15. **Леонтьев А. И., Волчков Э. П., Зауличный Е. Г.** Определение износа материала стенки в турбулентном пограничном слое за счет химической эрозии при дополнительном вдуве инертного неоднородного газа через уносимую поверхность в условиях существенной неизотермичности.— «Инж.-физ. журн.», 1969, т. 17, № 1.
16. **Неслер Д. Е.** Теплопередача в сжимаемом турбулентном пограничном слое на шероховатой поверхности.— «Ракетн. техн. и космонавтика», 1971, т. 9, № 9.
17. **Леонтьев А. И., Зауличный Е. Г.** Определение относительных коэффициентов тепло- и массообмена и критических параметров отрыва для турбулентного пограничного слоя при неоднородном вдуве в условиях неизотермичности.—«Инж.-физ. журн.», 1970, т. 19, № 4.
18. **Бэк.** Численная аппроксимация конвективного граничного условия.— Рус. пер. «Теплопередача». Серия С, 1962, т. 84, № 1.

УДК 532.5.013.2+534.222.2

ОБ ОДНОМЕРНОЙ ПУЛЬСАЦИИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Кедринский

(*Новосибирск*)

В рамках акустического приближения рассмотрим задачу о пульсации тороидальной полости, образованной в результате взрыва заряда ВВ в виде кольца, при условии выполнения неравенства $a \gg R$, где $a = \mathrm{const}$ — радиус тора; R — радиус полости. При этом, как показывают экспериментальные данные, сечение тороидальной полости практически сохраняет форму правильного круга в течение 1-го периода пульсации при $a \approx 10^3\ R_*$, а при $a \approx 10^2\ R_*$—в течение 1-го полупериода (R_* — радиус заряда). Задача о пульсации газового тора в несжимаемой жидкости рассмотрена в [1], однако она не дает возможности оценить такой важный параметр, как максимальный радиус расширившейся полости, а следовательно, и распределение энергии между продуктами детонации и ударной волной в случае взрыва с осевой симметрией.

Решение указанной задачи связано со многими трудностями, в частности со сложностью решения волнового уравнения. Поэтому прежде всего необходимо найти метод построения уравнения одномерной пульсации, который позволил бы упростить поставленную задачу. Так как для ряда пространственных потенциальных задач идеальной несжимаемой жидкости при определенных допущениях может быть найдено выражение для потенциала скорости, естественна попытка его использования для перехода к акустическим моделям. Реальность такого метода показана ниже на примере построения уравнения одномерной пульсации пузырьков.

1. Пусть потенциал скорости в случае несжимаемой жидкости имеет вид $\varphi = \Phi(t)/f(r)$. Тогда его акустический вариант может быть представлен как $\varphi = \Phi(t - r/c_0)/f(r)$. Так как рассматривается потенциальное течение жидкости $u = -\nabla\varphi$, где u — скорость частицы жидкости, то

$$u = \Phi f_r/f^2 + \Phi'/c_0 f, \tag{1.1}$$

где штрих означает производную по $\zeta = t - r/c_0$. Интеграл Коши—Лагранжа с учетом вида φ может быть записан как

$$\Phi' = f(\omega + u^2/2), \tag{1.2}$$

где $\omega = \int dp/\rho$, p — давление в жидкости, ρ — ее плотность. Из (1.1), (1.2) можно найти выражение для Φ

$$\Phi = f^2[u - (\omega + u^2/2)/c_0]/f_r.$$

Возьмем производную по t от этого выражения, получим

$$\Phi' = f^2[u_t - (\omega_t + uu_t)/c_0]/f_r. \tag{1.3}$$

На основании уравнений неразрывности (акустический вариант) и сохранения импульса

$$u_r + \nu u/r = -(d\omega/dt)/c_0^2, \quad \partial\omega/\partial r = -du/dt,$$

