

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО
ПЛАМЕНИ

А. Г. Истратов, В. Б. Либрович

(Москва)

Рассматривая ламинарное пламя как поверхность разрыва плотности, температуры, давления и скорости, распространяющуюся относительно газа с известной постоянной скоростью, Л. Д. Ландау провел исследование устойчивости стационарного режима распространения плоского пламени [1,2]. Вывод Л. Д. Ландау был неожиданным: пламя оказалось абсолютно неустойчивым.

Несоответствие этого теоретического результата с широко известными экспериментальными фактами привело к появлению ряда теоретических и экспериментальных работ [3-8].

В теоретических работах (их краткое изложение имеется в монографии [4]) рассматривалось стабилизирующее влияние процессов переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии), проявляющееся для длин волн возмущений, сравнимых с шириной фронта пламени. Для таких возмущений нельзя считать фронт пламени бесконечно тонким газодинамическим скачком, как это делал Л. Д. Ландау, и следует учитывать их влияние на структуру и скорость фронта пламени. Наиболее широкую известность приобрела работа Дж. Маркштейна [3], в которой процессы переноса учитывались посредством введения некоторой константы, связывающей изменение скорости пламени с радиусом кривизны его фронта. (Отметим, что задолго до работы [3] влияние на диффузионно-тепловую устойчивость пламени соотношения между коэффициентами теплопроводности и диффузии лимитирующего химическую реакцию вещества отмечалось в монографии [9].)

Работы [3-4] не объяснили расхождение теории Л. Д. Ландау с экспериментом: полученные в них критические числа Рейнольдса, характеризующие возникновение неустойчивости, по порядку величины не намного отличались от единицы, тогда как в опытах наблюдается устойчивое распространение пламени при значительно больших значениях чисел Рейнольдса.

В экспериментальных работах [5-8] основной целью исследований было обнаружение неустойчивости в распространении пламени, предсказанной Л. Д. Ландау, и определение критических условий, при которых она возникает. Ввиду того, что опыты по распространению пламени в каналах и по горению на различных горелках осложняются влиянием некоторых побочных факторов (трубной турбулентности, теплоотвода и др.), которые не учитываются в теории, целесообразно проводить опыты на сферическом пламени, свободно распространяющемся в пространстве, заполненном горючим газом. Такие опыты, проведенные вначале Я. Б. Зельдовичем и А. И. Розловским [5], а затем К. И. Щелкиным, Я. К. Тропиным и их сотрудниками [6-8], показали, что критические числа Рейнольдса достигают величины $10^4 - 10^6$.

В работах [5-8], однако, не принималось во внимание, что возникновение неустойчивости у сферического пламени имеет свою специфику, связанную с тем, что у него в отличие от плоского пламени непрерывно увеличивается поверхность горения. В частности, требуется иное, чем для плоского пламени, определение неустойчивости, потому что искажение формы сферического пламени и изменение скорости его распространения на опыте можно обнаружить, если только скорость роста амплитуды возмущения поверхности пламени настолько велика, что превышает скорость увеличения размера самого пламени. В настоящей работе за критерий возникновения неустойчивости принято условие возрастания со временем относительной (отнесенной к радиусу пламени) амплитуды возмущения поверхности пламени. Устойчивость распространения сферического пламени исследуется в гидродинамической постановке Л. Д. Ландау — Дж. Маркштейна. Показывается, что по отношению к первым сферическим гармоникам возмущений пламя устойчиво, потому что скорость роста этих гармоник оказывается меньше скорости распространения пламени. Для высших сферических гармоник существенным становится влияние на скорость пламени кривизны возмущений (это влияние учитывается в приближении Дж. Маркштейна [3]), которое стабилизирует сферическое пламя до определенного момента времени. Этот момент и определяет критическое число Рейнольдса.

Показывается, что критическое число Рейнольдса может достигать значительной величины — 10^3 — 10^4 , если под константой Маркштейна понимать величину, существенно зависящую от энергии активации химической реакции в пламени. Этот результат лучше согласуется с результатами экспериментов [5-8]. Качественная картина развития возмущений также согласуется с теоретическими представлениями.

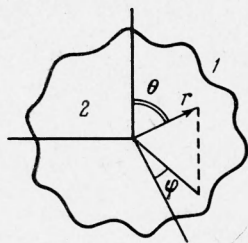
Обозначения

r, θ, φ	— сферические координаты,	k	— волновое число,
t	— время,	ε	— возмущение поверхности пламени,
$u_{r, \theta}$	— нормальная скорость распространения пламени,	ζ	— безразмерное возмущение поверхности пламени,
α	— отношение плотностей горячего и холодного газа,	Λ	— радиус кривизны,
v_2	— скорость пламени относительно продуктов сгорания,	n	— номер сферической гармоники,
ξ, θ, φ	— безразмерные сферические координаты,	m	— параметр периодичности по углу φ ,
τ	— безразмерное время,	f_i	— искомые функции ($i = 1, 2, 3, 4$),
v_r, v_θ, v_φ	— компоненты скорости в сферических координатах,	ω_i	— корни характеристического уравнения для сферического пламени,
p	— давление,	Ω_i	— корни характеристического уравнения для плоского пламени,
ρ	— плотность,	μ	— константа Маркштейна
ψ	— потенциал скорости,		
Φ	— интенсивность источника,		
R	— радиус пламени,		
A	— амплитуда возмущения,		
λ	— длина волны возмущения,		

$$v_2 = \frac{u_{r, \theta}}{\alpha}, \quad \xi = \frac{r}{v_2 t}, \quad \tau = \ln t, \quad R = v_2 t, \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{v_2 t}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Верхние индексы: градус $^\circ$ — невозмущенная величина, штрих — возмущение. Нижние индексы: цифры 1, 2 означают, что величина относится к холодному или горячему газу соответственно; 0 — величина на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$).

