

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ РЕАКЦИИ n -ГО ПОРЯДКА В КОНДЕНСИРОВАННОЙ ФАЗЕ

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Распространение фронта экзотермической реакции в ж-фазе исследовалось в ряде работ (например, [1—10]). В работах [5, 8, 10] доказано существование и единственность решения задачи при различных предположениях о функции тепловыделения. В [1] для приближенного отыскания скорости горения применялся метод, аналогичный методу Зельдовича — Франк-Каменецкого [11], который был впервые применен для определения скорости горения газовых смесей. Как отмечалось в [1, 7], этот метод не дает возможность определить скорость горения при порядке реакции $n \geq 2$. Так, скорость горения, полученная при помощи этого метода при $n=2$, равняется нулю, что заведомо неверно. В [10] предложен метод аппроксимации результатов численных расчетов. Приближенный аналитический подход к этой задаче при произвольных значениях n отсутствует.

В данной работе проводится асимптотический анализ задачи в предположении большой энергии активации реакции. Используется метод сращиваемых асимптотических разложений. Этот метод применялся в [12] для получения двучленного разложения для скорости при $n < 3/2$ и переменных теплофизических параметрах [7] и при $n=1$. В отличие от результатов работы [7] здесь получены разложения справедливые при любом положительном конечном n .

1. Уравнения. Метод решения

Стационарное распространение плоского фронта одностадийной экзотермической реакции в конденсированной среде при ряде упрощающих предположений может быть описано следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 T}{dx^2} - m \frac{dT}{dx} + \frac{Q}{c} (1-y)^n \rho k_1 e^{-E/RT} = 0, \quad (1.1)$$

$$-m \frac{dy}{dx} + (1-y)^n \rho k_1 e^{-E/RT} = 0, \quad (1.2)$$

$$x = -\infty, \quad T = T_-, \quad y = 0, \quad x = \pm \infty, \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad y = 1. \quad (1.3)$$

Здесь x — координата, y — массовая доля продукта реакции, T — температура, ρ — плотность, m — массовая скорость, c — теплоемкость, λ — теплопроводность, R — газовая постоянная, Q — тепловой эффект реакции, k_1 — предэкспоненциальный множитель, E — энергия активации. Предполагается, что плотность и все теплофизические характеристики среды сохраняют постоянное значение.

Решение задачи (1.1)—(1.3) заключается в определении функций $y(x)$ и $T(x)$ и собственного значения m . Для существования решения достаточно, чтобы константа k_1 равнялась нулю на малом интервале вблизи T_- [11].

Уравнения (1.1)—(1.3) имеют первый интеграл

$$\frac{\lambda}{mc} \frac{dT}{dx} = T - T_- - \frac{Q}{c} y. \quad (1.4)$$

С учетом (1.4) задачу (1.1)—(1.3) можно привести к виду

$$\mu \frac{dy}{d\tau} = \frac{(1-y)^n e^{-\beta \frac{(1-\tau)}{\tau+\sigma}}}{\tau-y}; \quad (1.5)$$

$$\tau = \frac{T - T_-}{T_+ - T_-}; \quad T_+ = T_- + Q/c, \quad \sigma = T_- / (T_+ - T_-);$$

$$\beta = E/RT_+; \quad \mu = \frac{m^2 c}{\lambda \rho k_1} e^\beta;$$

$$\tau=0; \quad y=0, \quad (1.6)$$

$$\tau=1; \quad y=1. \quad (1.7)$$

Из (1.4) следует неравенство

$$\tau \geq y \geq 0. \quad (1.8)$$

Будем считать, что $\beta \gg 1$.

Из вида уравнения (1.5) следует, что при больших значениях параметра β изменение y от 0 до 1 в основном происходит в узкой зоне вблизи $\tau=1$ (внутренняя область), в то время как на остальной части интервала $0 \leq \tau \leq 1$ (внешняя область) значение y экспоненциально близко к нулю (с показателем $-\beta$). Это позволяет применить при решении задачи (1.5)—(1.7) метод сращиваемых асимптотических разложений [13, 14], введя во внутренней области новые переменные и отыскав решение в виде рядов с коэффициентами, зависящими от β^{-1} . В соответствии с этим методом разложения во внешней области и внутренней должны удовлетворять соответственно условиям (1.6) и (1.7) и условию сращивания.