где $\nu = 0, 1, 2$ соответственно для плоского, цилиндрического или сферического случаев, найдем выражения для частных производных u_t и ω_t в (1.3). Они имеют вид

$$\begin{aligned} u_t &= du/dt + \nu u^2/r + u(d\omega/dt)/c_0^2, \\ \omega_t &= d\omega/dt + u(du/dt). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и приравнивая полученное выражение выражению (1.2), окончательно получим

$$\begin{aligned} f(1 - 2u/c_0)\,du/dt + \nu f u^2(1 - u/c_0 - rf_r/2\nu f)/r = \\ = \omega f_r + f(d\omega/dt)\left(1 - u/c_0 + u^2/c_0^2\right)/c_0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

В (1.5) можно перейти к стенке полости, положив $r = R$, $u = dR/dt$ и $\omega = (p(R) - p_\infty)/\rho_0$, где $p(R)$ — давление в полости; p_∞ — давление на бесконечности; ρ_0 — плотность невозмущенной жидкости. Таким образом, имеем

для плоской полости ($\nu = 0$, $f = 1$, $f_r = 0$)

$$[1 - 2(dR/dt)/c_0]d^2R/dt^2 = \left[1 - (dR/dt)/c_0 + (dR/dt)^2/c_0^2\right](d\omega/dt)/c_0;$$

для сферической полости ($\nu = 2$, $f = r$, $f_r = 1$)

$$\begin{aligned} R[1 - 2(dR/dt)/c_0]\,d^2R/dt^2 + (3/2)(dR/dt)^2[1 - 4(dR/dt)/3c_0] = \\ = \omega + (R/c_0)(d\omega/dt)\left[1 - (dR/dt)/c_0 + (dR/dt)^2/c_0^2\right]; \end{aligned}$$

для цилиндрической полости ($\nu = 1$, используя приближение Рича—Гиннела [2], положим $f = r^{1/2}$, $f_r = r^{-1/2}/2$)

$$\begin{aligned} R[1 - 2(dR/dt)/c_0]\,d^2R/dt^2 + (3/4)(dR/dt)^2[1 - 4(dR/dt/3c_0] = \\ = \omega/2 + (R/c_0)(d\omega/dt)\left[1 - (dR/dt)/c_0 + (dR/dt)^2/c_0^2\right]. \end{aligned}$$

Все три уравнения точно соответствуют уравнениям, получаемым на основе приближения Кирквуда-Бете [2] для акустического случая

$$(\partial/\partial t + c_0\partial/\partial r)G = 0,$$

где $G = r^{\nu/2}(\omega + u^2/2)$, которое получается также и вышеизложенным методом.

Предлагаемый метод нахождения уравнения пульсации полости довольно прост. Однако он еще не может быть использован в двумерных задачах в связи с тем, что в этом случае уравнение неразрывности не позволяет заменить частные производные компонент скорости на полные. Анализ метода показал, что он допускает упрощение, которое сводится к следующему. Предположим, что в уравнении неразрывности можно пренебречь членом $(d\omega/dt)/c_0^2$, т. е. считать, что связь между компонентами скорости определяется в основном рамками идеальной несжимаемой жидкости. При этом, если найдено решение уравнения Лапласа для потенциала скорости и при соответствующей постановке задачи граничные условия допускают разделение переменных, каждая компонента скорости выразится через полную производную от радиуса полости по t.

Можно показать, что сделанное предположение несущественно влияет на вид (1.5): в правой части этого уравнения в круглых скобках при $d\omega/dt$ исчезнут слагаемые u/c_0 и u^2/c_0^2. Но в рамках акустики ими и так можно пренебречь, поскольку основные потери на излучение при пульсации полости в сжимаемой жидкости определяются членом $(R/c_0)(d\omega/dt)$. Полученные результаты используем для нахождения в акустическом приближении уравнения пульсации тороидальной полости, расчет параметров пульсации по которому сравним с экспериментальными данными.