§ 1. Постановка задачи. Исследование устойчивости распространения сферического пламени в пространстве, заполненном горючим газом, проведем в предположениях Л. Д. Ландау — Дж. Маркштейна [1-3]. Будем считать, что фронт пламени представляет собой поверхность, на которой терпят разрыв значения скорости, плотности, температуры и давления и которая распространяется относительно газа со скоростью, зависящей в общем случае от кривизны поверхности. Предположим, что пламя находится в идеальном несжимаемом газе (плотность газа не зависит от давления, но различна по обе стороны фронта); это предположение обосновано постольку, поскольку скорость пламени намного меньше скорости звука.



Фиг. 1

При исследовании поведения во времени возмущенных значений скорости и давления будем пользоваться линеаризованными уравнениями Эйлера и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}^0 \nabla) \mathbf{v}' = - \frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \quad (1.2)$$

Эти уравнения относятся как к холодному горючему газу (к области 1), так и к горячим продуктам сгорания (к области 2) (фиг. 1, на которой изображено возмущенное сферическое пламя).

На поверхности пламени должны выполняться условия сохранения потоков массы и компонент импульса и условие зависимости скорости пламени от возмущений поверхности.

При решении задачи целесообразно использовать сферическую систему координат (фиг. 1) и все возмущения раскладывать в ряд по полной ортогональной системе невзаимодействующих сферических гармоник. Для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы величина амплитуды возмущения поверхности пламени, отнесенная к радиусу сферического пламени, по крайней мере для одной сферической гармоники росла бы со временем. Поэтому можно исследовать устойчивость распространения пламени по отношению к возмущениям, имеющим вид различных сферических гармоник; это не уменьшает общности задачи.

Для более четкого изложения и возможности упрощения промежуточных выкладок проведем решение задачи в два этапа. Сначала исследуем устойчивость пламени по отношению к первым сферическим гармоникам, для которых можно считать, что скорость распространения пламени не зависит от возмущений (решение задачи в предположении Л. Д. Ландау). Затем проведем исследование для высших гармоник; при этом учтем влияние возмущений на скорость пламени, используя соотношение Дж. Маркштейна [3].

§ 2. Гидродинамическая картина невозмущенного распространения сферического пламени. Сферическое пламя, вызывая тепловое расширение газа, действует аналогично источнику газа. Этим обстоятельством можно воспользоваться для определения распределений скорости и давления перед невозмущенным пламенем (в области 1). Потенциал скорости при действии источника газа, как известно, равен

$$\psi_1^{\circ} = -\frac{\Phi}{4\pi r} \quad (\Phi - \text{интенсивность источника}) \quad (2.1)$$

Интенсивность источника, эквивалентного пламени, вычислим по изменению объема газа, проходящего за единицу времени через поверхность пламени:

$$\Phi = 4\pi R^2 u_n \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = 4\pi v_2^3 t^2 (1 - \alpha) \quad (2.2)$$

Следовательно, радиальная скорость холодного газа равна

$$v_{r1}^{\circ} = \frac{\partial \psi_1^{\circ}}{\partial r} = (1 - \alpha) v_2^3 \frac{t^2}{r^2} \quad (2.3)$$

Распределение давления в области 1 найдем при помощи интеграла Лагранжа—Коши; получим

$$\frac{p_1^{\circ} - p_0}{\rho_1 v_2^2} = 2(1 - \alpha) \frac{v_2 t}{r} \left[1 - \frac{(1 - \alpha) v_2^3}{4} \frac{t^3}{r^3} \right] \quad (2.4)$$

В области 2, заполненной горячими продуктами сгорания, газ покоится ($v_{r2}^{\circ} = 0$), а давление постоянно и равно

$$p_2^{\circ} = p_0 + \rho_1 v_2^2 \frac{(1 - \alpha)(3 - \alpha)}{2} \quad (2.5)$$

(формулу (2.5) легко получить из (2.4) и условия скачка давления на фронте пламени).

§ 3. Исследование устойчивости по отношению к первым сферическим гармоникам. Решим задачу об устойчивости сферического пламени, используя предположение Л. Д. Ландау о постоянстве скорости пламени. Решение в этом предположении применимо к крупномасштабным возмущениям, для которых можно пренебречь их влиянием на структуру пламени.

Отметим, что для сферического пламени нужно ожидать степенной зависимости возмущений от времени (вместо экспоненциальной для плоского пламени). Это следует, как указал Я. Б. Зельдович, из следующих простых рассуждений. Скорость изменения амплитуды возмущения dA/dt из соображений размерности должна подчиняться соотношению

$$\frac{dA}{dt} \sim \frac{Au_n}{\lambda} \quad (3.1)$$

Для плоского пламени длина волны возмущения $\lambda = \text{const}$, и (3.1) приводит к экспоненциальной зависимости. Для сферического пламени длина волны, соответствующая определенной сферической гармонике, растет пропорционально времени и, следовательно, (3.1) дает степенной закон изменения A со временем.

Выпишем необходимые для решения задачи линеаризованные граничные условия на поверхности пламени. Отличие этих условий от используемых в работе [1] заключается в том, что в них учитывается зависимость невозмущенных величин v_r° , p° от радиальной координаты r и времени t .