Вид приближенного решения существенно зависит от величины n . Значение n определяет вид коэффициентов разложений, кроме того, при некоторых n для построения приближенного решения во внутренней области необходимо ввести в рассмотрение две подобласти (первый и второй пограничные слои) с различным видом разложений, представляющих решение.

Разобьем интервал $0 \leq \tau \leq 1$ на три области — малую окрестность точки $\tau=1-\gamma(\beta)$, $0 < \gamma$ (первый пограничный слой), где введем переменную $\bar{\tau} = \beta(1-\gamma-\tau)$, малую область, примыкающую к точке $\tau=1$ (второй пограничный слой), в котором введем переменную $\tau^* = \sigma(\beta)(1-\tau)$, и внешнюю область интервала.

Во внешней области при больших β

$$y(\tau, \beta) = 0. \quad (1.9)$$

Предполагается, что функции $\gamma(\beta)$ и $\delta(\beta)$ удовлетворяют требованиям $0 \leq \gamma(\beta) \ll 1$, $\delta(\beta) \gg 1$. При построении решения рассмотрим отдельно случаи $0 \leq n \leq 2$, $n=2$ и $n > 2$. Выделенным частным случаям соответствует существенно различный ход интегральных кривых задачи (1.5)—(1.7) в точке $\tau=1$.

2. Решения при $0 < n < 2$

Будем искать двучленное разложение для собственного значения μ

$$\mu = \mu_0 \varphi_0(\beta) \left(1 + \frac{\mu_1 \varphi_1(\beta)}{\mu_0 \varphi_0(\beta)} \right); \quad \varphi_1/\varphi_0 \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

В первом и втором пограничных слоях двучленные разложения решения $y(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} y(\tau) &= y_0(\bar{\tau}) + f_1(\beta)y_1(\bar{\tau}) + f_2(\beta)y_2(\bar{\tau}) \dots, \\ y(\tau^*) &= Y_0(\tau^*) + F_1(\beta)Y_1(\tau^*) + F_2(\beta)Y_2(\tau^*) \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения для членов разложений (2.2) получаются подстановкой (2.1) и (2.2) в уравнение (1.5) и приравниванием членов одного порядка малости. Разложения в первом пограничном слое должны удовлетворять условиям сращивания с (1.9), т. е.

$$y_i(\bar{\tau} \rightarrow +\infty) = 0; \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Разложения во втором пограничном слое должны удовлетворять условиям (1.7), т. е.

$$Y_0(0) = 1; \quad Y_i(0) = 0; \quad i=1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Подставив первые члены разложения (2.1) и разложения для первого пограничного слоя в (1.5), получим

$$\begin{aligned} -\mu_0 \frac{dy_0}{d\bar{\tau}} &= (1 - y_0)^{n-1} e^{-\bar{\tau}/1+\sigma}; \quad y_0(+\infty) = 0; \\ \Phi_0(\beta) &= \frac{e^{-\gamma\beta/1+\sigma}}{\beta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

откуда

$$y_0 = 1 - \left[1 + \frac{(1+\sigma)(n-2)}{\mu_0} e^{-\bar{\tau}/1+\sigma} \right]^{-\frac{1}{n-2}}. \quad (2.6)$$

При $n < 2$ решение (2.6) может удовлетворять условию (1.7), поэтому без ограничения общности можно положить $\gamma=0$ и $y(\bar{\tau}=0) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_0 &= (1+\sigma)(2-n); \quad \Phi_0 = 1/\beta; \\ y_0 &= 1 - [1 - e^{-\bar{\tau}/1+\sigma}]^{\frac{1}{2-n}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полагая $\delta(\beta) \gg \beta$ и $\bar{\tau} = \tau^*\beta\delta^{-1}$, из (2.7) имеем

$$y_0 = 1 - \left(\frac{\beta}{\delta} \right)^{\frac{1}{2-n}} \left(\frac{\tau^*}{1+\sigma} \right)^{\frac{1}{2-n}} + O \left(\left(\frac{\beta}{\delta} \right)^{\frac{1}{2-n}} \right). \quad (2.8)$$

