

тельно изменяет возмущения течения впереди источника и определяет формирование волн за ним. Отметим, что вклад внутренних волн по амплитуде в ближней области за источником сравним с величинами возмущений в области над источником.

Итак, в поле возмущений скорости в стратифицированной жидкости можно выделить две области: вблизи от генератора волн доминируют эффекты, связанные с его обтеканием, как и в однородной жидкости, а с удалением от источника за ним поле возмущенных скоростей формируется внутренними волнами, обусловленными своим существованием стратификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане. — Севастополь, 1983.
2. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). — М.: Наука, 1970.
3. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.
4. Санников В. Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // ПММ. — 1986. — Т. 50, вып. 6.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
6. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Дж. Келлера и Дж. Пападикаса. — М.: Мир, 1980.

г. Севастополь

Поступила 23/1 1989 г.

УДК 532.135

В. И. Найденов, А. Д. Полянин

О НЕКОТОРЫХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ

1. Известно, что динамическая вязкость жидкостей μ существенным образом зависит от температуры (чем больше T , тем меньше μ), а остальные параметры меняются слабо.

Для очень вязких жидкостей (типа глицерина) обычно используется экспоненциальная зависимость [1]

$$(1.1) \quad \mu = \mu_0 \exp \{-\beta(T - T_0)\}$$

(μ_0 , β , T_0 — эмпирические постоянные). Для обычных жидкостей (типа воды) кривая зависимости вязкости от температуры имеет более пологий характер и во многих случаях может быть описана степенной функцией [2]

$$(1.2) \quad \mu = \mu_0(T_0/T)^m, \quad m \geq 0.$$

Выражение (1.2) в определенных температурных диапазонах при соответствующих значениях показателя m хорошо аппроксимирует известную функцию Я. И. Френкеля [3].

Отметим, что неизотермические прямолинейные течения жидкости в трубах с учетом диссипативного нагрева и зависимости вязкости от температуры рассматривались в [4—6]. В этих задачах градиент температуры вдоль стенок и конвективный перенос тепла отсутствовали. В [7, 8] исследовались некоторые гидродинамические задачи с градиентом температуры вдоль стенок трубы, когда важную роль играет конвективный перенос тепла. При этом считалось, что вязкость экспоненциальным образом зависит от температуры.

Данная работа обобщает результаты [7, 8] по нескольким направлениям: во-первых, рассматриваются сразу обе зависимости (1.1) и (1.2); во-вторых, исследуются нееньютоновские жидкости, кажущаяся вязкость которых произвольным образом зависит от квадратичного инварианта тензора скоростей деформации; в-третьих, в модельной задаче о неизотермическом течении в пористой среде анализируется устойчивость полученного стационарного решения.

2. Движение жидкости в пористой среде. Простейшая модель медленного неизотермического течения несжимаемой жидкости в однород-

ной пористой среде описывается уравнениями

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu(T)} \nabla p, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3);$$

$$(2.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

$$(2.3) \quad \partial T / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) T = \kappa \Delta T,$$

где v_1, v_2, v_3 — компоненты скорости жидкости в декартовой системе координат x, y, z ; p — давление; κ — коэффициент теплопроводности; k — проницаемость грунта; t — время.

В уравнениях движения (2.1) опущены нестационарные члены. Указанное приближение справедливо для большинства реальных систем [9, 10].

Рассмотрим прямолинейное

$$(2.4) \quad v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = w(t, x, y)$$

течение в трубе, стенки которой поддерживаются при температуре, экспоненциально меняющейся с продольной координатой z :

$$(2.5) \quad T|_S = T_0 e^{-\lambda z}$$

(S — контур поперечного сечения трубы). Считая, что вязкость степенным образом зависит от температуры (1.2), ищем частные решения системы (2.1) — (2.3) с учетом (2.4), (2.5) в виде

$$(2.6) \quad T = T_0 e^{-\lambda z} f, w = \frac{k}{\mu_0} \frac{p_*}{h} f^m, \frac{dp}{dz} = -\frac{p_*}{h} e^{\lambda m z}.$$

Здесь h — характерный размер поперечного сечения трубы; p_* — постоянная величина, выбранная за масштаб давления. Подставляя выражения (2.6) в (2.3) и (2.5) (уравнения (2.1), (2.2) в силу (2.4), (2.6) удовлетворяются автоматически), получим уравнение и граничное условие для неизвестной функции f :

$$(2.7) \quad \partial f / \partial \tau = \partial^2 f / \partial \xi^2 + \partial^2 f / \partial \eta^2 + \Lambda^2 f + P f^{m+1};$$

$$(2.8) \quad f|_S = 1$$

$$(\tau = \kappa t / h^2, \xi = x / h, \eta = y / h, \Lambda = \lambda h, P = k \lambda h p_* / (\mu_0 \kappa)).$$