Таким образом, будем иметь при $r = R(t)$:

непрерывность потока массы

$$v_{r1}' - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_{r1}^\circ}{\partial r} \varepsilon = \alpha \left(v_{r2}' - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \quad (3.2)$$

непрерывность нормальной компоненты импульса

$$p_1' + \frac{\partial p_1^\circ}{\partial r} \varepsilon = p_2' \quad (3.3)$$

непрерывность касательной компоненты импульса (в плоскости $\varphi = \text{const}$)

$$v_{\theta 1}' + \frac{v_{r1}^\circ}{R} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = v_{\theta 2}' \quad (3.4)$$

непрерывность касательной компоненты импульса (в плоскости $\theta = \text{const}$)

$$v_{\varphi 1}' + \frac{v_{r1}^\circ}{R \sin \theta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = v_{\varphi 2}' \quad (3.5)$$

условие постоянства нормальной скорости распространения пламени

$$v_{r1}' + \frac{\partial v_{r1}^\circ}{\partial r} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

Кроме условий на поверхности пламени, решение должно удовлетворять следующим очевидным граничным условиям отсутствия возмущений вдали от пламени и их ограниченности в центре пламени:

$$\begin{aligned} v_{r1}', v_{\theta 1}', v_{\varphi 1}', p_1' &\rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \\ |v_{r2}'|, |v_{\theta 2}'|, |v_{\varphi 2}'|, |p_2'| &< \infty \quad \text{при } r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение уравнений Эйлера и неразрывности для возмущений скорости и давления (1.1) и (1.2) проведем по-разному в областях 1 и 2. В области 1 с горючим газом используем условие потенциальности возмущенного течения газа. Это не ограничивает общности: возникшие в газе возмущения обусловлены свойствами поверхности пламени и поэтому частицы газа в области 1 не испытывают непосредственного действия возмущающих сил, сохраняя свойства потенциальности течения (теорема Гельмгольца).

Потенциал скорости ψ_1' в области 1 удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \psi_1' = 0 \quad (3.8)$$

При решении уравнения (3.8) целесообразно от координат r , θ , φ , t перейти к безразмерным координатам $\xi = r/v_2 t$, θ , φ , $\tau = \ln t$. Введение новых переменных ξ , τ естественно, если принимать во внимание автотомодельность распространения невозмущенного пламени.

Решение уравнения Лапласа в сферических координатах, как известно, можно представить в виде ряда, в котором производится суммирование по n и m (m , n — целые, $m < n$) следующих выражений:

$$\psi_{1,1}' = \Psi_{mn}^1(\tau) \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) / \xi^{n+1}, \quad \psi_{1,2}' = \Psi_{mn}^2(\tau) \cos m\varphi P_n^m(\cos \theta) / \xi^{n+1}$$

Как уже говорилось в § 1, не уменьшая общности задачи, можно рассматривать возмущение потенциала скорости конкретного вида (3.9). Можно ограничиться также членом ряда, содержащим $\sin m\varphi$, так как для членов с $\cos m\varphi$ результаты получаются одинаковыми.

Если ввести для удобства новую функцию $f_1(\tau)$ соотношением

$$\Psi_{mn}^{-1}(\tau) = v_2^2 e^\tau f_1(\tau) \quad (3.10)$$

то компоненты возмущений скорости в области 1 запишутся

$$v_{\xi 1}' / v_2 = -(n+1) f_1(\tau) \xi^{-(n+2)} \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) \quad (3.11)$$

$$v_{\theta 1}' / v_2 = f_1(\tau) \xi^{-(n+2)} \sin m\varphi dP_n^m / d\theta \quad (3.12)$$

$$v_{\varphi 1}' / v_2 = f_1(\tau) m \xi^{-(n+2)} \cos m\varphi P_n^m(\cos \theta) / \sin \theta \quad (3.13)$$

Из линеаризованного интеграла Коши—Лагранжа

$$\frac{P_1'}{\rho_1} = -\frac{\partial \Psi_1'}{\partial t} - v_{r_1} \circ v_{r_1}' = -e^{-\tau} \frac{\partial \Psi_1'}{\partial \tau} + \xi e^{-\tau} \frac{\partial \Psi_1'}{\partial \xi} - (1-\alpha) \frac{v_2 v_{\xi 1}'}{\xi^2} \quad (3.14)$$

находим возмущение давления

$$\frac{P_1'}{\rho_1 v_2^2} = -\xi^{-(n+1)} \sin m\varphi P_n^m \left[(n+2) f_1 - \frac{(1-\alpha)(n+1)}{\xi^2} f_1 + \frac{df_1}{d\tau} \right] \quad (3.15)$$

Для определения возмущений скорости и давления в области 2, заполненной горячими продуктами сгорания, нельзя предполагать, что в ней течение газа потенциально; в эту область непрерывно поступает через поверхность пламени газ, несущий с собой вихревые возмущения. Однако здесь удобно применить метод решения Л. Д. Ландау. Применяя операцию дивергенции к обеим частям уравнения (1.1), убеждаемся, что возмущение давления в области 2 удовлетворяет уравнению Лапласа. Так же, как при решении (3.8), возьмем один член ряда

$$\frac{P_2'}{\alpha \rho_1 v_2^2} = \Phi_{mn}^1(\tau) \xi^n \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) \quad (3.16)$$

и положим для удобства, что произвольная функция от времени $\Phi_{mn}^1(\tau)$ связана с другой произвольной функцией $f_2(\tau)$ соотношением:

$$\Phi_{mn}^1(\tau) = \frac{df_2}{d\tau} - (n-1) f_2 \quad (3.17)$$

Для определения компонент возмущений скорости в области 2 решим уравнение (1.1), в котором использовано выражение (3.16):

$$v_{\xi 2}' / v_2 = n \sin m\varphi P_n^m [(n+1) f_2(\xi e^\tau) + f_2(\tau) \xi^{n-1}] \quad (3.18)$$

$$v_{\theta 2}' / v_2 = \sin m\varphi \frac{dP_n^m}{d\theta} [f_{3,\theta}(\xi e^\tau) + f_2(\tau) \xi^{n-1}] \quad (3.19)$$

$$v_{\varphi 2}' / v_2 = m \cos m\varphi P_n^m [f_{3,\varphi}(\xi e^\tau) + f_2(\tau) \xi^{n-1}] / \sin \theta \quad (3.20)$$

