УДК 541.24:532.5

ЗАРЯЖЕННАЯ СТРУЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. А. Шутов, А. А. Захарьян*

ГНЦ РФ. Филиал научно-исследовательского физико-химического института им. Л. Я. Карпова, 249020 Обнинск

* ГНЦ РФ. Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л. Я. Карпова, 115523 Москва

В приближении ламинарного пограничного слоя решена задача о струйном течении несжимаемой жидкости со свободными границами в электрическом поле. В классе автомодельных решений найдено точное решение для круглой струи. В случае плоской щелевой струи построено решение в виде ряда по степеням поперечной по отношению к плоскости симметрии координаты. Приведены зависимости радиуса (полуширины) от продольной координаты.

Процесс образования струй в электрическом поле является одним из источников генерации заряженных капель и волокон для различных областей в электрокаплеструйной технологии и производства высокоэффективных фильтрующих материалов [1]. Способностью образовывать протяженные струи в электрическом поле обладают преимущественно жидкости — «плохие проводники», по электрофизическим свойствам занимающие промежуточное положение между изоляторами и электролитами. Жидкости при инжектировании через капилляры под действием электрического поля могут образовывать удивительно стабильные очень тонкие струйки, непрерывные по всей длине межэлектродного промежутка, достигавшего в отдельных экспериментах метровых размеров. Как правило, используются капилляры диаметром ~ 1 мм, напряженность электрического поля $E \sim 10^5$ В/м и выше, получающиеся струи имеют диаметр 100–0,1 мкм, их удельная объемная плотность заряда может достигать сотен Кл/м^3 [2, 3]. В данной работе для описания подобных течений использованы уравнения типа погранслоя, процедура получения которых здесь не связана с предположением о значительности величины числа Рейнольдса. Далее ограничимся рассмотрением движений в приближении «вмороженного» заряда, т. е. при больших значениях электрического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_q = V/(bE) \gg 1$, где V — характерная скорость, b — подвижность зарядов, E — напряженность электрического поля [4, 5].

Объемно заряженная круглая струя. Рассмотрим стационарную осесимметричную струю с объемной плотностью заряда $\gamma = \mathrm{const}$ в однородном электрическом поле E, параллельном оси z. Уравнение движения

$$\rho \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \gamma \mathbf{E} \tag{1}$$

в безразмерном виде содержит параметр $s = \rho Q^2/(2\pi^2 \gamma E r_0^5) = \rho Q^3/(2\pi^2 I E r_0^5)$. Здесь V — скорость жидкости в струе; ρ, μ — плотность и вязкость; Q — объемный расход жидкости; r_0 — начальный радиус струи; $I = \gamma Q$ — полный электрический ток, переносимый струей. В случае сильных полей ($s \ll 1$), который будет рассмотрен ниже, уравнения можно упростить следующим образом. Положим, что вид уравнения непрерывности $\partial(rv)/r\partial r + \partial u/\partial z = 0$ и вид кинематического условия для функции тока на свободной поверхности $\psi(z, r = f) = Q/2\pi$, которое служит для определения неизвестной границы $r = f(z)$, не зависят от следующего преобразования параметров: $z \to z$, $r \to g_1(s)r$, $u \to g_2(s)u$, $v \to g_3(s)v$, где u и v — продольная и поперечная скорости соответственно. Тогда имеется следующая связь между функциями: $g_3 = g_1 g_2$, $g_2 g_1^2 = 1$. Предполагаем, что так же, как в теории ламинарного пограничного слоя, движение жидкости в слое или струе, совершаемое преимущественно в продольном направлении ($v \ll u$), обусловлено вязкостной передачей продольного импульса в поперечном направлении. Тогда из условия равенства порядка по s инерционного, вязкостного и электрического членов в z-проекции уравнения (1) имеем $g_1 \sim s^{1/4}$, $g_2 \sim s^{-1/2}$, $g_3 \sim s^{-1/4}$. Вклад давления p, пропорциональный капиллярному давлению $p_T = T/f$ и имеющий порядок $s^{-1/4}$, мал по сравнению с главными членами, порядок которых s^{-1}. Таким образом, преобразование $z \to z$, $r \to s^{1/4}r$, $u \to s^{-1/2}u$, $v \to s^{-1/4}v$ и выделение старших по степеням s^{-1} слагаемых в уравнениях Навье — Стокса приводит к уравнениям