Исследуем симметричное относительно средней линии $x = 0$ течение в плоском канале шириной $2h$ ($-h \leq x \leq h$). В этом случае $\partial^2 / \partial \eta^2 = 0$ и достаточно рассмотреть область $0 \leq \xi \leq 1$. Учитывая сказанное, из (2.7), (2.8) имеем

$$(2.9) \quad \partial f / \partial \tau = \partial^2 f / \partial \xi^2 + \Lambda^2 f + P f^{m+1};$$

$$(2.10) \quad \xi = 0: \partial f / \partial \xi = 0; \xi = 1: f = 1.$$

Стационарное движение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением и граничными условиями

$$(2.11) \quad \bar{f}''_{\xi\xi} + \Lambda^2 \bar{f} + P \bar{f}^{m+1} = 0, \bar{f}'_{\xi}(0) = 0, \bar{f}(1) = 1.$$

Точное решение задачи (2.11) можно записать в неявном виде

$$(2.12) \quad \int_{1/f_0}^{\bar{f}/f_0} \left[\frac{2P}{m+2} f_0^m (1-u^{m+2}) + \Lambda^2 (1-u^2) \right]^{-1/2} du = 1 - \xi,$$

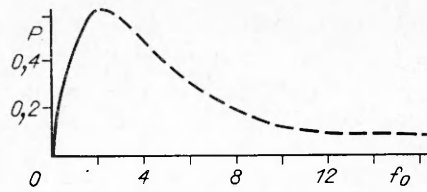
где $f_0 = \bar{f}(0)$ — температура на оси канала, которая определяется из решения трансцендентного уравнения

$$(2.13) \quad \int_{1/f_0}^1 \left[\frac{2P}{m+2} f_0^m (1-u^{m+2}) + \Lambda^2 (1-u^2) \right]^{-1/2} du = 1.$$

Из второго соотношения (2.6) вытекает, что f_0 степенным образом зависит от максимальной скорости течения: $f_0 \sim [w(0)]^{1/m}$.

При $m = 2$ выражение (2.12) можно записать через эллиптические интегралы следующим образом:

$$F(\varphi_0, f_0/c) - F(\varphi, f_0/c) = c(P/2)^{1/2}(1-\xi).$$



Р и с. 1

Здесь $\cos \varphi_0 = 1/f_0$; $\cos \varphi = 1/f$; $c = \sqrt{1 + f_0^2 + 2\Lambda^2 P^{-1}}$; F — неполный эллиптический интеграл первого рода [11]. При заданных P и Λ параметр $f_0 = f_0(P, \Lambda)$ находится из трансцендентного уравнения $F(\varphi_0, f_0/c) = c(P/2)^{1/2}$.

Фиксируя параметр $\Lambda \geq 0$, рассмотрим качественные особенности зависимости температуры на оси канала f_0 от безразмерного давления P . Из уравнения (2.13) вытекает, что $f_0 \rightarrow 1$ соответствует $P \rightarrow 0$. С другой стороны, при $f_0 \rightarrow \infty$ также $P \rightarrow 0$. Поэтому существует P_{\max} такое, что при $P > P_{\max}$ решения нелинейной краевой задачи (2.11) не существует, а при $0 < P < P_{\max}$ имеет место неединственность — каждому $P \in (0, P_{\max})$ отвечают два решения с разными температурами на оси канала. На одной ветви решения $dP/df_0 < 0$ (перепад давления уменьшается с ростом скорости течения), на другой $dP/df_0 > 0$ (перепад растет с увеличением скорости жидкости). На рис. 1 показана зависимость $P(f_0)$ при $\Lambda = 0$, что соответствует предположению малости аксиальной теплопроводности по сравнению с конвективным переносом тепла (здесь и на рис. 2, 3 штриховая линия — неустойчивые режимы).

Покажем, что стационарное решение неустойчиво при $dP/df_0 < 0$. Пусть $f = \bar{f} + \varepsilon$ (\bar{f} — стационарное решение (2.11), а $\varepsilon = \varepsilon(\tau, \xi)$ — возмущение решения). При малых ε , линеаризуя (2.9) в окрестности стационарного решения, получим

$$(2.14) \quad \partial \varepsilon / \partial \tau = \partial^2 \varepsilon / \partial \xi^2 + \Lambda^2 \varepsilon + (m+1)P\bar{f}^m \varepsilon.$$

Решение уравнения (2.14) ищем в виде

$$(2.15) \quad \varepsilon = \omega(\xi) e^{\beta_n \tau}.$$

Подставляя (2.15) в (2.14) с учетом (2.10), для определения показателя β_n имеем спектральную задачу

$$(2.16) \quad \omega''_{\xi\xi} + [(m+1)P\bar{f}^m + \Lambda^2 - \beta_n] \omega = 0, \quad \omega'_\xi(0) = 0, \quad \omega(1) = 0.$$

Спектральные свойства уравнения (2.16) хорошо известны [12, 13]. Существует дискретный спектр собственных значений; при этом собственная функция, принадлежащая наименьшему собственному значению β_0 , не меняет знак на интервале $(0, 1)$.