Здесь f_3 , $f_{3,\theta}$, $f_{3,\varphi}$ — произвольные функции от аргумента ξe^τ . Эти функции связаны друг с другом, так как компоненты возмущений скорости должны удовлетворять уравнению неразрывности (1.2). Подставляя (3.18) — (3.20) в (1.2), найдем, что

$$f_{3,\theta} = f_{3,\varphi}, \quad f_{3,\theta} = z df_3 / dz + 2f_3 = \partial f_3 / \partial \tau + 2f_3, \quad z = \xi e^\tau \quad (3.21)$$

Таким образом, возмущения скорости имеют вид:

$$v_{\xi 2}' / v_2 = n \sin m\varphi [(n+1) f_3 + f_2 \xi^{n-1}] P_n^m \quad (3.22)$$

$$v_{\theta 2}' / v_2 = \sin m\varphi [f_2 \xi^{n-1} + \partial f_3 / \partial \tau + 2f_3] dP_n^m / d\theta \quad (3.23)$$

$$v_{\varphi 2}' / v_2 = m \cos m\varphi [f_2 \xi^{n-1} + \partial f_3 / \partial \tau + 2f_3] P_n^m / \sin \theta \quad (3.24)$$

Наконец зададим возмущение поверхности пламени

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{v_2 t} = f_4(\tau) \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) \quad (3.25)$$

Для определения функций f_1, f_2, f_3, f_4 используем граничные условия (3.2) — (3.6). (В этих условиях также перейдем от переменных r, θ, φ, t к переменным $\xi, \theta, \varphi, \tau$.) Подставляя в них выражения для возмущений скорости и давления в областях 1 и 2 и для возмущения поверхности пламени, получим систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$(n+1)f_1 + \alpha n f_2 + \alpha n(n+1)f_3 + 3(1-\alpha)f_4 + (1-\alpha)\frac{df_4}{d\tau} = 0 \quad (3.26)$$

$$[1 + \alpha(n+1)]f_1 + \frac{df_1}{d\tau} + \alpha(n-1)f_2 - \alpha\frac{df_2}{d\tau} + 2\alpha(1-\alpha)f_4 = 0 \quad (3.27)$$

$$f_1 - f_2 - 2f_3 - \frac{df_3}{d\tau} + (1-\alpha)f_4 = 0 \quad (3.28)$$

$$(n+1)f_1 + (3-2\alpha)f_4 + \frac{df_4}{d\tau} = 0 \quad (3.29)$$

Ниже исследуются во времени возмущения поверхности пламени. Поэтому вместо того, чтобы непосредственно решать систему (3.26) — (3.29), получим уравнение для одной только функции f_4 и соотношения, связывающие другие функции с f_4 и ее производной $df_4/d\tau$. Эту же процедуру удобно будет затем применить при исследовании устойчивости пламени к высшим сферическим гармоникам (§ 4), когда возникнет такая же система дифференциальных уравнений, но с коэффициентами, зависящими от τ .

Продифференцируем один раз (3.26), сложим его с (3.28), умноженным на $\alpha n(n-1)$, а также вычтем из (3.28), предварительно умноженного на $(n-1)$. Получим

$$\alpha n(n-1)f_1 + (n+1)\frac{df_1}{d\tau} + \alpha n\frac{df_2}{d\tau} - \alpha n(n-1)f_2 + 2\alpha n\frac{df_3}{d\tau} - (3.30) \\ - 2\alpha n(n-1)f_3 + \alpha n(n-1)(1-\alpha)f_4 + 3(1-\alpha)\frac{df_4}{d\tau} + (1-\alpha)\frac{d^2f_4}{d\tau^2} = 0$$

$$(n^2-1)f_1 - (n+1)\frac{df_1}{d\tau} - \alpha n\frac{df_2}{d\tau} + \alpha n(n-1)f_2 - \alpha n(n+1)\frac{df_3}{d\tau} + (3.31) \\ + \alpha n(n^2-1)f_3 + 3(1-\alpha)(n-1)f_4 + (1-\alpha)(n-4)\frac{df_4}{d\tau} - (1-\alpha)\frac{d^2f_4}{d\tau^2} = 0$$

Уравнения (3.27), (3.29) — (3.31) и уравнение, которое получится, если продифференцировать один раз уравнение (3.29), образуют систему пяти линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно

$$f_1, \frac{df_1}{d\tau}, F_2 = \frac{df_2}{d\tau} - (n-1)f_2, F_3 = \frac{df_3}{d\tau} - (n-1)f_3, \frac{d^2f_4}{d\tau^2}$$

Следовательно, каждая из этих величин выражается через f_4 и $df_4/d\tau$ и притом линейно. После вычислений получаем

$$\frac{d^2f_4}{d\tau^2} + a\frac{df_4}{d\tau} + bf_4 = 0 \quad (3.32)$$

$$a = \frac{2\alpha n^2 + 4n + 3\alpha n + 3\alpha}{n + \alpha n + \alpha}, \quad b = \frac{-\alpha(1-\alpha)n^3 + 2\alpha n^2 + 3n + 3\alpha n - \alpha^2 n + 2\alpha}{n + \alpha n + \alpha} \quad (3.33)$$

Общее решение уравнения (3.32) имеет вид

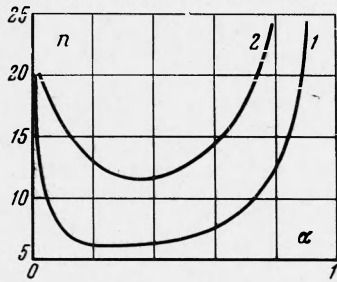
$$f_4 = C_1 t^{\omega_1} + C_2 t^{\omega_2} \quad (3.34)$$