$$u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2s}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}ru + \frac{\partial}{\partial r}rv = 0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$v(z, r = 0) = 0; \tag{4}$$

$$\psi(z, r = f) = 1/2; \tag{5}$$

$$f(z = 0) = 1. \tag{6}$$

Эти соотношения записаны в безразмерном виде, где для длин, скоростей и функции тока выбраны масштабы r_0, $Q/(\pi r_0^2)$, Q/π ($\mathrm{Re} = \rho Q/(\pi r_0 \mu)$). Подобная процедура получения стандартных уравнений пограничного слоя использована в [4]. Определяя ψ соотношениями $u = \partial\psi/r\partial r$, $v = -\partial\psi/r\partial z$ и полагая, что $\psi(z, r) = \Phi(\xi)z$, где $\xi = r^2/\sqrt{z}$, получаем из (2) уравнение для определения Φ:

$$8(\xi\Phi'')'/\mathrm{Re} + 4\Phi\Phi'' - 2\Phi'^2 + 1/2s = 0 \tag{7}$$

(штрих обозначает дифференцирование по ξ). Решение уравнения (7) в виде ряда по целым степеням аргумента, которое вследствие условия (4) начинается с линейного слагаемого, обрывается на третьем члене, причем для нетривиальных коэффициентов функции $\Phi = a_1\xi + a_2\xi^2$ имеет место соотношение $16a_2/\mathrm{Re} - 2a_1^2 + 1/2s = 0$. Подставляя это решение в (5), находим зависимость радиуса струи от продольной координаты:

$$f(z) = \sqrt{\frac{a_1\sqrt{z}}{2a_2}}\sqrt{\sqrt{1 + \frac{2a_2}{a_1^2 z}} - 1}. \tag{8}$$

Из условия (6) находим $a_2 = 1/2$, следовательно,

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{4s} + \frac{4}{\mathrm{Re}}}.$$

При $z \gg 1$ и $s \ll \mathrm{Re}/16$ получаем из (8) выражение для радиуса:

$$f(z) = (s/z)^{1/4}, \tag{9}$$

которое в размерном виде не зависит от начального радиуса и вязкости жидкости.

Поверхностно заряженная круглая струя. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей осуществляется через границу струи: в касательном направлении на единицу площади поверхности действует сила σE, в нормальном — $\sigma^2/2\varepsilon_0$ в пренебрежении диэлектрическим слагаемым (σ — поверхностная плотность зарядов, ε_0 — диэлектрическая постоянная) [6]. В соответствии с условием постоянства электрического тока «вмороженных» зарядов в деформируемом объеме имеем $\sigma \sim f(z)$. По мере сужения струи σ падает, поэтому нормальное воздействие на ее границу, являясь квадратичной функцией σ, может создавать доминирующее в общем балансе взаимодействий поле давлений лишь в непосредственной близости от точки инжекции жидкости. Ниже по течению динамика определяется переносом продольного импульса поперек струи от границы к оси. Аналогичный механизм развития течения путем релаксации продольного импульса вглубь жидкости имеет место в затопленной струе, в которой, в отличие от рассматриваемого случая, вязкий перенос импульса идет в противоположном направлении — от оси к периферии. Рассмотрим уравнения ламинарного пограничного слоя (2), (3) при $\gamma = 0$, используемые обычно в теории затопленных струй [7, 8], с соотношениями (4), (5) и граничным условием для касательных натяжений. Последнее получаем из следующих соображений. Для сохраняющегося электрического тока I имеем $I = \sigma 2\pi f v_\tau = 2\sigma Q/f$, где v_τ — скорость граничной линии тока. Подставляя σ в касательное условие $\mu(\partial u/\partial r + \partial v/\partial z) = \sigma E$ и выделяя главные по s слагаемые, получим следующее граничное условие в тангенциальном направлении:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mathrm{Re}}{4s} \qquad \text{при} \quad r = f(z). \tag{10}$$