Дифференцируя уравнение (2.11) по f_0 и обозначая $\psi = d\bar{f}/df_0$, запишем

$$(2.17) \quad \psi''_{\xi\xi} + \Lambda^2 \psi = -(m+1)P\bar{f}^m \psi - \frac{dP}{df_0} \bar{f}^{m+1}.$$

Умножим уравнение (2.17) на собственную знакопостоянную функцию ω_0 задачи (2.16). Проинтегрируем далее найденное выражение по ξ от 0 до 1 с учетом равенств

$$\begin{aligned} \omega_0 \psi''_{\xi\xi} &= (\omega_0 \psi'_\xi - \omega'_0 \psi)_\xi + \omega''_{0\xi\xi} \psi = (\omega_0 \psi'_\xi - \omega'_0 \psi)_\xi + \\ &+ [\beta_0 - \Lambda^2 - (m+1)P\bar{f}^m] \omega_0 \psi. \end{aligned}$$

В результате приходим к соотношению

$$(2.18) \quad \beta_0 \int_0^1 \omega_0 \psi d\xi = - \frac{dP}{df_0} \int_0^1 \bar{f}^{m+1} \omega_0 d\xi,$$

при выводе которого были использованы граничные условия для функции ω (2.16) и функции ψ : $\psi_{\xi}(0) = 0$, $\psi(1) = 0$.

Так как ω_0 знакопостоянна при $0 \leq \xi \leq 1$, $\bar{f} \geq 0$ и $\psi \geq 0$ (температура жидкости растет с увеличением температуры на оси канала), то знак β_0 противоположен знаку производной dP/df_0 . Поэтому при $dP/df_0 < 0$ имеем $\beta_0 > 0$, т. е. соответствующее решение неустойчиво, что и требовалось доказать. При $dP/df_0 > 0$ $\beta_0 < 0$ и стационарное решение устойчиво относительно малых возмущений.

Аналогичным образом рассматривается более общий случай, когда проницаемость грунта зависит от давления $k = k(p, |\nabla p|)$. Частное решение для температуры T ищется в виде (2.6), а уравнение для функции f будет тем же самым (2.7). Отметим, что стационарное неизоэотермическое движение в пористой среде для линейного изменения температуры стенки при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры (1.1) изучалось в [8].

3. Неньютоновская жидкость. Исследуем неизоэотермические течения неньютоновских жидкостей, свойства которых описываются реологическим уравнением

$$(3.1) \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + Fe_{ij}, \quad e_{ij} = \partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i,$$

где τ_{ij} — компоненты тензора вязких напряжений ($i, j = 1, 2, 3$); δ_{ij} — символ Кронекера; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; $v_1 \equiv u$, $v_2 \equiv v$, $v_3 \equiv w$ — компоненты скорости жидкости в декартовой системе координат $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Считаем, что F в (3.1) имеет следующую структуру:

$$(3.2) \quad F = \mu(T)f(I_2).$$

Здесь f — произвольная функция второго (квадратичного) инварианта тензора скоростей деформации

$$(3.3) \quad I_2 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

В частности, для степенной жидкости в (3.2) надо положить $f(I_2) = I_2^{(n-1)/2}$ (значение $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости); модель Эллиса характеризуется зависимостью $f(I_2) = A + BI_2^{(n-1)/2}$, где $A, B = \text{const}$ [14].

Как и ранее, предполагаем, что аналог вязкости — консистенция среды μ — экспоненциальная или степенная функция температуры.

Стационарные неизоэотермические течения неньютоновских несжимаемых жидкостей, подчиняющихся реологическому закону (3.1), (3.2), описываются уравнениями

$$(3.4) \quad \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(F \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$(3.5) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3);$$

$$(3.6) \quad (\mathbf{v} \nabla) T = \kappa \Delta T.$$

Здесь по повторяющемуся индексу i ведется суммирование; ρ — плотность жидкости. Частные решения системы (3.4) — (3.6) ищем в виде

$$(3.7) \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = w(x), \quad p = p(x, z), \quad T = T(x, z),$$