Сравнивая (2.8) с разложением (2.2) во втором пограничном слое, имеем

$$Y_0(\tau^*) = 1; \quad F_1 = - \left(\frac{\beta}{\delta} \right)^{\frac{1}{2-n}}. \quad (2.9)$$

Подставляя в (1.5) второе разложение из (2.2) и (2.1), имеем

$$\mu_0 \frac{dY_1}{d\tau^*} = \frac{Y_1^n}{Y_1 - \tau^*(\delta|F_1|)^{-1}}; \quad Y_1(0) = 0. \quad (2.10)$$

Для того чтобы $Y_1 \neq 0$, необходимо положить

$$\delta|F_1| = 1; \quad \delta = \beta^{1/n-1}; \quad F_1 = -\beta^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (2.11)$$

При $2 > n > 1$ $\delta > \beta$, а при $n < 1$ можно положить $Y_1 \equiv 0$ и нет, следовательно, необходимости вводить второй пограничный слой. Это утверждение справедливо для всех членов разложения при $0 < n < 1$.

Решение (2.10) имеет вид

$$\tau^* = \left(\frac{\mu_0}{n-1}\right)^{1/n-1} \exp\left(\frac{\mu_0}{(n-1)Y_1^{n-1}}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}, \frac{\mu_0}{(n-1)Y_1^{n-1}}\right). \quad (2.12)$$

Здесь $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ — неполная гамма-функция. При $\tau^* \rightarrow +\infty$

$$Y_1 \rightarrow \left(\frac{\tau^*}{1+\sigma}\right)^{1/2-n} - \frac{\tau^*}{2n-3} \quad \text{при } 1 < n < 3/2,$$

$$Y_1 \rightarrow \left(\frac{\tau^*}{1+\sigma}\right)^2 + 2\tau^* \ln \tau^* \quad \text{при } n=3/2, \quad (2.13)$$

$$Y_1 \rightarrow \left(\frac{\tau^*}{1+\sigma}\right)^{1/2-n} + B\tau^* \frac{n-1}{2-n} \quad \text{при } 3/2 < n < 2$$

Здесь

$$B = (1+\sigma)^{\frac{3-2n}{(n-1)(2-n)}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right) (2-n)^{\frac{3-2n}{n-1}} (n-1)^{-\frac{(2-n)}{n-1}},$$

$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, 0)$ — полная гамма-функция. Переходя в (2.13) к переменной τ , получаем

$$f_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \beta^{-i} \quad \text{при } 1 < n < 3/2,$$

$$f_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{\ln \beta}{\beta} \quad \text{при } n=3/2, \quad (2.14)$$

$$f_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \beta^{-\left(\frac{2-n}{n-1}\right)} \quad \text{при } 3/2 < n < 2.$$

Из двучленного разложения в первом пограничном слое имеем

$$\mu_0 \frac{dy_1}{d\tau} = e^{-\frac{\tau}{1+\sigma}} (1-y_0)^{n-1} \left[\frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{y_1(n-1)}{y_0} + \frac{\tau^2}{(1+\sigma)^2} - \frac{\tau}{1-y_0} \right],$$

$$y_1(+\infty) = 0 \quad (1 < n < 3/2); \quad (2.15)$$

$$\mu_0 \frac{dy_1}{d\tau} = \sqrt{1-y_0} e^{-\frac{\tau}{1+\sigma}} \left[\frac{y_1}{2(1-y_0)} + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right]; \quad y_1(+\infty) = 0 \quad (n=3/2);$$

$$\mu_0 \frac{dy_1}{d\tau} = (1-y_0)^{n-1} e^{-\frac{\tau}{1+\sigma}} \left[\frac{y_1(n-1)}{1-y_0} + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right]; \quad y_1(+\infty) = 0 \quad (3/2 < n < 2).$$

Решения уравнений (2.15) записываются в виде

$$y_1 = \frac{(1-y_0)^{n-1}}{\mu_0} \int_0^\tau e^{-x/(1+\sigma)} \left[\frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{x^2}{(1+\sigma)^2} - \frac{x}{1-y_0(x)} \right] dx \quad (1 < n < 3/2);$$

$$y_1 = \frac{2\mu_1}{\mu_0} [i - y_0 - \sqrt{1-y_0}] \quad (n=3/2); \quad (2.16)$$

$$y_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0(2-n)} [i - y_0 - (1-y_0)^{(n-1)}] \quad (3/2 < n < 2).$$

