

- вых задач теории электрического зонда в плотной плазме. — В кн.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979.
8. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964.
 9. Мнацаканян А. Х., Найдис Г. В. Ионизация атомов и рекомбинация атомных ионов и электронов в неравновесной атомно-молекулярной плазме. М.: Препринт Ин-та высоких температур АН СССР, 1979, № 1—43.
 10. Недоспасов А. В., Побережский Л. П., Чернов Р. Г. Состав и свойства рабочих тел МГД-генераторов открытого цикла. М.: Наука, 1977.
 11. Mason E. A., Viehland L. A. et al. Mobilities of K^+ ions in hot gases. — Phys. Fluids, 1975, vol. 18, N 8.
 12. Баранов Н. Н., Молотков В. И., Побережский Л. П. Экспериментальное исследование электрических характеристик приэлектродных заряженных слоев в потоке плазмы высокого давления. — ТВТ, 1980, т. 18, № 6.
 13. Баранов Н. Н. Экспериментальное исследование физических процессов вблизи электродов МГД-генератора. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. М.: ИВТАН, 1979.

УДК 538.4 : 532.584

К ТЕОРИИ КОЛЛОИДА АНИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

В. М. Суязов

(Воронеж)

Введение. В настоящее время при теоретическом описании течений феррожидкостей, представляющих собой стабилизированные поверхностно-активным веществом коллоидные смеси ферромагнитных частиц в жидком носителе, используются различные подходы и приближения [1—12]. Так, в одной из первых гидродинамических моделей феррожидкости [1] допускается малость времени релаксации намагниченности τ по сравнению с характерным макроскопическим временем задачи, что позволяет считать $\tau = 0$, а намагниченность среды рассматривать как некоторое равновесное уравнение состояния.

В отличие от такого представления в моделях [2—4] время релаксации τ считается конечным, так что изменение намагниченности задается уже релаксационным уравнением, которое в совокупности с другими уравнениями теории правильно описывает динамику процесса намагничивания на макроуровне магнитоизотропных феррожидкостей. С микроскопической точки зрения магнитоизотропность феррожидкости означает замороженность процессов изменения намагниченности в твердой фазе частицы либо бесконечность обобщенной константы K магнитной анизотропии частиц. Все это приводит к тому, что ориентационное изменение намагниченности в этих моделях всецело определяется поворотами частиц — броуновским механизмом релаксации [5] с временем релаксации τ_2 .

В случае, когда энергия теплового движения kT сравнима с конечной энергией магнитной анизотропии частиц KV , последняя уже оказывается не в состоянии удерживать магнитный момент в замороженном состоянии из-за тепловых флуктуаций внутри частицы, где V — объем частицы, k — постоянная Больцмана. Так что ориентационное изменение намагниченности в общем случае частичной в замороженности магнитного момента будет определяться как его диффузией относительно твердой фазы частицы (неловский механизм релаксации с временем τ_1 [5]), так и за счет броуновского поворота частиц, что при определенных гидродинамических характеристиках потока и при $\tau_1 \ll \tau_2$ будет обуславливать магнитную макроанизотропию феррожидкости.

Впервые влияние частичной в замороженности магнитного момента в тело частицы на эффективную вязкость ферросуспензии проведено в [10]. Однако это исследование, проведенное на основе кинетического рассмотрения, не позволило получить единую формулу для эффективной вязкости, включающую в себя ранее известные формулы для моделей жесткого и фиксированного магнитных диполей, а также достаточно общие макроскопические уравнения движения.

В этой связи представляет интерес цикл исследований [8, 11, 12], в которых сформулированы достаточно общие макроскопические уравнения, учитывающие конечность энергии магнитной анизотропии частиц путем введения в теорию макроскопического векторного параметра A , характеризующего по определению внутреннее поле магнитной анизотропии. В состоянии равновесия этот параметр считается пропорциональным намагниченности $A = \alpha m$, где коэффициент α определяется как параметр, задающий степень в замороженности магнитного момента в тело частицы.

Расчет зависимости вязкости от напряженности поля ξ , выполненный в рамках этих уравнений в состоянии частичного равновесия, показывает [8] поразительно хорошее совпадение теории с опытом для взвеси магнетита в керосине. Однако это совпадение нельзя пока трактовать как безусловное подтверждение указанной выше интерпретации параметра α (или отступление опытной зависимости вязкости от модели

жесткого диполя всецело связать только лишь с частичной замороженностью магнитного момента в тело частицы) ввиду того, что совпадение теории с опытом в [8] достигнуто благодаря подстановке в теорию экспериментально установленной зависимости параметра α от ξ , и из-за того, что при таком определении параметра α в силу отсутствия достаточной чистоты эксперимента, когда в опыте не полностью исключалась возможность влияния на значения этого параметра таких факторов, как наличие кластеров, цепочных агрегатов, полидисперсного состава частиц и т. п., т. е. факторов, не учитываемых в самих уравнениях теории [8]. Хотя общеизвестно, что эти факторы в реально существующих концентрированных феррожидкостях заметны и оказывают значительное влияние на ее гидродинамику и другие процессы. Например, особенности дебаевского спектра релаксации для феррожидкостей, в том числе и для взвеси магнетита в керосине, удалось объяснить в [9] предположением о наличии двух фракций частиц с временами релаксации τ_1 и τ_2 , причем $\tau_1 \ll \tau_2$, т. е. предположением о наличии изотропных и жестких диполей в феррожидкостях. В этой связи представляет определенный интерес изучить влияние разброса в размерах частиц на эффективную вязкость феррожидкости.