что отвечает прямолинейному течению в плоском канале. Тогда инерционные члены в левой части уравнений движения (3.4) тождественно равны нулю, а уравнение неразрывности (3.5) удовлетворяется автоматически. Учитывая сказанное и используя обозначение $w_x' = dw/dx$, из (3.4) — (3.6) имеем

$$(3.8) \quad \partial p / \partial x = w_x' \partial F / \partial z;$$

$$(3.9) \quad \partial p / \partial z = (\partial / \partial x) (F w_x');$$

$$(3.10) \quad w(x) \partial T / \partial z = \kappa (\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial z^2).$$

Исключая из (3.8), (3.9) перекрестным дифференцированием давление, получим

$$(3.11) \quad (\partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial x^2)(Fw_x') = 0.$$

Общее решение уравнения (3.11) записывается как

$$(3.12) \quad Fw_x' = \Phi(z+x) + \Psi(z-x)$$

(Φ и Ψ — произвольные функции).

Из выражений (3.2), (3.3), (3.7) вытекает, что $F = \mu(T)f(w_x'^2)$. Учитывая сказанное, положим в формуле (3.12) $\Phi(\xi) = -Ae^{\alpha\xi}$, $\Psi(\xi) = Be^{\alpha\xi}$ (A, B, α — произвольные постоянные). В результате для скорости и температуры жидкости находим уравнения

$$(3.13) \quad \mu(T)f(w_x'^2)w_x' = e^{\alpha z}(-Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x});$$

$$(3.14) \quad w(x)\partial T/\partial z = \kappa(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial z^2),$$

которые понадобятся далее.

4. Точные решения для экспоненциальной зависимости консистенции среды от температуры. Пусть консистенция μ экспоненциально уменьшается с температурой по закону (1.1). Частное решение уравнений (3.13), (3.14) ищем в виде

$$(4.1) \quad w = w(x), T = T_0 - \frac{\alpha}{\beta}z + \frac{\alpha}{\beta\kappa}\theta(x),$$

что приводит к системе для неизвестных функций w и θ :

$$(4.2) \quad f(w_x'^2)w_x' = \frac{1}{\mu_0} \exp\left(\frac{\alpha}{\kappa}\theta\right)[-A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)];$$

$$(4.3) \quad w = -\theta_{xx}''.$$

Для ньютоновской жидкости, что соответствует $f \equiv 1$, уравнения (4.2), (4.3) выведены в [7].

Исключая w из (4.2), (4.3), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для температурной составляющей θ :

$$(4.4) \quad f(|\theta_{xxx}'''|^2)\theta_{xxx}''' = \frac{1}{\mu_0} \exp\left(\frac{\alpha}{\kappa}\theta\right)[A \exp(\alpha x) - B \exp(-\alpha x)].$$

Для степенной жидкости, что отвечает $f(w_x'^2) = |w_x'|^{n-1}$, уравнение (4.4) при $w_x' \leq 0$ после элементарных преобразований запишем в виде

$$(4.5) \quad \theta_{xxx}''' = \exp\left(\frac{\alpha\theta}{\kappa n}\right)\left[\frac{A}{\mu_0} \exp(\alpha x) - \frac{B}{\mu_0} \exp(-\alpha x)\right]^{1/n}.$$

При $n = 1$ прямой проверкой можно убедиться, что функция

$$(4.6) \quad \theta = \frac{\kappa}{\alpha} \ln \frac{24\alpha^2 \kappa \mu_0 AB}{(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})^3}$$

является точным (частным) решением уравнения (4.5).

Покажем теперь, что для любого значения n уравнение (4.5) при $A = 0, B \neq 0$ или $A \neq 0, B = 0$ может быть сведено к уравнению Блазиуса, которое описывает гидродинамический пограничный слой на плоской пластине.

Действительно, при $A \neq 0, B = 0$ (случай $A = 0, B \neq 0$ рассматривается аналогичным образом) замена

$$(4.7) \quad \zeta = \frac{\alpha}{\kappa n}\theta + \frac{\alpha}{n}x$$

приводит (4.5) к уравнению, которое не зависит явно от x :

$$(4.8) \quad \zeta_{xxx}''' = -ae^{\zeta}, a = -\frac{\alpha}{\kappa n} \left(\frac{A}{\mu_0} \right)^{1/n}.$$

Сделаем в (4.8) подстановку

$$(4.9) \quad g = -\zeta_x'.$$

В результате

$$(4.10) \quad g_{xx}'' = ae^{\zeta}.$$

Дифференцируя теперь обе части этого выражения по x , имеем $g_{xxx}''' = ae^{\zeta} \zeta_x'$. Исключая отсюда с помощью (4.9), (4.10) функции ζ_x' и e^{ζ} , выводим уравнение для g :

$$(4.11) \quad g_{xxx}''' + gg_{xx}'' = 0.$$

Оно часто встречается в теории гидродинамического пограничного слоя [15] и сводится, как и (4.7), к уравнению первого порядка. В [16] установлено, что у (4.11) (а следовательно, и у исходного уравнения (4.5)) для некоторых граничных условий может быть неединственное решение. Имея частное решение g уравнения (4.11), можно найти частное решение уравнения (4.8) при $A \neq 0$, $B = 0$ по формуле

$$(4.12) \quad \theta = \frac{\kappa n}{\alpha} \ln \left(\frac{g_{xx}''}{a} \right) - \kappa x,$$