Из условий срачивания получим

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = -2 - (1 + \sigma)I(n); \quad I(n) = \int_0^1 (\ln t) (1-t)^{-1.2-n} dt;$$

$$1 < n < 3/2; \quad I(1) = -\frac{\pi^2}{6}; \quad (2.17)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = (1 + \sigma) \quad (n=3/2);$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = B(2-n)(1+\sigma)^{\frac{n-1}{2-n}} = \left[\frac{(1+\sigma)(2-n)}{(n-1)} \right]^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right) \quad (3/2 < n < 2).$$

Значения $I(n)$ представлены ниже

n	$-I(n)$	n	$-I(n)$
0,0	1,227	0,8	1,471
0,1	1,243	0,9	1,544
0,2	1,261	1,0	1,645
0,3	1,282	1,1	1,793
0,4	1,306	1,2	2,035
0,5	1,336	1,3	2,504
0,6	1,371	1,4	5,848
0,7	1,415		

Двучленные разложения для скорости имеют вид

$$\mu = \frac{(2-n)(1+\sigma)}{\beta} \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} (2 + (1+\sigma)I(n)) \right\} \quad (0 < n < 3/2);$$

$$\mu = \frac{1+\sigma}{2\beta} \left[1 + \frac{\ln \beta}{\beta} (1+\sigma) \right] \quad (n=3/2); \quad (2.18)$$

$$\mu = \frac{(2-n)(1+\sigma)}{\beta} \left\{ 1 + \beta^{\frac{-(2-n)}{n-1}} \left[\frac{(1+\sigma)(2-n)}{(n-1)} \right]^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n-3}{n-1}\right) \right\} \quad (3/2 < n < 2).$$

Скорость распространения фронта реакции убывает с увеличением порядка реакции от 0 до 2. При $n=2$ эти результаты неприменимы и в этом случае необходимо отдельное исследование.

3. Решение при $n=2$

Отыскивая решения в пограничных слоях в виде (2.2) и представляя их в виде (2.1) аналогично (2.5), имеем

$$-\mu_0 \frac{dy_0}{d\tau} = (1-y_0)^{n-1} e^{-\tau/1+\sigma}; \quad y_0(+\infty) = 0.$$

$$\varphi_0 = \frac{e^{-\frac{\gamma\beta}{1+\sigma}}}{\beta}, \quad (3.1)$$

откуда

$$y_0 = 1 - \exp\left[-\frac{(1+\sigma)}{\mu_0} e^{-\tau/1+\sigma}\right]. \quad (3.2)$$

Решение (3.2) не может удовлетворить условию (1.9) ни при каком конечном значении μ_0 . Полагая как и в (2.9)

$$Y_0(\tau^*) = 1, \quad F_1 = -\delta^{-1}, \quad (3.3)$$

из (1.7) получаем при $\delta \gg \beta$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{dY_1}{d\tau^*} &= \frac{Y_1^2}{Y_1 - \tau^*}, & Y_1(0) &= 0 \\ \delta &= e^{\frac{\gamma\beta}{1+\sigma}}; & \varphi_0 &= \delta^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) имеем

$$\tau^* = \mu_0 \exp\left(\frac{\mu_0}{Y_1}\right) \Gamma\left(0, \frac{\mu_0}{Y_1}\right); \quad \Gamma(0, x) \equiv -\text{Ei}(-x). \quad (3.5)$$

При $\tau^* \rightarrow +\infty$

$$Y_1 = \mu_0 \exp\left(C + \frac{\tau^*}{\mu_0}\right) + \dots \quad (3.6)$$

Здесь $C=0,577216$ — постоянная Эйлера.