Кроме того, использование в теории [8] для характеристики частичной замороженности магнитного момента векторного поля анизотропии A хотя и не вызывает каких-либо принципиальных возражений ввиду широкого использования в научной литературе и в особенности в теории полимерных материалов внутренних скалярных, векторных и тензорных переменных для характеристики протекающих в них релаксационных процессов, тем не менее факт, что в состоянии частичного равновесия релаксационные уравнения [8] сводятся к одному релаксационному уравнению для намагниченности, которая представляется в виде суммы двух частей: мгновенной m_s и релаксационной m_r , наталкивает на мысль не вводить векторный параметр анизотропии в теорию, а с самого начала ограничиться рассмотрением намагниченности в виде суммы двух частей, описываемых своими релаксационными уравнениями.

Рассмотрению указанных выше аспектов теории анизотропной феррожидкости посвящена данная работа. Теория строится на базе теории взаимопроникающих намагничиваемых континуумов, разработанной в [3]. В основу предлагаемой теории положена физическая модель намагничивания ферросуспензии за счет двух механизмов релаксации намагниченности, которая представляется в виде суммы двух частей m_1 и m_2 с характерными временами релаксации τ_1 и τ_2 . В реальной ферросуспензии такая ситуация может иметь место в двух случаях: 1) при наличии в ферросуспензии только двух сортов частиц, значительно отличающихся магнитными характеристиками (двухчастичная модель п. 1, 2); 2) при наличии в ферросуспензии только одного сорта частиц, но с частично замороженными магнитными моментами (одночастичная модель п. 3, 4). В первом случае времена релаксации τ_1 и τ_2 будут определяться обычными броуновскими временами релаксации, во втором — броуновским и нееловским временем.

Возникновение анизотропии в обоих случаях будет отчасти определяться наличием двух релаксационных механизмов намагниченности, когда $\tau_1 \ll \tau_2$. Так, при наложении внешнего поля по истечении времени порядка τ_1 намагниченность феррожидкости в направлении поля будет определяться значением m_1 . По истечении времени τ_2 она возрастает на величину m_2 . При определенных динамических характеристиках потока возможно раздельное влияние намагниченностей m_1 и m_2 на процесс, что и будет обуславливать возникновение динамической анизотропии в потоке. Рассматриваемая теория иллюстрируется анализом эффективной вязкости ферросуспензии.

1. Основные уравнения двухчастичной модели анизотропного ферроколлоида. Система уравнений модели ферросуспензии, рассматриваемая как смесь взаимопроникающих компонентов, способных к разделению, сформулирована в [3]. Выпишем здесь эту систему уравнений в модифицированном виде, исходя из следующего физического модельного представления. Ферросуспензию будем рассматривать как взвесь ферромагнитных частиц двух сортов, отличающихся по магнитным характеристикам в жидком носителе*. Отличие это может быть обусловлено различием в размерах используемых частиц либо вследствие образования укруп-

* Такое представление является приближенным, так как для большинства реальных ферросуспензий характерно наличие разброса в размере частиц, подчиняющегося, вообще говоря, некоторому распределению.

ненных коллоидных частиц в самой феррожидкости [7], что приводит к разным значениям магнитных моментов частиц. Возможна и другая интерпретация. Для одних частиц будем считать, что их магнитный момент полностью заморожен в тело частицы, для второго сорта частиц он лишь частично заморожен*. Во всех этих случаях время релаксации намагниченности для частиц двух сортов будет разным, что приводит к необходимости рассмотрения двух релаксационных уравнений для намагниченности. Кроме того, для частиц меньшего размера либо для частиц с частично замороженными моментами эффект вращающего действия объемного магнитного момента сил будет меньше, чем для частиц другого сорта. Эта особенность будет обуславливать несовпадение скоростей вращения частиц, т. е. $\omega_1 \neq \omega_2$. В то же время будем считать, что частицы обоих сортов при их поступательном движении заморожены в жидкий носитель, т. е. принимаем, что их скорости поступательного движения совпадают со скоростью жидкости. Следовательно, имеем $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$.

При сделанных предположениях и при отсутствии свободных зарядов, проводимости и поляризации среды система уравнений [3] может быть записана так:

уравнения электродинамики в виде

$$(1.1) \quad \nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mu_0 \mathbf{h}}{\partial t} = - \frac{\partial \mu_0 \mathbf{m}}{\partial t} - \nabla \times (\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{v}), \quad \nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \varepsilon_0 \mathbf{e}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \mu_0 (\mathbf{h} + \mathbf{m}) = 0, \quad \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2;$$

уравнения неразрывности, импульса, момента импульса и неравенство для производства энтропии γ в виде

$$(1.2) \quad \rho \cdot + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho \mathbf{v} \cdot = \nabla \cdot \mathbf{t} + (\mu_0 \mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{h} - \mathbf{v} \times (\mu_0 \mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{e} - \rho \mu_0 \dot{\mathbf{m}} \times \varepsilon_0 \mathbf{e}, \\ \rho_\alpha I_\alpha \dot{\omega}_\alpha = \nabla \cdot \mathbf{s}_\alpha + \mathbf{t}_\alpha \times \cdot \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{m}_\alpha \times \eta + U(\alpha) \mathbf{L}, \quad \eta = \mathbf{h} - \mathbf{v} \times \varepsilon_0 \mathbf{e}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2, \\ \rho T \gamma = - T^{-1} \mathbf{Q} \cdot \nabla T + (\omega_2 - \omega_1) \cdot \mathbf{L} + D \mathbf{t}^s \cdot (\nabla \mathbf{v})^s + \\ + \sum_{\alpha=1}^2 \left[\mathbf{s}_\alpha \cdot \cdot \nabla \omega_\alpha + \frac{1}{2} (\mathbf{t}_\alpha \times \cdot \mathbf{I}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\omega_\alpha) + (\rho_\alpha \mu_0 \dot{\mu}_\alpha - \omega_\alpha \times \mu_0 \mathbf{m}_\alpha) \cdot D \eta_\alpha + \right. \\ \left. + \omega_\alpha \mathbf{R}_\alpha \right] \geq 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