которая является следствием соотношений (4.7) и (4.10). Например, (4.11) допускает решение $g = 3(x+C)^{-1}$ (C — произвольная постоянная). С учетом этого из (4.12), находим частное решение уравнения (4.5) при $B = 0$:

$$\theta = \frac{\kappa n}{\alpha} \ln \left[\frac{6}{a(x+C)^3} \right] - \kappa x.$$

Обозначим через $g = g^{(B)}(x)$ решение Блазиуса, удовлетворяющее уравнению (4.11) и граничным условиям $g(0) = g_x'(0) = 0$, $g_x'(\infty) = 1$, затабулированное, например, в [15]. Используя групповое свойство (4.11), легко показать, что двухпараметрическое семейство функций $g = \lambda g^{(B)}(\lambda x + \sigma)$ (λ и σ — произвольные постоянные) есть решение (4.11). Подставляя эту зависимость в (4.12), получим четырехпараметрическое семейство решений для профиля температуры.

5. Точные решения для степенной зависимости консистенции среды от температуры. Рассмотрим теперь степенной закон изменения консистенции среды от температуры (1.2). Частные решения уравнений (3.13), (3.14) ищем в виде

$$(5.1) \quad w = w(x), T = T_0 e^{-\alpha z/m} \varphi(x).$$

В результате для определения функций w и φ имеем систему

$$(5.2) \quad \mu_0 \varphi^{-m} f(w_x') w_x' = -Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

$$(5.3) \quad -\frac{\alpha}{m} w \varphi = \kappa \left(\varphi_{xx}'' + \frac{\alpha^2}{m^2} \varphi \right).$$

Из уравнения (5.3) следует

$$(5.4) \quad w_x' = -\frac{\kappa m}{\alpha} (\varphi_{xx}''/\varphi)_x.$$

Исключая из (5.2) производную w_x' , с помощью (5.4) выводим уравнение третьего порядка для φ . Для ньютоновской жидкости, что соответствует $f \equiv 1$, это уравнение записывается в виде

$$(5.5) \quad (\varphi_{xx}''/\varphi)_x = \frac{\alpha}{m \kappa \mu_0} \varphi^m (Ae^{\alpha x} - Be^{-\alpha x}).$$

Прямой проверкой можно показать, что у уравнения (5.5) есть частное решение

$$(5.6) \quad \varphi = \gamma(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})^{-3/m}, \quad \gamma = [24AB\alpha^2\kappa\mu_0(m+3)/m]^{1/m}.$$

Для степенной жидкости при $w_x' \leq 0$ из (5.2), (5.4) получим

$$(5.7) \quad (\varphi_{xx}''/\varphi)'_x = \frac{\alpha}{\kappa m} \varphi^{m/n} \left(\frac{A}{\mu_0} e^{\alpha x} - \frac{B}{\mu_0} e^{-\alpha x} \right)^{1/n}.$$

Рассмотрим течение в узком канале, что отвечает $\alpha x \ll 1$. При $A = B$ (5.7) принимает вид

$$(5.8) \quad (\varphi_{xx}''/\varphi)'_x = qx^{1/n} \varphi^{m/n}, \quad q = \frac{\alpha}{\kappa m} \left(\frac{2\alpha A}{\mu_0} \right)^{1/n}$$

и допускает частное решение

$$\varphi = Cx^v, \quad v = -\frac{3n+1}{m}, \quad C = \left[\frac{q}{2v(v-1)} \right]^{n/(n-m)}.$$

При $A \neq B$ из (5.7) для $\alpha x \ll 1$ находим

$$(5.9) \quad (\varphi_{xx}''/\varphi)'_x = \lambda \varphi^{m/n}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\kappa m} \left(\frac{A-B}{\mu_0} \right)^{1/n}.$$

Переходя к новым переменным

$$(5.10) \quad s = \varphi^2, \quad u = (\varphi_x')^2,$$

понижим порядок уравнения (5.9). В результате приходим к уравнению Эмдена — Фаулера $u_{ss}'' = \frac{1}{2} \lambda s^{(m-n)/2n} u^{-1/2}$, которое интегрируется в квадратурах, например, при $n = m$ и $m = 3n$ [17].

