Q_1 \left(1 - 1 + \frac{2a_2^2 (a_2^2 + 2q^2)}{R} \right) e^{-sn_1 h} - \\ &- \frac{iq}{n_2} Q_2 \left(1 - 1 + \frac{4a_2^2 n_1 n_2}{R} \right) e^{-sn_2 h}, \\ Q_1(q) &= [(n_1^2 + q^2) \sin 2\alpha + 2iqn_1 \cos 2\alpha] w(q \cos \alpha - in_1 \sin \alpha), \\ Q_2(q) &= [(n_2^2 + q^2) \cos 2\alpha - 2iqn_2 \sin 2\alpha] w(q \cos \alpha - in_2 \sin \alpha), \\ R &= (n_2^2 + q^2)^2 - 4q^2 n_1 n_2, \quad n_i^2 = a_i^2 + q^2. \end{aligned}$$

Подчеркнутым слагаемым соответствуют изображения перемещений в волне, идущей к границе.

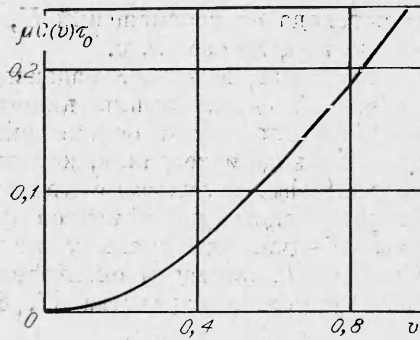
В точках границы решение (4) справедливо вплоть до прихода вторичных волн — волн, излученных трещиной, отразившихся от границы полупространства, а затем от трещины и вновь пришедших к границе полупространства. Чтобы учесть вклад в решение вторичных волн, надо решить неавтономную задачу дифракции волн на трещине. Отметим, что из-за убывания амплитуды волны с пройденным ею расстоянием вклад вторичных волн в решение на границе будет, по-видимому, менее существен, чем вклад прямых волн.

В зависимостях (4) учтена их однородность относительно параметров преобразований Лапласа и Фурье. Оригиналы для изображений такого рода можно получить в явном виде [6, 9]

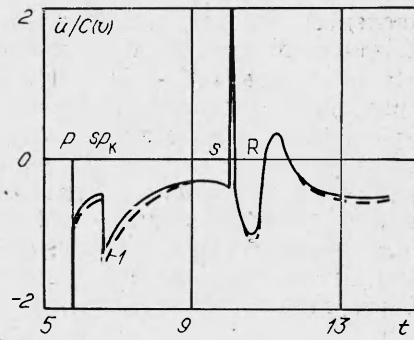
$$(5) \quad \begin{aligned} u(t, x, h) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^t \left\{ \frac{4i\xi_1 n_2(\xi_1) Q_1(\xi_1)}{R(\xi_1)} \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} + \frac{2(a_2^2 + 2\xi_2^2) Q_2(\xi_2)}{R(\xi_2)} \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} \right\} \times \\ &\times \frac{(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} d\tau, \\ \xi_i &= (x^2 + h^2)^{-1} \begin{cases} -i\tau x + h\sqrt{r_i} & (r_i \geq 0), \\ -i\tau x + ih\sqrt{-r_i} \operatorname{sgn}(x) & (r_i < 0), \end{cases} \\ n_i(\xi_i) &= (x^2 + h^2)^{-1} \begin{cases} \tau h - ix\sqrt{r_i} & (r_i \geq 0), \\ \tau h + |x|\sqrt{-r_i} & (r_i < 0), \end{cases} \\ r_i &= \tau^2 - a_i^2(x^2 + h^2). \end{aligned}$$

Значения вещественной и мнимой частей остальных радикалов удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} n_2(\xi_1) \geq 0$, $x \operatorname{Im} n_2(\xi_1) \leq 0$, $\operatorname{Re} n_1(\xi_2) \geq 0$, $x \operatorname{Im} n_1(\xi_2) \leq 0$. Перемещение v вычисляется по аналогичной формуле.