Решение задачи (2)–(4), (10) при $\gamma = 0$ находится в ограниченной по поперечной координате радиусом струи области $r \leqslant f(z)$, $0 \leqslant z < \infty$, где $f(z)$ также должна быть определена в процессе решения. Использованная выше процедура определения $\psi = \Phi(\xi)z$, $\xi = r^2/\sqrt{z}$ дает для поверхностно заряженной струи выражения:

$$\Phi(\xi) = c_1\xi + c_2\xi^2, \quad c_1 = 1/\sqrt{4s}, \quad c_2 = \mathrm{Re}/32s, \quad f(z) = \left(\frac{64sz}{\mathrm{Re}^2}\right)^{1/4}\sqrt{\sqrt{1+\frac{\mathrm{Re}}{4z}}-1}. \tag{11}$$

Зависимость (11) при $z \gg \mathrm{Re}/4$ совпадает с (9). Соотношения (9), (11) хорошо согласуются с экспериментальными профилями в области, удаленной от точки инжекции жидкости [9, 10], в то же время они неверно передают координатную зависимость радиуса струи вблизи начала координат. Последнее обусловлено тем, что в этой области существенна роль омической составляющей в общем потоке зарядов, и, следовательно, несправедливо предположение о вмороженности зарядов.

Плоская поверхностно заряженная струя. Постановка струйной задачи для жидкости, вытекающей из плоскопараллельной щели, расположенной в плоскости yz, аналогичная постановке для круглой струи, представляется в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{13}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\mathrm{Re}}{s} f \qquad \text{при} \quad y = f(x); \tag{14}$$

$$v(x, y = 0) = 0; \tag{15}$$

$$\psi(x, y = f(x)) = 1, \qquad |y| \leqslant f(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty, \tag{16}$$

где длины, скорости, функция тока обезразмерены величинами L, q/L, q соответственно; u, v — скорости в продольном (x) и поперечном (y) направлениях; L — единица длины в z-направлении. Величины $q = \Delta Q/L$, $i = \Delta I/L$ представляют удельный расход, ток на единицу длины, где ΔQ и ΔI — объемный расход и электрический ток вдоль полосы шириной L, вырезанной из струи двумя плоскостями, перпендикулярными оси z. Предполагается, что скорости от координаты z не зависят, поле E направлено вдоль оси x, $f(x)$ — полутолщина струи, $\mathrm{Re} = \rho q/\mu$, $s = \rho q^3/(iEL^3)$. Граничное условие (14) записано в виде предельного перехода в связи с предположением о чисто конвективном переносе заряда, которое выполняется тем точнее, чем дальше от начала координат расположен элемент струи. Так же, как в осесимметричной задаче, ищем такое решение, которое для u дает растущее по продольной координате выражение. Решение задачи (12)–(16) строим в виде степенного ряда по поперечной координате: $u = \sum\limits_0 b_n y^n$, где b_n — функция только x. Воспользуемся симметрией скорости $u(x,y) = u(x,-y)$, тогда в разложении u присутствуют только четные степени y. Скорости, удовлетворяющие уравнению непрерывности (13) и условию (15), запишем следующим образом:

$$u = \sum_0 b_{2n} y^{2n}, \qquad v = -\sum_0 b'_{2n}(x) y^{2n+1}/(2n+1).$$

Подстановка этих выражений в (12) и выделение членов при одинаковых степенях y приводит к бесконечной системе уравнений, которая для первых четырех функций b_n имеет вид

$$b_0 b'_0 = \frac{b''_0 + 2b_2}{\mathrm{Re}}, \qquad b_0 b'_2 - b'_0 b_2 = \frac{b''_2 + 12b_4}{\mathrm{Re}}, \qquad b_0 b'_4 - 3b'_0 b_4 + b_2 b'_2/3 = \frac{b''_4 + 30b_6}{\mathrm{Re}}. \tag{17}$$