6. Некоторые задачи о неизоотермических течениях в плоских каналах. Используя выведенные в п. 4, 5 уравнения, сформулируем теперь конкретные задачи о неизоотермических течениях в плоских каналах шириной $2h$ ($-h \leq x \leq +h$). Для симметричных течений относительно оси канала с учетом условия прилипания жидкости на стенке имеем три граничных условия:

$$(6.1) \quad x = 0, \quad \partial w/\partial x = 0; \quad x = h, \quad \partial T/\partial x = 0; \quad x = h, \quad w = 0.$$

Считаем также, что задан расход жидкости Q , который интегрально связан с w :

$$(6.2) \quad Q = 2 \int_0^h w(x) dx.$$

Устремляя в (3.13) поперечную координату x к нулю и используя первое условие (6.1), получим связь между коэффициентами A и B :

$$(6.3) \quad A = B.$$

Случай 1. Пусть на стенке канала температура линейно уменьшается с координатой z по закону

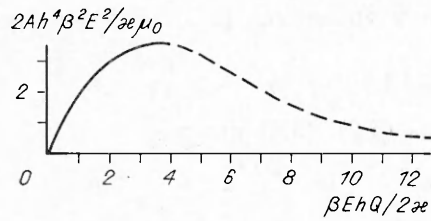
$$(6.4) \quad x = h, \quad T = T_0 - Ez,$$

а консистенция экспоненциальным образом зависит от температуры (1.1) (E — градиент температуры вдоль стенок).

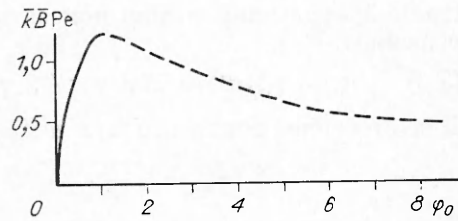
Скорость и температуру жидкости ищем в виде (4.1) при $\alpha = \beta E$, где w и θ удовлетворяют системе уравнений (4.2), (4.3). Используя граничные условия (6.1), (6.4) и связь (6.3), после исключения w приходим к следующей задаче для определения функции θ :

$$(6.5) \quad f(|\theta_{xxx}'''|^2) \theta_{xxx}''' = \frac{2A}{\mu_0} \exp\left(\frac{\beta E}{\kappa} \theta\right) \text{sh}(\beta E x);$$

$$(6.6) \quad x = 0, \theta_x' = 0; \quad x = h, \theta = 0; \quad x = h, \theta_{xx}'' = 0.$$



Р и с. 2



Р и с. 3

Здесь второе условие (6.6) получено из сопоставления выражений (4.1) при $x = h$ с (6.4), а последнее граничное условие выведено путем предельного перехода при $x \rightarrow h$ в уравнении (4.3) с учетом условия прилипания на стенке канала (6.1).

В уравнении (6.5) имеется неопределенный параметр A , для вычисления которого надо поступить следующим образом. Подставим в правую часть формулы (6.2), согласно (4.3), $w = -\theta''_{xx}$. После интегрирования с учетом первого граничного условия (6.5) имеем

$$(6.7) \quad Q = -2\theta'_x(h).$$

Это соотношение осуществляет связь между искомым параметром A и заданным расходом Q . Задав A произвольно в (6.5) и решив задачу (6.5), (6.6), из (6.7) найдем величину Q как функцию A . Обратив эту зависимость, можно получить $A = A(Q)$.

Для ньютоновской жидкости ($f \equiv 1$) из результатов [18] вытекает, что при некоторых $0 < A < A_{\max}$ задача (6.5)–(6.7) имеет два решения, а при $A > A_{\max}$ решения вообще не существует. При $\beta Eh \rightarrow 0$ (течение в узком канале) зависимость $A(Q)$ приведена на рис. 2. Аналог течения Пуазейля получается предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$ в (4.1)–(4.3), где нужно положить $A = B = C/\alpha$, $C = \text{const}$.

Случай 2. Пусть теперь температура на стенках канала экспоненциально уменьшается с координатой z по закону

$$(6.8) \quad x = h, \quad T = T_0 e^{-\lambda z},$$

а консистенция степенным образом зависит от температуры (1.2). Решение ищем в виде (5.1) при $\alpha = m\lambda$, где функции w и φ определяются из уравнений (5.2), (5.3). Используя граничные условия (6.1), (6.8) и равенство (6.3), после исключения w в случае степенной жидкости получим задачу для определения φ :

$$(6.9) \quad \left(\frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} \right)'_x = \frac{\lambda}{\kappa} \left(\frac{2A}{\mu_0} \right)^{1/n} \varphi^{m/n} [\text{sh}(\lambda mx)]^{1/n};$$

$$(6.10) \quad x = 0, \quad \varphi'_x = 0; \quad x = h, \quad \varphi = 1; \quad x = h, \quad \varphi''_{xx} = -\lambda^2 \varphi.$$

Здесь второе граничное условие найдено путем сопоставления формулы (5.1) при $x = h$ с (6.8), третье условие (6.10) выведено с помощью предельного перехода при $x \rightarrow h$ в (5.3) с учетом условия прилипания (6.1).