где

$$(1.3) \quad \eta = - \frac{\partial \varphi}{\partial T}; \quad \pi = - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho^{-1}}; \quad E \eta_\alpha = \frac{\rho}{\mu_0 \rho_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_\alpha}; \quad \eta = E \eta_\alpha + D \eta_\alpha; \quad \mathbf{R}_\alpha = \\ = E \eta_\alpha \times \mu_0 \mathbf{m}_\alpha;$$

$$\mathbf{t} = -\pi \mathbf{I} + D \mathbf{t}; \quad \mathbf{m}_\alpha = \rho_\alpha \mu_\alpha; \quad \rho = \rho_1 + \rho_2; \quad \rho \mu = \rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2; \quad \mathbf{I} = \{\delta^{ij}\}; \\ 2\mathbf{t}^s = \{t^{ik} + t^{ki}\}; \quad U(\alpha) = (-1)^{\alpha-1}.$$

Здесь \mathbf{e} и \mathbf{h} — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε_0, μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; $\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{s}_\alpha$ — тензоры силовых и моментных напряжений; \mathbf{L} — диффузионный момент взаимодействия; φ — свободная энергия; \mathbf{Q} — вектор теплового потока; ∇ — оператор Гамильтона; I_α — скалярные константы с размерностью момента инерции частиц на единицу массы. Операции \cdot и \times означают скалярное и векторное умножение векторов. Под плотностью ρ_α понимается отношение массы частицы α сорта вместе с окружающей частью жидкости, отнесенной ко всему объему смеси. Связь ρ_α , константы I_α с числом частиц n_α и их микрохарактеристиками нами не конкретизируется. Точка в положении штриха означает полную производную по времени.

* Здесь нами не описывается сам процесс частичной замороженности магнитного момента, он упоминается всего лишь для иллюстрации различий в магнитных характеристиках двух сортов частиц. Ларморовской прецессией магнитных моментов всюду пренебрегается.

Система уравнений (1.1), (1.2) должна быть дополнена определяющими уравнениями для девятнадцати неразложимых термодинамических потоков, связывающих их с термодинамическими силами при помощи тензорных кинетических коэффициентов, являющихся функциями векторов намагниченности. Опуская явный вид этих уравнений, приведем используемую в дальнейшем частную систему определяющих уравнений для несжимаемой изотермической безмоментной феррожидкости вида

$$(1.4) \quad t^{ik} = -p\delta^{ik} + \alpha_2(v_{i,k} + v_{k,i}) + \varepsilon^{iks}(b_1^s + b_2^s), \quad L^k = l_1(\omega_2^k - \omega_1^k), \quad \mathbf{b}_\alpha = \beta_1^{(\alpha)}(\nabla \times \mathbf{v} - 2\omega_\alpha),$$

$$\rho_1 \dot{\mathbf{m}}_1 - \omega_1 \times \mathbf{m}_1 = \frac{1}{\tau_1}(m_{10}\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{m}_1) + \frac{1}{\tau}(m_{20}\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{m}_2), \quad m_{10} = K_1 h, \quad \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h}/h,$$

$$\rho_2 \dot{\mathbf{m}}_2 - \omega_2 \times \mathbf{m}_2 = \frac{1}{\tau_2}(m_{20}\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{m}_2) + \frac{1}{\tau} \frac{K_1}{K_2}(m_{10}\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{m}_1), \quad m_{20} = K_2 h.$$

Здесь K_1 и K_2 — равновесные восприимчивости ферросuspензии, обусловленные частицами первого и второго сорта; p — гидростатическое давление. Времена релаксации τ_1 , τ_2 , τ связаны с константами [3] соотношениями: $\tau_1 = \mu_0 K_1 / \mu_1^{(1)}$, $\tau_2 = \mu_0 K_2 / \mu_1^{(2)}$, $\tau = \mu_0 K_2 / \mu_2^{(1)}$, причем они удовлетворяют термодинамическим ограничениям

$$(1.5) \quad K_1, K_2, \tau_1, \tau_2 \geq 0, \quad \tau^2 K_1 - \tau_1 \tau_2 K_2 \geq 0.$$

Система уравнений (1.1)–(1.5) представляет замкнутую систему уравнений для определения величин \mathbf{v} , ω_α , \mathbf{m}_α , \mathbf{h} при $\mathbf{e} = 0$.

2. Определение эффективной вязкости в рамках двухчастичной модели.