Для сращивания разложений в первом и втором пограничных слоях необходимо применять аппарат промежуточных переменных [13, 14], однако здесь формально можно обойтись непосредственно принципом сращивания

$$\lim_{\tau^* \rightarrow +\infty} y(\tau^*) = \lim_{\bar{\tau} \rightarrow -\infty} y(\bar{\tau}). \quad (3.7)$$

Так как

$$\bar{\tau} = \frac{\tau^*\beta}{\delta} - \gamma\beta, \quad (3.8)$$

то из (3.2) следует

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - \exp\left[-\frac{(1+\sigma)}{\mu_0} e^{\frac{-\tau^*\beta}{\delta(1+\sigma)}} e^{\frac{\gamma\beta}{(1+\sigma)}}\right] = 1 - \exp\left[-\frac{(1+\sigma)}{\mu_0} \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\tau^*\beta}{\delta(1+\sigma)}\right)\right] = \\ &= 1 - \exp\left[-\frac{(1+\sigma)}{\mu_0} \frac{\delta}{\beta}\right] \exp\left(\frac{\tau^*\beta}{\mu_0}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь учтено (3.4).

Сравнивая (3.9) с двучленным разложением во втором пограничном слое, с учетом (3.6) получим

$$\frac{\mu_0 \delta^C}{\delta} = \exp\left(-\frac{(1+\sigma)\delta}{\beta\mu_0}\right) \quad (3.10)$$

или, учитывая (3.4),

$$C = -\ln(\varphi_0\mu_0) - \frac{(1+\sigma)}{\beta} \frac{1}{(\varphi_0\mu_0)}. \quad (3.11)$$

При $\beta \rightarrow \infty$ решение (3.11) можно представить в виде ряда

$$\varphi_0\mu_0 = \frac{1}{b \ln b} - \frac{\ln \ln b}{b (\ln b)^2} + \frac{(\ln \ln b)^2}{b \ln^3 b} + \dots, \quad (3.12)$$

где $b \equiv \beta/(1+\sigma)$. Уравнение (3.12) разрешимо при $b \geq \exp(C+1) = 4,85$. Из (3.4)

$$\begin{aligned} \delta &= b \ln b + b \ln \ln b + \dots, \\ \gamma &= \frac{\ln \ln b}{b} + \frac{\ln \ln b}{b \ln b} + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом получено выражение для скорости распространения $\mu = \varphi_0(\beta)\mu_0$. При достаточно больших β можно ограничиться рядом (3.12). При конечных β из-за логарифмической зависимости в (3.12) необходимо удерживать несколько членов ряда. Уравнение (3.11) имеет

второй корень $O(1)$, но так как предполагается, что $\delta \gg 1$, то этот корень опущен.

Численное решение (3.11) представлено в таблице. Численные расчеты задачи (1.5) — (1.7) [10] для случая $\sigma = 10^{-2}$, $\beta = 10$ дают $\mu = 0,34 \cdot 10^{-2}$, из (3.12) $\mu = \mu_0 \varphi_0(b=10) = 0,366 \cdot 10^{-2}$; при $\sigma = 10^{-2}$, $\beta = 20$ $\mu = 0,1347 \cdot 10^{-2}$, в то время как $\mu = \mu_0 \varphi_0(b=20) = 0,1337 \cdot 10^{-2}$. Как видно из таблицы, наблюдается хорошее совпадение с данными численных расчетов для $\varphi_0(b) \mu_0$.

b	$\varphi_0 \mu_0 \cdot 10$	b	$\varphi_0 \mu_0 \cdot 10$
5	1,564	14	0,2206
6	0,9225	15	0,1948
7	0,6737	16	0,1823
8	0,5294	17	0,1674
9	0,4340	18	0,1547
10	0,3663	19	0,1435
11	0,3157	20	0,1337
12	0,2769	21	0,1252
13	0,2458	22	0,1175

4. Решение при $n > 2$

Необходимо ввести во втором пограничном слое

$$\tau^* = \beta(1 - \tau); \quad y = 1 - \frac{Y_1(\tau^*)}{\beta} - f_2 Y_2(\tau^*). \quad (4.1)$$

Далее полагаем $n/\beta \ll 1$. Как и в предыдущих случаях, решение в первом пограничном слое имеет вид

$$Y_0 = 1 - \left[1 + \frac{(n-2)(1+\sigma)}{\mu_0} e^{-\tau/1+\sigma} \right]^{-1/n-2}, \quad Y_0(\infty) = 0, \\ \varphi_0(\beta) = e^{-\tau\beta/1+\sigma}/\beta. \quad (4.2)$$

Это решение не может удовлетворять условию при $\tau = 1$, следовательно, $\gamma \neq 0$.