Для определения свободного параметра A в (6.9), как и ранее, используем соотношение (6.2), в правой части которого исключим w с помощью (5.3). В результате

$$(6.11) \quad Q = -\frac{2\kappa}{\lambda} \int_0^h \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} dx - 2\kappa\lambda h.$$

Решив задачу (6.9), (6.10) при произвольном A , по формуле (6.11) находим зависимость $Q = Q(A)$, обращение которой дает искомую связь $A = A(Q)$.

Согласно этому, покажем, что при достаточно больших A решение (6.9), (6.10) отсутствует. Введем замену $\bar{x} = x/h$, $\bar{\lambda} = \lambda mh$, $\bar{h}^2 = \lambda^2 h^2$,

$\bar{\varphi} = \varphi - 1$, $\bar{A} = \frac{\lambda h^3}{\nu} \left(\frac{2A}{\mu_0} \right)^{1/n}$. Проинтегрируем (6.9) от \bar{x} до 1 и (6.9), (6.10) сведем к интегральному уравнению

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{A} \int_0^1 G(\bar{x}, \xi) \left\{ (1 + \bar{\varphi}) \int_{\xi}^1 (1 + \bar{\varphi})^{m/n} (\operatorname{sh} \lambda t)^{1/n} dt \xi d\xi + \bar{h}^2 \int_0^1 G(\bar{x}, \xi) \bar{\varphi}(\xi) d\xi \right\},$$

где $G(\bar{x}, \xi) = \begin{cases} 1 - \xi, & \bar{x} \leq \xi, \\ 1 - \bar{x}, & \bar{x} \geq \xi \end{cases}$ — функция Грина оператора $-\bar{\varphi}'' = 0$ с краевыми условиями $\bar{\varphi}(1) = 0$, $\bar{\varphi}'(0) = 0$. Так как $\bar{\varphi}(\bar{x}) \geq 0$, $\bar{\varphi}''(\bar{x}) \leq 0$, то $\bar{\varphi}(\bar{x}) \geq \bar{\varphi}(0)(1 - \bar{x}) = \bar{\varphi}_0(1 - \bar{x})$. Учитывая это неравенство, придем к оценке

$$\bar{A} \leq \frac{\bar{\varphi}_0(2 - \bar{h}^2)}{2 \int_0^1 (1 - \bar{x}) \left\{ (1 + \bar{\varphi}_0(1 - \bar{x})) \left[\int_{\bar{x}}^1 (1 + \bar{\varphi}_0(1 - t))^{m/n} (\operatorname{sh} \lambda t)^{1/n} dt \right] \right\} d\bar{x}}.$$

Отсюда вытекает, что при $\bar{h}^2 < 2$ величина A ограничена сверху, так как $\bar{A} \rightarrow 0$ при $\bar{\varphi}_0 \rightarrow 0$ и $\bar{\varphi}_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, исходное уравнение (6.9), (6.10) при $\bar{A} > \bar{A}_{\max}$ не имеет решения. При $\bar{A} < \bar{A}_{\max}$ каждому перепаду давления (напряжению трения на стенке) отвечают два расхода жидкости. Можно показать (см. п. 2), что та ветвь решения, на которой перепад давления уменьшается с ростом расхода, неустойчива. На рис. 3 приведена зависимость перепада давления от температуры жидкости на оси канала.

В области докритических перепадов давления система (5.2), (5.3) может быть решена методом малого параметра. Пусть $f = 1$ (ньютоновская жидкость). Введем безразмерные величины: $\omega = w2h/Q$, $\operatorname{Re} = Q/2\kappa$, $\bar{k} = \alpha h/m$, $\bar{B} = A(\operatorname{sh} m\bar{k})/\mu_0$, а систему (5.2), (5.3) запишем как

$$(6.12) \quad \varphi'' + \bar{k}^2 \varphi = -\operatorname{Re} \bar{k} \omega \varphi, \quad \frac{d\omega}{dx} = -\bar{B} \varphi^m \frac{\operatorname{sh}(m\bar{k}x)}{\operatorname{sh}(m\bar{k})}.$$

При записи (6.12) была учтена симметрия течения ($A = B$). Параметр \bar{B} представляет собой напряжение трения на стенке канала, определяемое расходом жидкости. Решение (6.12) ищем в виде рядов

$$\omega(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}^n \omega_n, \quad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}^n \varphi_n, \quad \bar{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}^n \bar{B}_n.$$