Приведем некоторые результаты расчетов решения (5) для случая, когда касательные напряжения, снимаемые при распространении трещи-



Р и с. 2



Р и с. 3

ны, постоянны ($\tau_0 = \tau_0^0 = \text{const}$, $n = 0$), а вершины трещины движутся в разные стороны с одинаковой скоростью ($v_1 = v_2 = v$). При этом в формуле (4) следует положить

$$(6) \quad w(p) = \frac{2\lambda a_2^2 C(v)}{(1 + v^2 p^2)^{3/2}}, \quad C(v) = \frac{\tau_0 v^4 q_2^2}{D(v)},$$

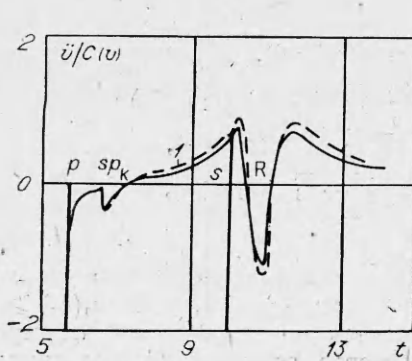
$$D(v) = (4a_2^2 v^2 q_2^2 + a_2^4 v^4)K(q_2) - 4a_1^2 v^2 q_2^2 K(q_1) + 8q_2^2 E(q_1) - (8q_2^2 + a_2^4 v^4)E(q_2), \quad q_i^2 = 1 - a_i^2 v^2.$$

График функции $C(v)$ показан на рис. 2. Здесь и далее при расчетах за единицы измерения были приняты: расстояние h от центра трещины до границы, скорость волны сдвига $c_2 = a_2^{-1} = 1$. Коэффициент Пуассона равен 0,25, таким образом, $c_1 = a_1^{-1} = \sqrt{3}$.

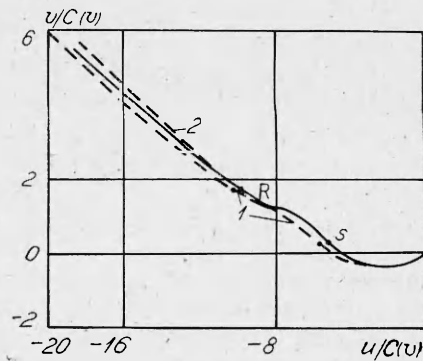
На рис. 3, 4 сплошные линии — изменение ускорений во времени на поверхности полупространства в точке $x = 10$, $y = 1$ при угле наклона трещины $\alpha = \pi/4$. Графики построены для трещины, распространяющейся со скоростью $v = 0,25$. Символами p , s отмечены моменты вступлений фронтов волн расширения и сдвига. Комбинации символов отмечают положение фронтов отраженных волн (см. рис. 1). Первый символ указывает тип падающей волны, а второй — отраженной от границы. Символом R отмечено положение фронта волны Рэлея, sp_k — боковая волна.

На рис. 5 сплошная линия — перемещение этой же точки. По осям отложены безразмерные величины перемещений, отнесенные к константе $C(v) = C(0,25)$, а в качестве параметра, меняющегося вдоль кривой, взято время. Точками s , R на кривых отмечены моменты прихода волн сдвига и Рэлея.

Оценим величину размерных перемещений, которые можно получить из расчетов. На рис. 2 для $v = 0,25$ имеем $C(v) \approx 0,02\tau_0/\mu$. Подсчитаем приближенно, чему равна единица масштаба на сетке рис. 5, полагая, что источник расположен на глубине $h = 10^3$ м, удельный вес среды $\gamma =$



Р и с. 4



Р и с. 5

$= 1,5 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$. Оценивая снимаемые трещиной касательные напряжения, находим

$$\sigma_{xx}^0 \sim \frac{v}{1-v} \sigma_{yy}^0 \sim -v\gamma \frac{h}{1-v} = -5 \text{ МПа}, \quad |\tau_0| \sim |\sigma_{yy}^0 - \sigma_{xx}^0|/2 \sim 5 \text{ МПа}.$$