Здесь ω_1 и ω_2 — корни характеристического уравнения

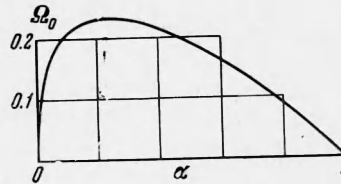
$$\omega^2 + a\omega + b = 0 \tag{3.35}$$

а C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Один из корней уравнения (3.35) ω_1 (со знаком — перед радикалом) всегда отрицательный и не определяет возникновения неустойчивости. (Кроме того, решение, соответствующее этому корню, не остается конечным при $r \rightarrow 0$ и, следовательно, $C_1 = 0$.) Второй корень уравнения ω_2 (со знаком + перед радикалом) может быть различным в зависимости от рассматриваемых n и α , знак его определяется знаком свободного члена в уравнении (3.35). Для заданного α при достаточно малых n (но всегда $n > 1$) корень уравнения отрицательный (пламя устойчиво), а при больших n — положительный (пламя неустойчиво). Граница устойчивости, которую можно найти, приравняв b нулю, нанесена на фиг. 2 (кривая 1). Значения n , при которых пламя устойчиво, лежат внизу под кривой. Видно, что при приближении α к нулю или единице область устойчивости неограниченно расширяется.



Фиг. 2



Фиг. 3

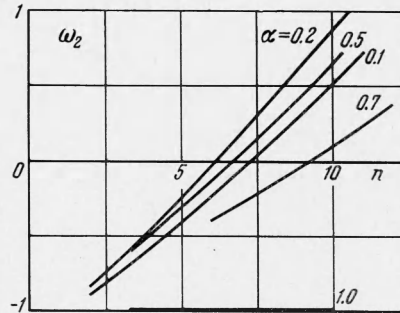
Это происходит из-за того, что различной степени теплового расширения газа при горении соответствует различная скорость роста возмущений. На фиг. 3 приведена зависимость от α скорости роста возмущений для плоского пламени, которая в начальный момент времени совпадает с зависимостью от α характеристической частоты. (На фигуре отложена величина $\Omega_0 = -i\Omega_*\alpha / u_n k$, где Ω_* — характеристическая частота в теории Л. Д. Ландау [4]. Ω_0 показывает, на какое расстояние относительно продуктов сгорания должно переместиться пламя, чтобы амплитуда возмущения его поверхности изменилась бы в e раз. Именно эта величина существенна при возникновении неустойчивости у сферического пламени). Видно, что Ω_0 обращается в нуль, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Максимальное значение

$$\Omega_{0m} = \sqrt{5} - 2$$

соответствует

$$\alpha_m = \sqrt{5} - 2.$$

В согласии с фиг. 3 кривая 1 на фиг. 2 проходит через минимум при α , близком к α_m .



Фиг. 4

Характер изменения амплитуды возмущения поверхности со временем для различных сферических гармоник иллюстрируется также фиг. 4, на которой изображены зависимости $\omega_2(n)$ при разных α . Точки пересечения кривых с осью абсцисс определяют критические значения гармоник.

Таким образом, при решении задачи об устойчивости распространения сферического пламени в постановке Л. Д. Ландау оказывается, что неустойчивыми будут лишь возмущения с достаточно большими n , т. е. возмущения с малыми длинами волн, которые, как известно из решения Л. Д. Ландау для плоского пламени, быстрее всего растут. Однако именно

для коротковолновых возмущений подход Л. Д. Ландау становится неприменимым, потому что для них нужно учитывать влияние процессов переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности) и кинетики химической реакции в пламени, что может привести к затуханию возникших возмущений.

§ 4. Исследование устойчивости по отношению к высшим сферическим гармоникам. Чтобы учесть влияние на устойчивость сферического пламени кинетики химической реакции и процессов переноса для высших сферических гармоник возмущения, у которых длина волны сравнима с шириной фронта пламени, воспользуемся приемом, предложенным Маркштейном [3]. Маркштейн предположил, что суммарное действие процессов переноса и кинетики реакции в пламени можно охарактеризовать некоторой константой, связывающей изменение нормальной скорости пламени с кривизной его фронта:

$$u = u_n \left(1 + \frac{\mu}{\Lambda} \right) \quad (4.1)$$

(u и u_n — возмущенная и невозмущенная скорости пламени, Λ — радиус кривизны фронта пламени, μ — константа).

Отметим, что подход Маркштейна является по существу следующим приближением к решению Л. Д. Ландау, причем приближением линейным. Соотношение (4.1) представляет собой разложение в ряд скорости пламени по малой величине μ/Λ , учитывающей структуру пламени. Константа μ , имеющая размерность длины, из соображений размерности должна быть пропорциональна ширине фронта пламени, т. е. $\mu = \mu_0 \kappa / u_n$, где κ — теплопроводность газа, а μ_0 — безразмерный множитель, который в работе [3] остался неопределенным. Из общих соображений ясно, что этот множитель зависит от чисел Прандтля и Льюиса, степени теплового расширения α и безразмерного параметра, характеризующего температурную зависимость скорости химической реакции в пламени. (Естественно в первом приближении считать, что при больших энергиях активации скорость реакции в пламени определяется лишь температурой в зоне реакции). В работе [10] был сделан расчет этого множителя в диффузионно-тепловой постановке задачи, без учета влияния газодинамики. Для μ_0 была получена формула, в которую существенно входит большая величина $E/2RT_b$ (E — энергия активации химической реакции, T_b — температура сгорания, R — газовая постоянная); поэтому величина μ_0 может достигать значений 10–20.