Эта система устроена так, что при последовательном добавлении к ней новых уравнений в текущий список подлежащих определению функций b_n каждый раз вносится только одно новое неизвестное. Это значительно упрощает процедуру решения системы (17). Действительно, подставляя скорости в (14), имеем

$$\lim_{x\to\infty}[2b_2 - b''_0 + (4b_4 - b''_2/3)f^2 + (6b_6 - b''_4/5)f^4 + \ldots] = \mathrm{Re}/s. \tag{18}$$

Как показано ниже, $f(x)$ и все коэффициенты b_n, кроме b_0, являются убывающими функциями x, тогда из (18) получаем

$$2b_2 - b''_0 = \mathrm{Re}/s. \tag{19}$$

Исключая b_2 из (19) и первого уравнения системы (17), получим соотношение для определения b_0:

$$b_0 b'_0 = \frac{2b''_0 + \mathrm{Re}/s}{\mathrm{Re}}.$$

Проинтегрировав его, имеем $b'_0 - \alpha b_0^2 + \beta x = 0$, где $\alpha = \mathrm{Re}/4$, $\beta = \mathrm{Re}/2s$. Замена переменных $b_0 = -g'/\alpha g$, $t = (\alpha\beta)^{1/3}x$ преобразует это уравнение в $g'' - gt = 0$, решением которого являются функции Эйри $g = c_1 Ai(t) + c_2 Bi(t)$ [11]. Поскольку $Bi(t)$ приводит к замедляющемуся течению, то константа $c_2 = 0$. Возвращаясь к переменным b_0, x, получим

$$b_0 = \sqrt{\frac{\beta x}{\alpha}} \frac{K_{2/3}(\eta)}{K_{1/3}(\eta)},$$

где K_m — функция Макдональда m-го порядка; $\eta = 2(\alpha\beta)^{1/2}x^{3/2}/3$. Все остальные коэффициенты b_n определяются простым дифференцированием соответствующих выражений, в частности, b_2 находим с помощью (19), b_4 вычисляется из второго уравнения системы

(17) и т. д. Представление о поведении b_n при больших x дают первые члены разложения соответствующих функций:

$$b_0 = \sqrt{\beta x/\alpha} - 1/2\alpha x, \quad b_2 = \mathrm{Re}/2s - \sqrt{\beta/64\alpha x^3}, \quad b_4 = \frac{\mathrm{Re}^2}{48s}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha x}}.$$

Отметим, что зависимость $u = \sqrt{x}(1 + \mathrm{const} \cdot y^2/\sqrt{x})$ аналогична соответствующей зависимости для круглой струи, в то время как асимптотический профиль в плоском случае $f(x) = \sqrt{s/2x}$ убывает по продольной координате быстрее, чем для круглой струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петрянов И. В., Козлов В. И., Басманов П. И., Огородников Б. И.** Волокнистые фильтрующие материалы. М.: Знание, 1968.
2. **Попов С. И., Петрянов И. В.** К механизму электростатического распыления жидкостей // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 893–895.
3. **Кириченко В. Н., Шепелев А. Д., Полевов В. Н.** Удельный заряд жидкости в процессах ЭГД распыления и формования микроволокон // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315, № 4. С. 819–823.
4. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1983.
5. **Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е.** Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 2. С. 31–45.
6. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
7. **Мартыненко О. Г., Коровкин В. Н., Соковишин Ю. А.** Теория ламинарных вязких струй. Минск: Наука и техника, 1985.
8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
9. **Baumgarten P. K.** Electrostatic spinning of acrylic microfibers // J. Colloid and Interface Sci. 1971. V. 36, N 1. P.71-79.
10. **Шутов А. А.** Форма несжимаемой слабопроводящей струи в сильном электрическом поле // ПМТФ. 1991. № 2. С. 20–25.
11. **Справочник** по специальным функциям / Под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 4/IV 1996 г.,
в окончательном варианте — 28/XI 1996 г.