2.1. *Общее выражение для эффективной вязкости.* Определим эффективную вязкость ферросuspензии при ее течении в плоской щели в поперечном однородном магнитном поле под действием градиента давления $p_{,1} = \text{const}$. Ось x_1 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ направим в направлении течения, ось x_2 — в направлении внешнего магнитного поля, а ось x_3 — в направлении, перпендикулярном к плоскости течения. Поля скоростей и векторы намагниченности определим в виде

$$(2.1) \quad v = v_1(x_2), \quad v_3 = v_2 = 0, \quad \omega_\alpha = \omega_\alpha^3(x_2), \quad \omega_\alpha^1 = \omega_\alpha^2 = 0, \\ \mathbf{m}_1 = m_{10}\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{m}_{1\perp}, \quad \mathbf{m}_2 = m_{20}\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{m}_{2\perp}.$$

Учитывая малость времен релаксаций, допускаем, что величины $\mathbf{m}_{\alpha\perp}$ имеют тот же порядок, что $\omega_2\tau_2 \ll 1$, $\omega_1\tau_1 \ll 1$. Тогда из уравнений для намагниченности (1.4) в линейном приближении находим

$$(2.2) \quad m_{1\perp} = \frac{m_{20}}{\tau\Delta} \omega_2^3 - \frac{m_{10}}{\tau_2\Delta} \omega_1^3, \quad m_{2\perp} = \frac{m_{10}}{\tau\Delta} \frac{K_2}{K_1} \omega_1^3 - \frac{m_{20}}{\tau_1\Delta} \omega_2^3, \quad \Delta = \\ = \frac{K_1\tau^2 - \tau_1\tau_2K_2}{\tau_1\tau_2K_1\tau^2} > 0.$$

Уравнения движения (1.1) с учетом (2.1) принимают вид

$$(2.3) \quad -p_{,1} + (\alpha_2 + \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)})v_{,22} + 2\beta_1^{(1)}\omega_{1,2}^3 + 2\beta_1^{(2)}\omega_{2,2}^3 = 0, \\ -2\beta_1^{(1)}(v_{,2} + 2\omega_1^3) + \mu_0 m_{1\perp} h + l_1(\omega_2^3 - \omega_1^3) = 0, \\ -2\beta_1^{(2)}(v_{,2} + 2\omega_2^3) + \mu_0 m_{2\perp} h - l_1(\omega_2^3 - \omega_1^3) = 0.$$

После преобразований с учетом (2.2) их можно записать в виде

$$(2.4) \quad -p_{,1} + (\alpha_2 + \Delta\eta)v_{,22} = 0, \\ \omega_1^3 = \Delta^{-1}[2\beta_1^{(1)}B'_2 + 2\beta_1^{(2)}B'_3]v_{,2}, \quad \omega_2^3 = \Delta^{-1}[2\beta_1^{(2)}B'_1 + 2\beta_1^{(1)}B'_3]v_{,2}, \\ B_1 = 4\beta_1^{(1)} + \mu_0 m_{10}h/\tau_2\Delta, \quad B_2 = 4\beta_1^{(2)} + \mu_0 m_{20}h/\tau_1\Delta, \quad B_3 = m_{20}h\mu_0/\tau\Delta, \\ B'_2 = B_2 + l_1, \quad B'_1 = B_1 + l_1, \quad B'_3 = B_3 + l_1, \quad \Delta_1 = -B_1B_2 - l_1(B_2 + B_1 - 2B_3) + B_3^2, \\ B_4 = m_{10}\mu_0h/\tau_2, \quad B_5 = m_{20}h\mu_0/\tau_1;$$

$$(2.5) \quad \Delta\eta = [-\beta_1^{(1)}B_4B_2 - \beta_1^{(2)}B_5B_1 - (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)})l_1(B_5 + B_4 - 2B_3\Delta) + \\ + (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)})B_3^2\Delta + 8\beta_1^{(1)}\beta_1^{(2)}B_3\Delta]/\Delta\Delta_1.$$

Соотношение (2.5) определяет добавочную вязкость $\Delta\eta$ к обычной сдвиговой вязкости. Добавочная вязкость определяется значением напряженности поля h , вращательными вязкостями $\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, l_1$, временами релаксации τ_1, τ_2, τ .

2.2. *Влияние разброса в значениях магнитного момента частиц на эффективную вязкость.* Анализ вязкости (2.5) проведем при $\tau \rightarrow \infty$. В этом случае имеем $\Delta = (\tau_1\tau_2)^{-1}$. Сама же вязкость может быть представлена в наглядной форме в виде

$$(2.6) \quad \Delta\eta = \left[\frac{\beta_1^{(1)}m_{10}\mu_0h\tau_1}{4\beta_1^{(1)} + \tau_1\mu_0m_{10}h} + \frac{\beta_1^{(2)}m_{20}\mu_0h\tau_2}{4\beta_1^{(2)} + \tau_2\mu_0m_{20}h} + \right. \\ \left. - (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)})l_1 \frac{\mu_0hm_{20}\tau_2 + \mu_0hm_{10}\tau_1}{[4\beta_1^{(1)} + \tau_1\mu_0m_{10}h][4\beta_1^{(2)} + \tau_2\mu_0m_{20}h]} \right] A, \\ A = [1 + l_1/(4\beta_1^{(1)} + \tau_1\mu_0hm_{10}) + l_1/(4\beta_1^{(2)} + \tau_2\mu_0hm_{20})]^{-1}.$$