Условие применимости линейного приближения $\mu/\Lambda \ll 1$ накладывает ограничения на минимальный размер длины возмущения, при котором имеет смысл рассматривать задачу. Нельзя брать слишком малые волны возмущений (слишком большие n), кривизна которых настолько велика, что $\mu/\Lambda > 1$. (Заметим, что из-за увеличения длины волны возмущения, соответствующей определенной сферической гармонике, при больших временах можно рассматривать большие значения n). Кроме того, нельзя рассматривать распространение пламени при очень малом радиусе R , таком, что $\mu/R > 1$, так как скорость распространения невозмущенного фронта не будет тогда постоянной.

Первое ограничение фактически делает невозможным определение длины волны, при которой возмущения не растут, а затухают; линейная поправка не годится для отыскания границы устойчивости. Если решение Л. Д. Ландау представляет собой главный член асимптотики при числе Рейнольдса возмущения, стремящемся к бесконечности, то введение поправки порядка $\mu/\Lambda \ll 1/N_{Re}$ должно приводить к следующему виду выражения для частоты Ω , характеризующей развитие возмущений во времени:

$$\Omega = \Omega_0 \left[1 - \frac{F(\alpha)}{N_{Re}} \right] \quad (4.2)$$

Решение Маркштейна заключается, таким образом, в определении конкретного вида функции $F(\alpha)$. Кстати, в самой работе [3] это обстоятельство не было замечено, поэтому полученное в ней выражение для частоты содержит не только линейные по μ/Λ члены, но и члены более высоких порядков. Если провести расчет последовательно, то для $F(\alpha)$ получается формула:

$$F(\alpha) = (\sqrt{\alpha + \alpha^2 - \alpha^3} + 1) / (1 + \alpha - \alpha^2 - \sqrt{\alpha + \alpha^2 - \alpha^3}) \quad (4.3)$$

Решение (4.2) для плоского пламени показывает тенденцию изменения собственной частоты при уменьшении длины волны возмущения. Чтобы получить изме-

нение знака частоты и, следовательно, перейти к затухающим возмущениям, следует экстраполировать решение (4.2) в область длин волн, для которых $\mu / \Lambda \approx 1$. Определение границы устойчивости при учете процессов переноса экстраполированием линейной поправки является общей трудностью всех имеющихся работ.

Второе ограничение — независимость скорости распространения невозмущенного пламени от кривизны шара — накладывает условие на момент времени, начиная с которого имеет смысл постановка задачи. Принимая во внимание, что кривизна шаровой поверхности $2/R$, получим из условия $2\mu/R < \eta \ll 1$ оценку $v_2 t / \mu > 2/\eta$.

Для исследования устойчивости при этом следует видоизменить граничные условия (3.2) — (3.6): вместо (3.3) следует использовать условие

$$p_1' + \frac{\partial p_1^0}{\partial r} \varepsilon = p_2' + 2\rho_1 v_2^2 \alpha (1 - \alpha) \frac{\mu}{\Lambda} \quad (4.4)$$

а вместо (3.6)

$$v_{1r}' + \frac{\partial v_{1r}^0}{\partial r} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\alpha v_2 \frac{\mu}{\Lambda} \quad (4.5)$$

Поскольку представляет интерес рассмотрение больших n , для которых сферическое пламя при решении задачи в предположениях Л. Д. Ландау неустойчиво ($n > 6$, фиг. 2), то для радиуса кривизны сферической гармонике Λ будем пользоваться формулой

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{\varepsilon n(n+1)}{R^2} = \frac{\zeta n(n+1)}{v_2 t} \quad (4.6)$$

Используя граничные условия (3.2), (4.4), (3.4), (3.5), (4.5) и (3.7), легко получить систему уравнений для функций f_1, f_2, f_3, f_4 , такую же, как и система (3.26) — (3.29). Только некоторые коэффициенты станут функциями времени: к коэффициенту при f_4 в (3.27) следует добавить слагаемое $2\alpha(1-\alpha)\mu/\Lambda$, а к коэффициенту при f_4 в (3.29) прибавить $-\alpha\mu/\Lambda$. Воспользовавшись методом сведения системы к одному уравнению, применявшимся в § 3, и приняв во внимание, что $\partial(\mu/\Lambda)/\partial\tau = -(\mu/\Lambda)$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f_4}{d\tau^2} + \left(a + \frac{\mu a_0}{v_2} e^{-\tau}\right) \frac{df_4}{d\tau} + \left(b + \frac{\mu b_0}{v_2} e^{-\tau}\right) f_4 = 0 \quad (4.7)$$

где

$$a_0 = \alpha n(n+1)(2n+1)/(n+\alpha n+\alpha), \quad b_0 = a_0(n+1) \quad (4.8)$$

Хотя n считается большим, в коэффициентах уравнения (4.7) никаких упрощений не производится, потому что величина α может быть мала ($n\alpha \sim 1$). Кроме того, последний коэффициент уравнения будет рассматриваться вблизи тех значений n и α , для которых он равен нулю.