Во втором пограничном слое

$$\mu_0 \frac{dY_1}{d\tau^*} = \frac{Y_1^n e^{-\tau^*/1+\sigma}}{Y_1 - \tau^*}, \quad Y_1(0) = 0; \\ \varphi_0 = \beta^{1-n}, \quad \gamma = (1+\sigma)(n-2) \frac{\ln \beta}{\beta}, \quad \delta = \beta. \quad (4.3)$$

Для сращения с (4.2) из (4.3) получаем

$$y_0 = 1 - \left[\frac{\mu_0}{(n-2)(1+\sigma)} \right]^{\frac{1}{n-2}} e^{\frac{\tau^*}{(1+\sigma)(n-2)}} 1/\beta \dots \quad (4.4)$$

Таким образом,

$$Y_1(\tau^* \rightarrow +\infty) = \left[\frac{\mu_0}{(n-2)(1+\sigma)} \right]^{1/n-2} e^{\frac{\tau^*}{(1+\sigma)(n-2)}}. \quad (4.5)$$

Аналитическое решение (4.3) неизвестно. Можно показать, что при $Y_1 \rightarrow \infty$ решение (4.3) может в зависимости от μ_0 иметь три типа асимптотических поведений (см. рисунок)

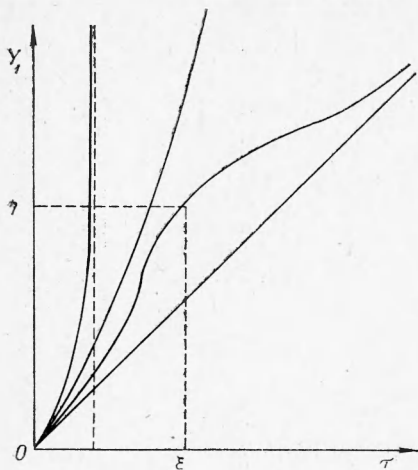
$$Y_1 \rightarrow \left[(n-2) e^{\frac{\tau_0^*}{1+\sigma}(\tau_0 - \tau^*)} \right]^{-1/n-2}, \quad \tau^* \rightarrow \tau_0 = \text{const}, \quad (4.6)$$

при $\mu_0 < \bar{\mu}_0$

$$Y_1 \rightarrow \left[\frac{\mu_0}{(n-2)(1+\sigma)} \right]^{\frac{1}{n-2}} e^{\frac{\tau^*}{(1+\sigma)(n-2)}} - \frac{\tau^*}{n-1} + \frac{(n-2)(1+\sigma)}{(n-1)^2},$$

$$Y \rightarrow \tau^* + \tau^{*n} \frac{e^{-\frac{\tau^*}{1+\sigma}}}{\mu_0}, \quad \mu_0 = \bar{\mu}_0, \quad \tau^* \rightarrow +\infty, \quad \bar{\mu}_0 < \mu_0,$$

где $\tau_0 = \tau_0(\mu_0)$.



Решение (4.3) непрерывно зависит от параметра μ_0 , причем $\frac{dY_1}{d\mu_0} \leq 0$ и $\frac{dY_1}{d\tau^*} \geq 0$, $Y_1 \geq \tau^*$. В области $0 \leq \tau^* < \infty$ существует только одна особая точка $Y_1=0$, $\tau^*=0$, поэтому через каждую точку кроме точки $(0,0)$ проходит только одна интегральная кривая.

Покажем, что может быть только одна кривая с экспоненциальным асимптотическим поведением. Предположим обратное, пусть существуют две такие кривые, причем $\mu_0^{(1)} < \mu_0^{(2)}$, тогда в окрестности нуля $Y_1(\mu_0^{(1)}) > Y_1(\mu_0^{(2)})$, но при достаточно больших τ^* , как видно из (4.6), $Y_1(\mu_0^{(1)}) <$

$< Y_1(\mu_0^{(2)})$, т. е. должна существовать точка, через которую проходят две интегральные кривые, а этого, как указывалось выше, быть не может. Следовательно, существует только одна кривая с экспоненциальным поведением.