Для каждого сорта частиц с концентрацией n_1 и n_2 и с магнитными моментами M_{01} и M_{02} допускаем справедливыми соотношения теории полярных диэлектриков и теории парамагнетизма Ланжевена:

$$(2.7) \quad \beta_1^{(\alpha)} = \frac{3}{2}\varphi_\alpha\eta_0, \quad \tau_\alpha = \frac{3\varphi_\alpha\eta_0}{n_\alpha kT}, \quad \xi_1 = \frac{\mu_0M_{01}h}{kT}, \quad \xi = \frac{\mu_0M_{02}h}{kT}, \quad L(\xi) = \\ = \text{cth } \xi - \frac{1}{\xi}, \quad m_{10} = n_1M_{01}L(\xi_1), \quad m_{20} = n_2M_{02}L(\xi), \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

При справедливости (2.7) добавочная вязкость (2.6) принимает вид

$$(2.8) \quad \frac{\Delta\eta}{3\varphi\eta/2} = \left[\frac{\varphi_1}{\varphi} D(\xi_1) + \frac{\varphi_2}{\varphi} D(\xi) + \frac{l_1}{\eta_0} \frac{D(\xi)}{3\varphi_1(2 + \xi_1L(\xi_1))} + \right. \\ \left. + \frac{l_1D(\xi_1)}{\eta_0 3\varphi_2(2 + \xi_1L(\xi_1))} \right] A, \quad A = \left[1 + \frac{l_1}{\eta_0 3\varphi_1(2 + \xi_1L(\xi_1))} + \frac{l_1}{\eta_0 3\varphi_2(2 + \xi_1L(\xi_1))} \right]^{-1}, \\ D(\xi) = \frac{\xi L(\xi)}{2 + \xi L(\xi)}.$$

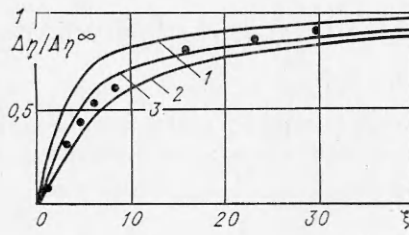
Скорости вращения частиц задаются соотношениями

$$(2.9) \quad \omega_1^3 = \Delta_1^{-1} [9\varphi_1\varphi_2\eta_0^3(2 + \xi L(\xi)) + 3\varphi\eta_0l_1] v_{,2}, \quad \omega_2^3 = \Delta_1^{-1} [9\varphi_1\varphi_2\eta_0^3(2 + \\ + \xi_1L(\xi_1)) + 3\varphi\eta_0l_1] v_{,2}, \quad \Delta_1 = -9\varphi_1\varphi_2\eta_0^3(2 + \xi_1L(\xi_1))(2 + \xi L(\xi)) - \\ - l_1 3\eta_0 [\varphi_1(2 + \xi_1L(\xi_1)) + \varphi_2(2 + \xi L(\xi))].$$

При равенстве магнитных моментов у частиц первого и второго сорта, т. е. при $\xi = \xi_1$, добавочная вязкость (2.8) совпадает с вязкостью однократной модели жесткого диполя $\Delta\eta = (3/2)\varphi\eta_0 D(\xi)$ при любых значениях l_1 . Следовательно, диффузионное вращательное трение l_1 в этом случае не вносит вклада в добавочную вязкость. Это обусловлено совпадением скоростей вращения частиц при таком приближении, что непосредственно следует из (2.9).

Из (2.8) видно, что в случае, если параметр l_1 , имеющий размерность вязкости, не зависит от ξ и ξ_1 , то при $\xi_1, \xi \rightarrow \infty$ для вязкости насыщения получаем значение вязкости насыщения модели жесткого диполя, равное $3\varphi\eta_0/2$. Как следует из (2.9), вращение частиц оказывается полностью заморожено. При $\xi_1 = \xi = 0$, наоборот, частицы вращаются свободно с вихревой скоростью жидкого носителя $\omega_\alpha^3 = -(1/2)v_{,2}$.

Кривые зависимости $\Delta\eta/3\varphi\eta_0/2$ от ξ , рассчитанные по формуле (2.8), приведены на фигуре. Расчет проводился при $\varphi = 0,19$, $\varphi_1 = 0,1235$,



$\varphi_2 = 0,0665$, $\xi_1 = 0,3\xi$. Кривая 1 соответствует модели жесткого диполя для ферросuspензии с одним сортом частиц. Кривые 2, 3 строились при $l_1/\eta_0 = 0$ и $l_1/\eta_0 = 1$.

Из сравнения кривых 1, 2 видно, что наличие разброса в размере частиц (магнитного момента частиц) ферросuspензии приводит к уменьшению

добавочной вязкости $\Delta\eta$ по сравнению с вязкостью одночастичной модели жесткого диполя. Такая особенность решения находится в качественном соответствии с опытными данными [8], изображенными на фигуре точками. В [8] исследовалась добавочная вязкость в круговом течении Куэрта взвеси магнетита в керосине, стабилизированной олеиновой кислотой в поперечном поле. Гидродинамическая концентрация магнетита равнялась 0,19. Согласно оценке [9], в феррожидкости такого же типа доля частиц, подверженных нееловскому механизму релаксации, равнялась 0,65. Кроме того, магнитный момент коллоидной частицы оказался в 3,64 раза больше магнитного момента отдельной ферромагнитной частицы [7]. Все это дает основание при расчете считать, что доля частиц, имеющих меньший диаметр, также равна 0,65, а $M_{01} \approx 0,3 M_{02}$, и интерпретировать опытные данные [8] в рамках представлений о полидисперсности ферросuspензий.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что опытный эффект уменьшения вязкости ферросuspензии по сравнению с теоретическим значением вязкости одночастичной модели феррожидкости наряду с представлениями о частичной вмороженности магнитного момента в тело частицы [8] может частично определяться наличием разброса в размерах частиц, их магнитных моментов. Причем при рассмотренных параметрах рост l_1 уменьшает эффект уменьшения вязкости (кривая 3), т. е. наличие диффузионного вращательного трения приводит к дополнительному росту вязкости в потоке.