Решение (4.7) ищется в виде суммы частного решения, описывающего возникновение неустойчивости в постановке задачи по Л. Д. Ландау и полученного без учета влияния искривлений фронта на скорость пламени, и добавки, характеризующей это влияние, подобно тому как это делалось для плоского пламени (см. (4.2)). Для определения добавочного члена целесообразно перейти к новой функции U и уравнение (4.7) привести к виду

$$\frac{dU}{d\tau} + U^2 + \left(a + \frac{\mu a_0}{v_2} e^{-\tau}\right) U + b + \frac{\mu b_0}{v_2} e^{-\tau} = 0 \quad \left(U = \frac{1}{f_4} \frac{df_4}{d\tau}\right) \quad (4.9)$$

Решение задачи в приближении Л. Д. Ландау соответствует

$$\mu = 0, \quad U = \frac{1}{f_4} \frac{df_4}{d\tau} = \omega = \text{const}$$

(Здесь и ниже индекс при ω опущен). Поэтому решение (4.9) ищем в виде

$$U = \omega [1 + \chi(\tau)] \quad (\chi(\tau) \text{ — малая добавка}) \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.9) и пренебрегая квадратичными членами, получаем

$$\frac{d\chi}{d\tau} + (2\omega + a)\chi + \frac{(\omega a_0 + b_0)\mu}{\omega v_2} e^{-\tau} = 0 \quad (4.11)$$

Решение уравнения (4.11) имеет вид

$$\chi = K \exp [-(2\omega + a)\tau] - \frac{\mu(\omega a_0 + b_0)}{v_2\omega(2\omega + a - 1)} e^{-\tau} \quad (4.12)$$

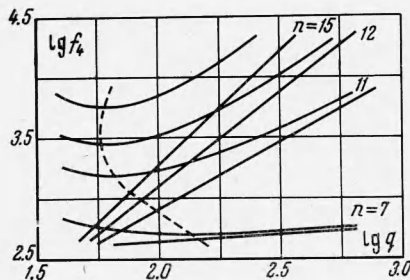
Здесь K — произвольная постоянная. Из условия $\mu = 0$, $\chi = 0$ следует $K = 0$. Таким образом, решение задачи в приближении Маркштейна имеет вид

$$f_4 = \text{const} \left(\frac{v_2 t}{\mu} \right)^\omega \exp \frac{\mu(\omega a_0 + b_0)}{v_2 t(2\omega + a - 1)} \quad (4.13)$$

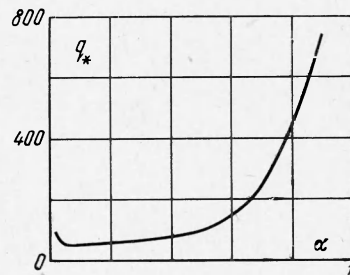
Легко видеть, что зависимость f_4 от t при $\omega > 0$ (т. е. в случае, когда решение задачи в приближении Л. Д. Ландау свидетельствует о неустойчивости) имеет минимум при

$$\frac{v_2 t}{\mu} = \frac{a_0(\omega + n + 1)}{\omega(2\omega + a - 1)} \quad (4.14)$$

Такую зависимость можно было ожидать и из физических соображений. При малых временах t длина волны возмущения на поверхности пламени невелика и существенным оказывается стабилизирующее влияние искривлений на скорость распространения пламени. Поэтому начальные возмущения затухают. При увеличении размера пламени (больших t) растут и размеры возмущений, что способствует возникновению неустойчивости, обнаруженной Л. Д. Ландау, — возмущения вновь начинают возрастать.



Фиг. 5



Фиг. 6

Для разных n минимальное значение относительной амплитуды достигается в различное время. Существует, однако, такой характерный для данного α номер сферической гармоники, для которого минимум наступает быстрее всего ($n = n_*$). n_* легче всего найти, построив графически зависимость (4.14).

На фиг. 5 в координатах $\lg f_4$ и $\lg(v_2 t / \mu) = \lg q$ изображены при $\alpha = 0.2$ зависимости относительной амплитуды возмущений поверхности пламени от времени для разных n . Прямые на фиг. 5 соответствуют решению задачи в приближении Л. Д. Ландау, пунктиром помечено положение минимумов кривых. Для данного α $n_* = 12$.

Зависимость $n_*(\alpha)$ изображена на фиг. 2 (кривая 2). Эта кривая целиком лежит внутри области, ограничиваемой кривой 1.

Таким образом, выявляется следующая картина развития относительной величины возмущений на поверхности пламени. Вначале возмущения всех длин волн затухают — относительная величина возмущений уменьшается. Затухание различных гармоник происходит с различной скоростью. Через некоторое время $q_* = v_2 t_* / \mu$ относительная величина ампли-

туды одной гармонике ($n = n_*$) проходит через минимум и начинает возрастать. Затем начинают расти соседние гармоники — развивается неустойчивость пламени.

За начало развития неустойчивости сферического пламени целесообразно принять момент времени q_* , который является функцией лишь от степени теплового расширения в пламени α . Зависимость q_* от α , построенная с использованием (4.14), изображена на фиг. 6. Для большинства пламен, для которых $\alpha = 0.05 \div 0.2$, величина $q_* = 50 \div 60$.

§ 5. Обсуждение полученных результатов и сравнение с экспериментальными данными. Экспериментальное исследование устойчивости распространения сферического пламени было начато работой Я. Б. Зельдовича и А. И. Розловского [5]. Затем явление возникновения неустойчивости исследовалось более детально в работах К. И. Щелкина, Я. К. Трошина и их сотрудников [6-8].

При обработке экспериментальных данных во всех работах используется критическое число Рейнольдса, характеризующее момент возникновения неустойчивости, которое строится по нормальной скорости пламени, радиусу пламенной сферы и вязкости холодной горючей смеси. Как легко видеть, определенное таким образом число Рейнольдса пропорционально безразмерному времени q

$$N_{Re} = \frac{u_n R}{\nu_1} = \frac{\mu_0}{P} q \quad (P - \text{число Прандтля}) \quad (5.1)$$

В опытах трудно установить тот размер пламени, при котором начинается возрастание одной из гармоник возмущения. Обычно фиксируется уже такое состояние возмущенного сферического пламени, когда возмущения на его поверхности достаточно развиты. В [5], например, за момент возникновения неустойчивости считали переход горения в детонацию, т. е. состояние сильно турбулизованного пламени. При этом регистрировались большие значения критических чисел Рейнольдса — $10^5 - 10^6$. В работах [6-8] проводилось фотографирование сферического пламени. По фотографиям определялись зависимости абсолютного размера возмущения на фронте пламени от времени. За момент возникновения неустойчивости принимался момент времени, полученный линейной экстраполяцией найденных зависимостей к возмущению с нулевой амплитудой. Определенные таким образом критические числа Рейнольдса оказались на порядок меньше ($\sim 10^4$). Однако в работах [6-8] не принималась во внимание разная скорость возрастания возмущений для разных видов возмущений (разных n), что может приводить к завышению числа Рейнольдса.