Считается, что касательное напряжение снимается полностью. Полагая модуль сдвига μ равным 10^4 МПа , получим, что единице масштаба соответствует перемещение $u = C(v)h \sim 10^{-2} \text{ м}$. Единицам масштаба на рис. 3, 4 отвечают время и ускорение ($c_2 \sim 3000 \text{ м/с}$): $t = h/c_2 \sim \frac{1}{3} \text{ с}$, $\ddot{u} = C(v)c_2^2/h \sim 0,1 \text{ м/с}^2$.

Сравним данные результаты с найденными по дислокационной модели разрыва. Изменения в решении (4) касаются функции источника w . В рассмотренном примере перемещение берегов трещины

$$(7) \quad U_0^{LF}(s, sp) = \frac{w(p)}{s^3}, \quad U_0(t, X) = 2C(v)a_2^2 v^{-2} \sqrt{v^2 t^2 - X^2}.$$

За эквивалентный дислокационный источник примем разрыв с постоянным по его длине скачком перемещения $U = U_d H(v_d t - |X|)$ и величиной скачка $U_d(t)$, определяемой из условия равенства «объемов»:

$$(8) \quad \int_{-vt}^{vt} U_0(t, X) dX = \int_{-v_d t}^{v_d t} U_d(t) dX,$$

отсюда $U_d(t) = \pi a_2^2 C(v) t^2 / 2v_d$, а значит,

$$U^{LF}(s, sp) = \frac{u_d(p)}{s^3}, \quad w_d(p) = \frac{2\pi a_2^2 C(v) v}{(1 + v_d^2 p^2)^2 v_d}.$$

Сравнив это выражение с (6), (7), видим, что в решении (4) надо заменить w на w_d .

Расчеты, проведенные для $v_d = 0,9$, показывают, что ускорения и перемещения мало отличаются от кривых, полученных для источника (7) (штриховые кривые 1 на рис. 3–5). Если скорости распространения разрыва v_d и трещины v одинаковы, то в любой момент времени будет соблюдаться не только равенство (8), но и равенство средних подвижек

$$U_{cp}(t) = \frac{1}{2vt} \int_{-vt}^{vt} U_0(t, X) dX = \frac{U_d(t)}{2vt}.$$

Расчеты показывают, что ускорения в этом случае практически не отличаются от значений, найденных для трещины. Траектория перемещения точки на свободной поверхности отмечена на рис. 5 штриховой линией 2. Отличие решений незначительно. Возможно, это связано с авторемодельным описанием сравниваемых решений, в котором установилась динамика обмена волнами между вершинами и высокочастотная часть спектра не столь представительна, как в нестационарных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введенская А. В. Исследование напряжений и разрывов в очагах землетрясений при помощи теории дислокаций. — М.: Наука, 1969.
2. Костров Б. В. Механика очага тектонического землетрясения. — М.: Наука, 1978.
3. Райс Дж. Механика очага землетрясения. — М.: Мир, 1982.
4. Костров Б. В., Никитин Л. В. Излучение упругих волн при разрыве сплошности упругой среды. Плоская задача // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1968. — № 7.
5. Костров Б. В. Автомодельные задачи о распространении трещины касательного разрыва // ПММ. — 1964. — Т. 28, вып. 5.
6. Слепян Л. И. Механика трещин. — Л.: Судостроение, 1981.
7. Сарайкин В. А. Движение границы полуплоскости, вызванное растущей трещиной // ДАН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3.

8. Сарайкин В. А. Смещение границы полупространства при распространении под углом к ней трещины продольного сдвига // Тез. докл. конф. по распространению упругих и упругопластических волн.— Фрунзе, 1983.— Ч. 2.
 9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 24/VIII 1988 г.