2.3. Влияние нееловского суперпарамагнетизма частиц первого сорта.

Допустим, что магнитный момент частиц первого сорта диффундирует относительно тела частицы с временем релаксации $\tau_1 \ll \tau_2$, где τ_2 — время броуновской релаксации для второго сорта частиц. Так что можно считать $\tau_1 = 0$, что означает полную размороженность ориентационной степени свободы магнитного момента относительно тела частицы первого сорта. Стремление $\tau_1 \rightarrow 0$ означает также пренебрежение диссипацией энергии, обусловленной явлением релаксации намагниченности m_1 . В этих предположениях из (2.6) при справедливости (2.7) и $\tau_1 = 0$ находим для добавочной вязкости

$$(2.10) \quad \Delta\eta = \frac{3}{2} \varphi_2 \eta_0 \frac{\int \xi L(\xi)}{2 + \xi L(\xi)} \left(1 + \frac{\varphi l_1}{6\varphi_1 \varphi_2 \eta_0} \right) \left(1 + \frac{l_2}{6\varphi_1 \eta_0} + \frac{l_2}{3\varphi_2 \eta_0 (2 + \xi L(\xi))} \right)^{-1}.$$

Скорости вращения частиц запишутся в виде

$$(2.11) \quad \omega_1^3 = \Delta_1^{-1} [9\varphi_1 \varphi_2 \eta_0^2 (2 + \xi L(\xi)) + 3\varphi \eta_0 l_1] v_{2,2}, \quad \omega_2^3 = \Delta_1^{-1} [18\varphi_1 \varphi_2 \eta_0^2 + 3\varphi \eta_0 l_1] v_{2,2}, \quad \Delta_1 = -18\varphi_1 \varphi_2 \eta_0^2 (2 + \xi L(\xi)) - 3\eta_0 l_1 (2\varphi + \varphi_2 \xi L(\xi)).$$

При $\xi \rightarrow \infty$ из (2.10) получаем предельное значение вязкости насыщения:

$$(2.12) \quad \Delta\eta^\infty / \eta_0 = \frac{3}{2} \varphi_2 \frac{6\varphi_1 \varphi_2 \eta_0 + \varphi l_1}{6\varphi_1 \varphi_2 \eta_0 + \varphi_2 l_1}.$$

Из (2.12) следует, что $\Delta\eta^\infty / \eta_0 < \frac{3}{2} \varphi$ — относительной вязкости для модели жесткого диполя, что находится в качественном соответствии с опыт-

ными данными [7], где для вязкости насыщения взвеси магнетита в керосине с концентрацией $\varphi = 0,24$ найдено значение $\Delta\eta^\infty/\eta_0 \approx 0,06$, что существенно меньше теоретического значения модели жесткого диполя $3\varphi/2 = 0,36$. Согласно оценке [9], в ферросуспензии такого типа доля частиц, подверженных нееловской релаксации, составляла 0,65, что дает $\varphi_1 = 0,156$, $\varphi_2 = 0,084$. Расчет вязкости по формуле (2.12) при минимальном значении $l_1 = 0$ приводит к значению $\Delta\eta^\infty/\eta_0 = 3\varphi_2/2 = 0,126$, что качественно соответствует опыту, но с количественной стороны оно больше опытного 0,06. Такое несоответствие может быть связано, например, с тем, что в реальной ферросуспензии для частиц второго сорта магнитный момент оказывается лишь частично замороженным в тело частицы, это не учитывалось при получении (2.12).

Интересно проследить влияние роста напряженности поля, параметра l_1 на вращение частиц. Из (2.11) при $\xi = 0$ следует, что частицы вращаются с вихревой скоростью жидкого носителя $\omega_\alpha^3 = -(1/2)v_{,2}$, добавочная вязкость $\Delta\eta = 0$. При $\xi \rightarrow \infty$ вращение частиц второго сорта полностью заторможено, т. е. $\omega_2^3 = 0$, а частицы первого сорта продолжают вращаться со скоростью

$$\omega_1^3 = \frac{-3\varphi_1\eta_0}{6\varphi_1\eta_0 + l_1} v_{,2},$$

меньшей скорости вихря жидкости при $l_1 \neq 0$. Торможение вращения частиц первого сорта обусловлено наличием их диффузионного взаимодействия с частицами второго сорта, что приводит к увеличению вязкости в потоке. При $l_1/\eta_0 \rightarrow \infty$ частицы первого сорта оказываются также полностью заторможены, а вязкость насыщения (2.12) максимальна и равна вязкости насыщения модели жесткого диполя $\Delta\eta^\infty/\eta_0 = 3\varphi/2$. Тем самым с уменьшением параметра диффузионного вращательного трения совпадение теории с опытом улучшается. Зависимость вязкости $\Delta\eta/\Delta\eta^\infty$ от ξ при $l_1/\eta_0 = 1$ близка к кривой 3 фигуры. Таким образом, эффект уменьшения вязкости по сравнению с вязкостью модели жесткого диполя имеет место и при использовании формулы (2.10).