Вне зависимости от определения критического числа Рейнольдса получающиеся на опыте значения резко расходились с представлениями о возникновении неустойчивости для плоского фронта пламени, основанными на теории Л. Д. Ландау. При этом упускалась из виду специфика сферического пламени. Результат, полученный в настоящей работе, свидетельствует о том, что для сферического пламени критическое число Рейнольдса может быть намного больше, чем у плоского пламени. Проиллюстрируем это на численном примере.

Возьмем, например, пламя со степенью теплового расширения $\alpha = 0.2$. Для этого α критическое время $q_* \approx 60$ (фиг. 6). Если принять $\mu_0 = 10$, $P = 1$, то критическое число Рейнольдса для гармоники с $n = n_*$ составит ≈ 600 , т. е. на два порядка больше единицы. Предположим теперь, что в опыте фиксируется не это число Рейнольдса, а то, которое соответствует моменту времени, когда возмущения на фронте пламени достигли своей первоначальной величины. Пусть, например, начальные возмущения (скажем, от искры) возникли при $q = q_0 = 40$. (С этого значения q

можно считать выполненными исходные предположения о постоянстве скорости распространения невозмущенного пламени. При вязкости $\nu_1 = 0.1 \text{ см}^2/\text{сек}$ и скорости пламени $u_n = 100 \text{ см/сек}$ в момент $q_0 = 40$ радиус пламени $R_0 = 0.4 \text{ см}$, что близко к реальным размерам пламен, возникающих после поджигания.) Тогда согласно фиг. 5 возмущение с гармоникой $n = n_*$ достигнет своей первоначальной величины при $q \approx 100$, а соответствующее число Рейнольдса равно ≈ 1430 .

Несмотря на то, что приведенный численный пример проиллюстрировал значительное увеличение критического числа Рейнольдса для сферического пламени по сравнению с плоским пламенем, связанное со спецификой сферического пламени, для полного объяснения экспериментальных данных этого недостаточно. Можно предполагать, что в увеличении чисел Рейнольдса повинны также нелинейные стабилизирующие эффекты. Приближенному рассмотрению одного такого эффекта посвящена работа Я. Б. Зельдовича [11].

Интересно качественное сравнение экспериментальных данных с теоретическими результатами. Фотографирование пламени, проведенное в работах [6-8], показало, что развитие неустойчивости у сферического пламени происходит следующим образом. Вначале на поверхности пламени из-за возмущающего действия искры образуются заметные крупномасштабные возмущения, которые по мере развития пламени выглаживаются. Через некоторое время на фронте пламени проступают возмущения, по масштабу значительно меньше первоначальных. Эти возмущения развиваются, достигают значительной величины, и образуется ячеистоподобное пламя, которое в конце концов турбулизуется. Отмечено, что для быстрогорящих пламен масштаб «вторичных» возмущений меньше и возмущения формируются быстрее. Сильное влияние на развитие неустойчивости оказывает состав горючей смеси и, в частности, соотношение в смеси между коэффициентами температуропроводности и диффузии лимитирующего процесс горения компонента. Возникновение неустойчивости ускоряется при повышении давления.

Упомянутые экспериментальные закономерности находятся в качественном согласии с результатами теории (например влияние состава горючего газа на устойчивость можно объяснить изменением величины константы Маркштейна [10], влияние давления видно из определения числа Рейнольдса, влияние температуры горения иллюстрируется на фиг. 2 и т. п.).

В заключение приносим глубокую благодарность Я. Б. Зельдовичу за постановку задачи и ее обсуждение, Г. И. Баренблатту, О. И. Лейпунскому, Я. К. Трошину — за ценные советы.

Поступила 18 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
2. Ландау Л. Д. К теории медленного горения. Ж. эксперим. и теор. физ., 1944, т. 14, вып. 6.
3. Markstein G. H. Experimental and theoretical studies of flame-front stability. J. Aeronaut. Sci., 1951, vol. 18, No. 3. (Русский перевод: Маркштейн Дж. Экспериментальное и теоретическое изучение устойчивости фронта пламени. Вопросы ракетной техники, 1951, вып. 4).
4. Non-steady flame propagation. Ed. by G. Markstein. Pergamon Press, New York — London, 1964.
5. Зельдович Я. Б., Розловский А. И. Об условиях возникновения неустойчивости нормального горения. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 4.
6. Ракиова Х. А., Трошин Я. К., Щелкин К. И. Измерение нормальных скоростей пламени ацетилено-кислородных смесей. Ж. техн. физики, 1947, т. 17, вып. 12.
7. Трошин Я. К., Щелкин К. И. Структура фронта шаровых пламен и неустойчивость нормального горения. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 9.
8. Щелкин К. И., Трошин Я. К. Газодинамика горения. Изд-во АН СССР 1963.
9. Зельдович Я. Б. Теория горения и детонации газов. Изд-во АН СССР, 1944.
10. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. ПМТФ, 1962, № 4.
11. Зельдович Я. Б. Об одном эффекте, стабилизирующем искривленный фронт пламени. ПМТФ, 1966, № 1.