2. Пусть в жидкости имеется тороидальная полость, образовавшаяся в результате «мгновенного» взрыва кольцевого заряда, линейные размеры которой удовлетворяют неравенству $a \gg R$. Тогда в рамках приближения кольцевого источника можно записать следующее выражение для потенциала скорости:

$$\varphi = -(a/2\pi)\int_0^\pi \Phi\left(t - f/c_0\right) d\alpha/f, \tag{2.1}$$

где $\Phi = dS/dt$; $S = \pi R^2$ — площадь сечения полости тора; $f = \sqrt{z^2 + r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha}$ в цилиндрической системе координат (z, r, α), α отсчитывается в плоскости тора от произвольно выбранного направления. Согласно п. **1**, можно было бы выписать в явной форме выражение для φ в случае несжимаемой жидкости. При этом неясно, как записать аргумент функции Φ при переходе к акустической модели. Поэтому выражение для потенциала скорости сохраним в виде (2.1), условившись, что из-под знака интеграла можно выносить функцию Φ'. Для построения уравнения пульсации полости это предположение несущественно и может сказаться только при оценке тонкой структуры ударной волны в ближней от заряда зоне.

По аналогии с вышеизложенным можно записать

$$\Phi' = (2\pi/a)(\omega + V^2/2)\Big/\left(\int_0^\pi d\alpha/f\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\Phi(f_r + f_z)}{f^2}\, d\alpha = u + v - \frac{\omega + V^2/2}{c_0\left(\int_0^\pi d\alpha/f\right)}\int_0^\pi \frac{f_r + f_z}{f}\, d\alpha,$$

где u, v и V — компоненты и полная скорость частицы жидкости. Берем от второго уравнения в (2.2) частную производную по t. Тогда, вынося Φ' из-под знака интеграла, получим

$$\frac{a\Phi'}{2\pi}\int_0^\alpha \frac{f_r + f_z}{f^2}\, d\alpha = u_t + v_t - \frac{\omega_t + VV_t}{c_0\left(\int_0^\pi d\alpha/f\right)}\int_0^\pi \frac{f_r + f_z}{f}\, d\alpha. \tag{2.3}$$

Можно показать, что $\omega_t = d\omega/dt + VdV/dt$. Частные производные u_t и v_t найдутся из решения для несжимаемой жидкости. При этом, используя для потенциала скорости выражение $\varphi = -(a/2\pi)\,\Phi \int_0^\pi d\alpha/f$, окончательно получим

$$u_t = du/dt - (a/2\pi)\,\Phi\left\{u\int_0^\pi \left(f_{rr}/f^2 - 2f_r^2/f^3\right)d\alpha + v\int_0^\pi \left(f_{rz}/f^2 - 2f_rf_z/f^3\right)d\alpha\right\},$$

$$v_t = dv/dt - (a/2\pi)\,\Phi\left\{u\int_0^\pi \left(f_{rz}/f^2 - 2f_rf_z/f^3\right)d\alpha + \right.$$

$$\left. + v\int_0^\pi \left(f_{zz}/f^2 - 2f_z^2/f^3\right)d\alpha\right\}.$$

Подставляя полученные для ω_t, u_t и v_t выражения в (2.3) и выражая Φ' из первого уравнения (2.2), получим

$$(2.4)\quad (1 - 2F_1u)du/dt + (1 - 2F_1v)dv/dt - (\pi/a)(F_0/F)(u^2 + v^2) +$$
$$+ (a/2\pi)\Phi F_1F_2u^2 + (a/2\pi)\Phi F_1F_3v^2 + (a/\pi)\Phi F_1F_4uv - (a/2\pi)\Phi(F_2 +$$
$$+ F_4)u - (a/2\pi)\Phi(F_3 + F_4)v = (2\pi/a)(F_0/F)\omega + F_1d\omega/dt,$$

где

$$F_0 = (a/2\pi)\int_0^\pi f^{-2}(f_r + f_z)\,d\alpha;\quad F = \int_0^\pi d\alpha/f;$$

$$F_1 = (c_0F)^{-1}\int_0^\pi f^{-1}(f_r + f_z)\,d\alpha;\quad F_2 = \int_0^\pi f^{-2}\left(f_{rr} - 2f_r^2/f\right)d\alpha;$$

$$F_3 = \int_0^\pi f^{-2}\left(f_{zz} - 2f_z^2/f\right)d\alpha;\quad F_4 = \int_0^\pi f^{-2}\left(f_{rz} - 2f_rf_z/f\right)d\alpha;$$

$$\Phi = 2\pi R\,(dR/dt).$$

В конечном виде функции F записываются следующим образом:

$$F_0 = \frac{a}{2\pi r\sqrt{z^2 + (r + a)^2}}\left[\frac{2r^2 - a^2 - (z - r)^2}{z^2 + (r - a)^2}E(k) + K(k)\right],\quad F = \frac{2K(k)}{\sqrt{z^2 + (r + a)^2}},$$

$$F_1 = \frac{\pi\sqrt{z^2 + (r + a)^2}}{4rc_0K(k)}\left[1 + \frac{2r^2 - a^2 - (r - z)^2}{\sqrt{[z^2 + (r + a)^2][z^2 + (r - a)^2]}}\right],\quad k = \sqrt{\frac{4ar}{z^2 + (r + a)^2}},$$

$$F_2 = -\frac{3K(k)}{2r^2\sqrt{z^2 + (r + a)^2}} + \frac{3(z^2 + a^2) - r^2}{r^2}\,\frac{E(k)}{[z^2 + (r - a)^2]\sqrt{z^2 + (r + a)^2}} -$$
$$- \frac{(z^2 + a^2 - r^2)^2\sqrt{z^2 + (r + a)^2}}{2r^2[z^2 + (r - a)^2]^2[z^2 + (r + a)^2]^2}\{4(z^2 + r^2 + a^2)E(k) - [z^2 + (r - a)^2]K(k)\},$$

$$F_3 = \frac{2E(k)}{[z^2 + (r + a)^2]\sqrt{z^2 + (r + a)^2}} - \frac{2z^2\sqrt{z^2 + (r + a)^2}}{[z^2 + (r - a)^2]^2[z^2 + (r + a)^2]^2}\{4(z^2 +$$
$$+ r^2 + a^2)E(k) - [z^2 + (r - a)^2]K(k)\},\quad F_4 =$$
$$= -\frac{3zE(k)}{r[z^2 + (r - a)^2]\sqrt{z^2 + (r + a)^2}} + \frac{z(z^2 + a^2 - r^2)\sqrt{z^2 + (r + a)^2}}{r[z^2 + (r - a)^2]^2[z^2 + (r + a)^2]^2}\{4(z^2 + r^2 +$$
$$+ a^2)E(k) - [z^2 + (r - a)^2]K(k)\},$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода; k — их модуль. Переходя к стенке тора, после ряда преобразований в выражениях для коэффициентов F из (2.4) получим уравнение пульсации тороидальной газовой полости в сжимаемой жидкости

$$\{[1 - 2\pi(dR/dt)/c_0 \ln(8a/R)]Rd^2R/dt^2 + $$
$$+ [1 - \pi(dR/dt)/c_0 \ln(8a/R)](dR/dt)^2\}\ln(8a/R) - (dR/dt)^2/2 =$$
$$= \omega + \pi(R/c_0)(d\omega/dt). \tag{2.5}$$

По уравнению (2.5) проведен расчет параметров пульсации тороидальной полости, образующейся в результате взрыва кольца ВВ (ВВ — гексоген, плотность заряда $\rho_* = 1{,}55$ г/см^3, скорость детонации $D = 7{,}7$ км/с, диаметр заряда $d = 0{,}65$ мм). Поскольку экспериментальные исследования, с которыми ниже сравниваются расчетные данные, проводились на зарядах с медной оболочкой и конечность скорости детонации практически не влияла на форму полости, исходные параметры задачи определялись из условия распада произвольного разрыва в случае «мгновенного» взрыва, а для показателя изэнтропы использовались данные работы [3].

№ п/п	a_0	Расчет			Эксперимент		
		y_+^0	y_-^0	$t^0 \cdot R_*^{-1}$, с/см	y_+^0	$t^0 \cdot R_*^{-1}$, с/см	E, %
1	$1{,}54 \cdot 10^2$	125,83	4,02	0,21	103	0,21	11,8
2	$3{,}08 \cdot 10^2$	127,8	3,82	0,24	119,5	0,237	15,9
3	$4{,}60 \cdot 10^2$	128,8	3,72	0,256	123,6	0,256	17,0
4	$1{,}54 \cdot 10^3$	131,5	3,48	0,3	—	—	—
5	$3{,}08 \cdot 10^3$	132,8	3,37	0,323	—	—	—
6	$3{,}08 \cdot 10^4$	136,4	3,09	0,394	—	—	—
7	∞	140,9	3,15	0,2	135	0,2	22