Найдем значение $\mu_0 = \bar{\mu}_0$, которое соответствует этой кривой. Из рисунка видно, что при $\mu_0 < \bar{\mu}_0$ должна существовать точка $(\tau^* = \xi; Y_1 = \eta)$, в которой $\frac{dY_1}{d\tau^*} = 1$. Причем кривая, соответствующая $\mu_0 = \bar{\mu}_0$, является предельной для этого семейства. В точке (ξ, η) , как это следует из (4.3),

$$\mu_0 = \frac{\eta^n e^{-\xi/1+\sigma}}{\eta - \xi} \Phi(\eta; \xi), \eta \geq \xi. \quad (4.7)$$

В точке (ξ, η) необходимо, чтобы $\left(\frac{d^2 Y_1}{d\tau^{*2}}\right)_{\xi, \eta} \leq 0$. Это приводит к требованию $n(1+\sigma) \leq \eta$; при этом условии $\Phi(\eta, \xi)$ — вогнутая функция η и ξ , причем $\Phi(\eta, \bar{\xi}) = \min \Phi(\eta, \xi) > 0$. При $\mu_0 < \min \Phi(\eta, \xi)$ решение (4.7) отсутствует. Найдем это предельное значение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{e^{-\xi/1+\sigma}}{(\eta - \xi)^2} \eta^{n-1} [\eta(n-1) - \xi n]_{\xi, \eta} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\eta^n}{(\eta - \xi)^2} e^{-\xi/1+\sigma} \left[-\frac{(\eta - \xi)}{1+\sigma} + 1 \right]_{\xi, \bar{\eta}} = 0,$$

$$\bar{\xi} = (n-1)(1+\sigma),$$

$$\bar{\eta} = n(1+\sigma),$$

$$\min \Phi = (1+\sigma)^{n-1} n^n e^{1-n}.$$

Так как кривая, проходящая через $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, в этой точке имеет $\left(\frac{d^2 Y_1}{d\tau^{*2}}\right)_{(\bar{\xi}, \bar{\eta})} = 0$, то, следовательно, за $\bar{\mu}_0$ нужно принять $\min \Phi$, тогда

$$\mu_0 = (1+\sigma)^{n-1} n^n e^{1-n}. \quad (4.9)$$

Экспоненциальная асимптотика (4.6) срывается с (4.5). Поскольку

$$\tau^* = \bar{\tau} + (1+\sigma)(n-2) \ln \beta, \quad (4.10)$$

из (4.6) следует

$$y = 1 - \left[\frac{\bar{\mu}_0}{(n-2)(1+\sigma)} \right]^{1/n-2} e^{\frac{\bar{\tau}}{(1+\sigma)(n-2)}} + \frac{\bar{\tau}}{\beta(n-1)} + \frac{\ln \beta}{\beta} \cdot \frac{(1+\sigma)(n-2)}{(n-1)}, \quad (4.11)$$

а из (4.2)

$$y_0 = 1 - \frac{1}{\beta} \left[\frac{\mu_0}{(n-2)(1+\sigma)} \right]^{\frac{1}{n-2}} e^{\frac{\tau^*}{(1+\sigma)(n-2)}} + \beta^{n-1} \left[\frac{\mu_0}{(n-2)(1+\sigma)} \right]^{\frac{n-1}{n-2}} \frac{1}{n-2} e^{\frac{\tau^*(n-1)}{(1+\sigma)(n-2)}}. \quad (4.12)$$

Тогда, если $2 < n < 3$, то необходимо положить

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \beta^{-n+2}, \quad f_2 = -\beta^{1-n} \quad (4.13)$$

во втором пограничном слое, тогда получаем

$$\mu_0 \frac{dY_2}{d\tau^*} = \frac{Y_1^n e^{-\tau^*/(1+\sigma)}}{Y_1 - \tau^*} \left\{ Y_2 \left(\frac{n}{Y_1} - \frac{1}{Y_1 - \tau^*} \right) - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right\}, \quad (4.14)$$

общее решение которого имеет вид

$$Y_2(0) = 0, \\ Y_2(\tau^*) = \text{const} + e^{I(Y_1)} - e^{I(Y_1)} \int_0^{Y_1(\tau^*)} \frac{\mu_1}{\mu_0} e^{-I} dY_1, \quad (4.15)$$