Для нулевого приближения (изотермическое течение Пуазейля) имеем

$$d\omega_0/dx = -\bar{B}_0 \bar{x}, \quad \varphi_0 = 1, \quad \bar{B}_0 = 3, \quad \omega_0 = (3/2)(1 - \bar{x}^2).$$

Для первого приближения получим линейную систему

$$d\omega_1/dx = -3m\varphi_1 - \bar{B}_1 \bar{x}, \quad \varphi_1'' = -\operatorname{Re} \omega_0,$$

$$\varphi_1(1) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \omega_1(1) = 0, \quad \omega_1'(0) = 0, \quad \int_0^1 \omega_1 d\bar{x} = 0,$$

решение которой представим как

$$\omega_1 = \frac{m \operatorname{Re}}{560} [315\bar{x}^4 - 35\bar{x}^6 - 333\bar{x}^2 + 53], \quad \varphi_1 = -\frac{\operatorname{Re}}{8} [6\bar{x}^2 - \bar{x}^4 - 5],$$

$$\bar{B}_1 = -\frac{24}{35} m \operatorname{Re}.$$

Посмотрим теперь, каким течениям ньютоновской жидкости ($n = 1$) отвечает решение (5.6), которое при $A = B$, $\alpha = \lambda m$ может быть записано в форме

$$(6.13) \quad \varphi = b [\operatorname{ch}(\lambda m x)]^{-3/m}, \quad b = \left[\frac{3\lambda^3 \kappa \mu_0 m (m+3)}{A} \right]^{1/m}.$$

Функция (6.13) удовлетворяет уравнению (6.9) и первому граничному условию (6.10). Требуя, чтобы выполнялись второе и третье граничные условия (6.10), а также соотношение (6.14), получим

$$(6.14) \quad \operatorname{ch}(\lambda mh) = \left[\frac{3\lambda^2 \kappa \mu_0 m (m+3)}{A} \right]^{1/3};$$

$$(6.15) \quad \operatorname{th}^2(\lambda mh) = \frac{3m-1}{3(m+1)};$$

$$(6.16) \quad Q = \frac{6\kappa(m+3)}{m} \operatorname{th}(\lambda mh) - 20\kappa\lambda h.$$

Первое уравнение (6.14) служит для определения параметра A , а уравнения (6.15), (6.16) носят характер ограничений на параметры течения (λ , m , h , κ , Q) и имеют физический смысл при $m \geq 1/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979.
2. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей (инженерные методы расчета). — Л.: Химия, 1966.
3. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. — М.; Л.: Наука, 1975.
4. Регирер С. А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости // ПММ. — 1958. — Т. 22, № 3.
5. Каганов С. А. Об установившемся ламинарном течении в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // ПМТФ. — 1962. — № 3.
6. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом взрыве // ДАН СССР. — 1965. — Т. 163, № 1.
7. Найденов В. И. Об автомодельности одной задачи конвективного теплообмена // ПМТФ. — 1974. — № 5.
8. Найденов В. И., Полянин А. Д. О некоторых нелинейных конвективно-тепловых эффектах в теории фильтрации и гидродинамике // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 3.
9. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977.
10. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981.
11. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968.
12. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975.
13. Келлер Г. В. Некоторые позитонные задачи, выдвигаемые нелинейной теорией генерации тепла. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. — М.: Мир, 1974.
14. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. — Минск: Наука и техника, 1966.
15. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
16. Казаль П. О совокупности решений уравнения пограничного слоя // Механика. — М., 1974. — № 4.
17. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Дискретно-групповой метод интегрирования уравнений нелинейной механики. — М., 1988. — (Препр./Ин-т пробл. механики АН СССР; № 339).
18. Найденов В. И. О нелинейных уравнениях автомодельного неизотермического движения вязкой жидкости // ЖВММФ. — 1988. — Т. 28, № 12.

г. Москва

Поступила 30/VIII 1988 г.,
в окончательном варианте — 2/XII 1988 г.

УДК 532.595,2+532.595,7

С. П. Актершев, А. П. Петров, А. В. Федоров

ВЛИЯНИЕ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ НА ПРОЦЕСС НАГРУЖЕНИЯ ДАВЛЕНИЕМ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

При эксплуатации различных гидравлических систем встречаются ситуации, когда в жидкости присутствуют полости, наполненные газом. Иногда это результат непредусмотренного попадания воздуха в трубопровод, в других случаях — воздушные камеры, предназначенные для демпфирования колебаний жидкости.

© 1990 Актершев С. П., Петров А. П., Федоров А. В.