Результаты расчета сведены в таблицу, где $a_0 = a/R_*$, $y_+^0 = R_+^0/R_*$, $y_-^0 = R_-^0/R_*$, R_+^0 и R_-^0 — соответственно максимальный и минимальный радиусы полости в моменты 1-го расширения и 1-го схлопывания; t^0 — время расширения до R_+^0 (половина первого периода пульсации); E — доля энергии, остающаяся в продуктах детонации после 1-го расширения полости; $a_0 = \infty$ соответствует бесконечному цилиндрическому заряду.

На основании приведенных в таблице результатов расчета и эксперимента можно отметить следующее:

а) с увеличением радиуса кольца заряда значения параметров пульсации y_+^0 и y_-^0, характеризующих энергетический баланс взрыва, асимптотически приближаются к соответствующим значениям параметров взрыва с цилиндрической симметрией;

б) расчетные данные удовлетворительно совпадают с экспериментальными при $a_0 > 3 \cdot 10^2$;

в) кольцевая геометрия заряда существенно влияет на период пульсации полости с продуктами детонации: даже при радиусе кольца заряда $a = 10$ м (данные таблицы под номером 6) период пульсации тора практически в 2 раза превышает его значение для цилиндрического взрыва; экспериментальные результаты подтверждают тенденцию к увеличению периода пульсации при увеличении радиуса кольца;

г) согласно экспериментальным данным, с уменьшением радиуса кольца (при выполнении условия сохранения тороидальности полости) доля энергии, приходящейся на ударную волну, увеличивается и при значении $a_0 \approx 150$ составляет практически 90%; при увеличении радиуса кольца энергетический баланс приближается к данным по взрыву с цилиндрической симметрией.

Приведенные результаты исследований подтверждают реальность предложенного в работе метода и полученного на его основе уравнения (2.5) пульсации тороидальной полости в сжимаемой жидкости.

Автор выражает благодарность В. Т. Кузавову за помощь при проведении экспериментов.

Поступила 7 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кедринский В. К.** О пульсации тороидального газового пузыря в жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
2. **Коул Р.** Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.
3. **Кузнецов Н. М., Шведов К. К.** Изэнтропическое расширение продуктов детонации гексогена.—ФГВ, 1967, № 2.

УДК 532.529.5:533.6.011.72

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Р. Р. Айдагулов, Н. С. Хабеев, В. Ш. Шагапов

(*Москва, Уфа*)

Для описания структуры ударной волны в жидкости с пузырьками используется односкоростная с двумя давлениями модель двухфазной смеси [1] и уравнение теплопроводности внутри пузырьков. Ударные волны в жидкости с пузырьками газа теоретически и экспериментально исследовались в работах [1—4]. В [5] исследовалась структура ударной волны в указанной среде с учетом сжимаемости несущей фазы, двухскоростных и двухтемпературных эффектов и было показано, что при учете тепловой неравновесности роль двухскоростных эффектов становится незаметной на фоне гораздо более сильной тепловой диссипации. В связи с этим здесь для простоты рассмотрение проводится в рамках односкоростной модели [6]. Цель данного исследования — уточнение результатов работы [6] и проверка приемлемости использования определяемого из приближения тонкого теплового пограничного слоя фиксированного коэффициента теплообмена или числа Нуссельта для нестационарного теплообмена между пульсирующим пузырьком и жидкостью.

1. Основные уравнения. Рассматривается движение жидкости со взвешенными в ней пузырьками газа при следующих основных допущениях [1]: 1) расстояния, на которых параметры потока меняются существенно, много больше расстояний между пузырьками, которые, в свою очередь, гораздо больше размеров пузырьков (т. е. объемные содержания газовой фазы α_2 достаточно малы, $\alpha_2 < 0{,}1$); 2) смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса R; 3) вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков.

Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости T_1 (в отличие от температуры газа в пузырьке)