3. Основные уравнения одночастичной модели анизотропного ферроколлоида. Допустим, что различие в скоростях вращения частиц отсутствует, т. е. $\omega = \omega_1 = \omega_2$. В этом случае уравнения (1.2) при $e = 0$ принимают вид

$$(3.1) \quad \rho \cdot + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho \mathbf{v} \cdot = \nabla \cdot \mathbf{t} + (\mu_0 \mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{h}, \quad \rho J \omega \cdot = \nabla \cdot \mathbf{s} + \mathbf{t} \times \cdot \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{h}, \\ \rho T \gamma = -T^{-1} \mathbf{Q} \cdot \nabla T + D t^s \cdot (\nabla \mathbf{v})^s + \mathbf{s} \cdot \cdot \nabla \omega + \frac{1}{2} (\mathbf{t} \times \cdot \mathbf{I}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\omega) + \\ + \omega \cdot \mathbf{R} + \rho \mu_0 (\mu_1 - \omega \times \mu_1) \cdot D \eta_1 + \rho \mu_0 (\mu_2 - \omega \times \mu_2) \cdot D \eta_2 \geq 0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2, \\ \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \mathbf{R} = \epsilon \eta_1 \times \mu_0 \mathbf{m}_1 + \epsilon \eta_2 \times \mu_0 \mathbf{m}_2, \quad a \cdot \rho = \partial(a\rho)/\partial t + \\ + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho a), \quad \rho \mu_\alpha = \mathbf{m}_\alpha.$$

Вытекающее из неравенства для производства энтропии (3.1) ограничение $\mathbf{R} = 0$ позволяет в отличие от ограничений $\mathbf{R}_\alpha = 0$ из (1.3) определить свободную энергию φ в виде

$$(3.2) \quad \varphi = \varphi_0(\rho^{-1}, T) + \frac{\mu_0 m_1^2}{2\rho K_1} + \frac{\mu_0 m_2^2}{2\rho K_2} + \frac{\mu_0 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{\rho K_3}, \quad K_1, K_2 > 0, \quad \Delta_0 = K_3 - \\ - K_1 K_2 > 0,$$

где наличие члена с константой K_3 можно интерпретировать как учет диполь-дипольного взаимодействия. Из (3.2), (3.1) и (1.3) находим уравнения состояния:

$$(3.3) \quad \pi = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho^{-1}} + \rho(\varphi_0 - \varphi), \quad \epsilon \eta_1 = \frac{m_1}{K_1} + \frac{m_2}{K_3}, \quad \epsilon \eta_2 = \frac{m_2}{K_2} + \frac{m_1}{K_3}.$$

Определяющие диссипативные уравнения в самом простейшем виде для несжимаемой изотермической жидкости зададим как

$$(3.4) \quad t^{ik} = -p\delta^{ik} + \alpha_2(v_{i,k} + v_{k,i}) + \varepsilon^{iksb}s, \quad \mathbf{b} = \alpha_3(\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{s} \equiv 0,$$

$$\rho \dot{\mathbf{m}}_1 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_1 = \frac{1}{\tau_1} \left[m_{10} \mathbf{h} - \mathbf{m}_1 - \frac{K_1}{K_3} \mathbf{m}_2 \right] + \frac{1}{\tau} \left[m_{20} \mathbf{h} - \mathbf{m}_2 - \frac{K_2}{K_3} \mathbf{m}_1 \right],$$

$$\rho \dot{\mathbf{m}}_2 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_2 = \frac{1}{\tau_2} \left[m_{20} \mathbf{h} - \mathbf{m}_2 - \frac{K_2}{K_3} \mathbf{m}_1 \right] + \frac{1}{\tau} \frac{K_2}{K_1} \left[m_{10} \mathbf{h} - \mathbf{m}_1 - \frac{K_1}{K_3} \mathbf{m}_2 \right].$$

Система уравнений (3.1)–(3.4) и (1.1) является замкнутой системой для определения величин \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{h} .

4. Определение эффективной вязкости в рамках одночастичной модели анизотропного ферроколлоида. Учет в уравнениях (3.1)–(3.4) в отличие от модели [2] двух механизмов релаксации намагниченности позволяет описать эффект частичной замороженности магнитного момента в твердую фазу частицы, например, при определении эффективной вязкости ферросuspензии. Рассмотрение, аналогичное п. 2, приводит к значению $\mathbf{m}_\alpha = \chi_\alpha \mathbf{h} + \mathbf{m}_{\alpha\perp}$, где

$$\chi_\alpha = K_\alpha K_3 (K_3 - K_{\alpha+(-1)^{\alpha-1}}) / \Delta_0; \quad \Delta_1 = \Delta_0 / \tau_1 \tau_2 K_3^2 - K_2 / \tau^2 K_1; \quad \mathbf{m}_\perp = \mathbf{m}_{1\perp} + \mathbf{m}_{2\perp}; \\ m_\perp = -B_1 \omega^3 h; \quad B_1 = \Delta_1^{-1} \{ [\tau(K_3 - K_1) - \tau_1(K_3 - K_2)] \chi_2 / K_3 \tau \tau_1 + [\tau K_1 \times \\ \times (K_3 - K_2) - \tau_2 K_2 (K_3 - K_1)] \chi_1 / K_1 K_3 \tau \tau_2 \},$$

что обуславливает значение добавочной вязкости:

$$(4.1) \quad \Delta \eta_j = \frac{\alpha_3 B_j \mu_0 h^2}{4\alpha_3 + B_j \mu_0 h^2}, \quad B_2 = K_3 [\chi_2 \tau_2 (K_3 - K_1) + \chi_1 \tau_1 (K_3 - K_2)] / \Delta_0,$$

$$B_3 = \tau_2 K_3^2 (K_3 - K_1) / \Delta_0^2, \quad B_4 = K_2 \tau_2$$

Добавочная вязкость $\Delta \eta_1$ зависит от времен релаксации τ_1 , τ_2 , τ , вращательной вязкости α_3 и параметров K_1 , K_2 , K_3 .