УДК 539.3:534.1

В. В. Ларченко

БИФУРКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВОЗМУЩЕНИЯ СПЕКТРА КРИТИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Изложены новые явления в бифуркационной потере устойчивости упругой оболочки в условиях сингулярного возмущения. Показано, в частности, что при возмущении срединной поверхности и нагрузки изменяются тип бифуркации точек ветвления, группа вращения малой формы равновесия, кратность собственных значений. Сформулированы условия на функционалы уравнения разветвления, при которых кратность увеличивается до заданной. Это позволяет существенно уточнить теорию моделей потери устойчивости. Для установления отмеченных фактов существенно наличие сгущения в спектре при $\mu \rightarrow 0$ (μ — естественный малый параметр при старших производных). В рамках проведенных исследований предложена теоретико-экспериментальная методика оценки эффективности электрофизического воздействия на тонкие оболочки.

1. Пусть (r, φ) — полярная система координат, начало которой находится в вершине пологого сферического сегмента. Рассмотрим в пространстве $\dot{H}^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, $\Omega = [0, 1) \times [0, 2\pi]$ краевую задачу Маргерра — Власова [1—3]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu^{2(3-k)} \Delta^2 w &= \theta \Delta \Phi + \mu^q [L(w, \Phi) + L(w_\tau, \Phi)] + \mathcal{P}(r), \quad (r, \varphi) \in \Omega, \\ \mu^{2(k-1)} \Delta^2 \Phi &= -\theta \Delta w - \mu^q [L(w, w) + 2L(w, w_\tau)]/2, \\ w &= w' = 0, \quad A\Phi = B\Phi = 0, \quad r \in \partial\Omega, \\ rL(u, v) &= u''Av + v''Au - 2r^{-1}BuBv, \quad A(\cdot) = (\cdot)' + r^{-1}(\cdot)'' , \\ B(\cdot) &= [(\cdot)' - r^{-1}(\cdot)], \quad \mathcal{P}(r) = p + \delta\eta(r), \quad p \in \{p_n\}, \quad |\delta| \ll 1. \end{aligned}$$

Здесь w — нормальное перемещение срединной поверхности; Φ — функция напряжения Эри; $\mathcal{P}(r)$ — внешнее давление; $\{p_n\}$ — последовательность критических давлений совершенного сферического купола; δ — плотность возмущения давления; $\mu^2 = h/a\gamma$ — естественный малый параметр; h — толщина; $2a = \text{diam } \Omega$; $\gamma^2 = 12(1 - \nu^2)$; $\nu \in (0, 0, 5)$ — коэффициент Пуассона; θ — полураствор; $w_\tau(r, \varphi)$ — 2π -периодическое возмущение срединной поверхности такое, что $w_\tau(r, \varphi) \in \mathcal{F}_\tau(\Omega)$, $|\tau_n| \ll 1$, $\|f_n(r)\|_c = 1$, где

$$\mathcal{F}_\tau(\Omega) = \left\{ f_\tau \in \dot{H}^2(\Omega) \mid f_\tau(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^\tau(r) \cos n\varphi, \quad f_n^\tau(r) = \tau_n f_n(r) \right\}.$$

Если решение задачи (1.1) известно, то переход к размерным переменным задается формулами

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F &= \mu^{2(k-1)+q} E a^2 \Phi, \quad \{W, W_\tau\} = a\mu^q \{w, w_\tau\}, \\ R &= ar, \quad \{Q_p, \rho_\delta\} = \mu^{2(k-1)+q} E \gamma \{p, \delta\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее k, q — числовые параметры, при которых искомые неизвестные в (1.2) имеют порядок $O(1)$ при $\mu \rightarrow 0$.

2. Проектируя возмущение решения на собственные функции задачи (1.1), аналогично [4] введем малый параметр ξ_n и представим вектор-функцию (w, Φ) в виде ряда Пуанкаре — Ляпунова в окрестности простой точ-