где

$$I(Y_1) = n \ln Y_1 - \int \frac{dY_1}{Y_1 - \tau^*}.$$

При $\tau^* \rightarrow +\infty$

$$Y_2(\tau^*) = \left(\text{const} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \int_0^\infty e^{-I} dY_1 \right) Y_1^{(n-1)} + \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{Y_1}{(n-2)},$$

при $\tau^* \rightarrow 0$

$$Y_2(\tau^*) = \text{const} \cdot \exp \left[\frac{\mu_0 \tau^{*-(n-1)}}{n-1} \right] \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\text{const} = 0$ и после срачивания с (4.12)

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{1}{(n-2)} \left[\int_0^\infty e^{-I(Y_1)} dY_1 \right]^{-1}. \quad (4.16)$$

Таким образом, определено двучленное разложение для скорости μ при $2 < n < 3$

$$\mu = \left(\frac{1+\sigma}{\beta} \right)^{-1+n} n^n e^{1-n} \left\{ 1 + \beta^{2-n} \frac{1}{(n-2)} \left[\int_0^\infty e^{-I(x)} dx \right]^{-1} \right\} \quad (4.17)$$

и одночленные разложения для $\frac{2}{\beta} < \frac{n}{\beta} \ll 1$

$$\mu = \left(\frac{1+\sigma}{\beta} \right)^{-1+n} n^n e^{1-n} \quad (2 < n). \quad (4.18)$$

Аналогично могут быть найдены и члены второго порядка малости при $3 < n$.

При конечных значениях β и n и при $\frac{n}{\beta} = 0(1)$ (более точно при $n > 2$ и $\gamma \approx (n-2) \ln \beta / \beta \ll 1$) необходимо из-за слабой сходимости ряда

типа (4.17) учитывать несколько членов разложения. В данной работе они не определяются.

В работе найдены разложения для поля концентрации и скорости μ при $\beta \gg 1$ для случая конечного положительного n , для случая $n/\beta = 0$ (1) необходимо отдельное исследование.

Поступила в редакцию
26/VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Новожилов. Докл. АН СССР, 1949, 141, 1, 151.
2. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. Докл. АН СССР, 1964, 157, 5, 1188.
3. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. Докл. АН СССР, 1964, 157, 6, 1148.
4. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1965, 3, 43.
5. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1965, 4, 86.
6. Б. И. Хайкин, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1966, 2, 3, 36.
7. В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1972, 5.
8. Д. А. Ваганов, С. И. Худяев. ФГВ, 1969, 5, 2, 167.
9. И. С. Любченко. Инж.-физ. ж., 1968, 14, 5.
10. А. П. Алдушин. ПМТФ, 1974, 2.
11. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк - Каменецкий. ЖФХ, 1938, 12, 1, 100.
12. F. E. Fendell. J. Fluid Mechanics, 1972, 56, 1, 81.
13. В а и - Д а й к. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
14. Д ж. Коул. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.

УДК 662.30+536.46

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА

О. Я. Романов

(Ленинград)

Возможность построения феноменологической теории нестационарного горения пороха Я. Б. Зельдовича — Б. В. Новожилова обосновывается сравнительной оценкой характерных времен процессов, протекающих при горении пороха [1]. Теория учитывает инерционность лишь прогретого слоя конденсированной фазы (к-фазы), определяемую характерным временем $t_s \sim \kappa / (u^0)^2$, где κ — температуропроводность пороха, u^0 — стационарная скорость горения, — заведомо большим, нежели характерные времена химической реакции в к-фазе t'_s , и пребывания газообразных продуктов горения в той части газовой фазы, которая влияет на скорость горения t_b . Значения последних величин определяются соотношениями

$$t'_s \sim t_s \frac{RT_s^2}{E_s(T_s - T_0)}; \quad t_b \sim \frac{l_b}{u'}$$

Здесь T — температура, E — энергия активации химической реакции в к-фазе, R — универсальная газовая постоянная, l_b — толщина зоны горения в газовой фазе, u' — средняя скорость движения газа в этой зоне, $s, 0$ — индексы поверхности и начальных значений параметров пороха.

В интервале давлений до 100 бар t_s превышает t_b не менее чем на 2 порядка; t'_s превышает t_b не менее чем на 1 порядок, в том случае,