Значения $j = 2$ и 3 соответствуют случаям, когда $\tau \rightarrow \infty$ и $\tau \rightarrow 0$, $\tau_1 = 0$. При $j = 4$ дополнительно принимается, что $K_3 \rightarrow \infty$. Учитывая, что $m_0 = \chi h$ и $K_2 = \chi - K_1$, преобразуем $\Delta \eta_4$ из (4.1) к виду $\Delta \eta_4 = \alpha_3 M / (\alpha_3^4 + M)$, $M = \mu_0 m_0 h \tau_2 (\chi - K_1) / \chi$, совпадающим с вязкостью [8], полученной в предположении частичного равновесия, когда намагниченность направлена в направлении суммарного поля $\mathbf{h} + \mathbf{A}$, где \mathbf{A} — некоторое внутреннее поле анизотропии.

Таким образом, анализ показывает, что для описания частичной замороженности магнитного момента в тело частицы, вообще говоря, не требуется введения некоторого гипотетического поля внутренней анизотропии, как это сделано в [8]. Для этой цели достаточно предположить наличие двух механизмов релаксации намагниченности, что находится в хорошем соответствии с физическими представлениями о намагничивании ферросuspензии. Действительно, при наложении поля в направлении поля намагниченность ферросuspензии мгновенно при $\tau_1 = 0$ оказывается равной m_{10} за счет нееловского механизма релаксации. По истечении времени t порядка τ_2 намагниченность ферросuspензии возрастает на значение m_{20} за счет броуновского механизма намагничивания. Причем в рассматриваемой системе уравнений учет члена с коэффициентом K_3 в уравнениях состояний (3.3) означает учет влияния внутренних полей на значение намагниченности \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 соответственно, обусловленных наличием намагниченностей \mathbf{m}_2 и \mathbf{m}_1 . Все это в некотором отношении напоминает ситуацию, имеющую место в антиферромагнетиках, где также учитывается наличие двух эффективных полей, обусловленных наличием намагниченностей \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 подрешеток.

Поступила 2 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. — Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 12.
2. Суязов В. М. О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости. — ПМТФ, 1970, № 2.
3. Суязов В. М. Об уравнениях движения взаимопроникающих электромагнитных жидкостей. — Магнитн. гидродинамика, 1971, № 2.
4. Суязов В. М. Движение ферросуспензии с деформируемыми частицами во вращающихся однородных магнитных полях. — Магнитн. гидродинамика, 1980, № 1.
5. Bean C. P., Livingston J. D. Superparamagnetism. — J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, N 4.
6. Суязов В. М. К теории эффективной вязкости магнитной жидкости. — В кн.: Материалы II Всесоюз. школы-семинара по магнитным жидкостям. М.: Изд-во МГУ, 1981.
7. Майоров М. М. Измерение вязкости феррожидкости в магнитном поле. — Магнитн. гидродинамика, 1980, № 4.
8. Исаев С. В., Кашевский Б. Э. Внутреннее трение и гидродинамика коллоида анизотропного ферромагнетика в магнитном поле. — Магнитн. гидродинамика, 1980, № 4.
9. Майоров М. М. Экспериментальное исследование магнитной проницаемости феррожидкости в переменном магнитном поле. — Магнитн. гидродинамика, 1979, № 2.
10. Цеберс А. О. О моделях намагничивания ферроколлоида в гидродинамическом потоке. — Магнитн. гидродинамика, 1975, № 4.
11. Berkovsky V. M., Vislovich A. N., Kashevsky B. E. Magnetic fluid as continuum with internal degrees of freedom. — IEEE Transactions on Magnetics, 1980, vol. 16, N 2.
12. Кашевский Б. Э. О моделях магнитной релаксации в феррогидродинамике. — Магнитн. гидродинамика, 1978, № 4.

УДК 632.517.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

Ю. Н. Григорьев

(Новосибирск)

В работах [4—5] в качестве модели двумерной турбулентности рассматривались системы прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости. Имеется ряд примеров, подтверждающих содержательность этой модели. В частности, в ее рамках получены некоторые результаты, интересные с точки зрения статистической теории турбулентности [1], динамической метеорологии [4], численного моделирования обтекания тел при больших числах Рейнольдса [5].

В цитируемых работах в основном изучались вихревые системы в состоянии статистического равновесия. Вместе с тем реальная гидродинамическая турбулентность есть существенно неравновесное состояние жидкости, эволюция которого характеризуется статистической необратимостью. В этой связи представляет интерес исследование неравновесной эволюции в модельных системах методами кинетической теории [7, 8]. Некоторые асимптотические решения иерархии БГКИ-уравнений для системы прямолинейных вихрей рассмотрены в [1].

В настоящей работе неравновесные статистические свойства данной модели исследованы на основе уравнения Лиувилля для ансамбля вихревых нитей. Анализ и суммирование рядов формальной временной теории возмущений выполнены с помощью диаграммной техники Пригожина — Балеску. Для подавления расходимостей на больших временах использовалась процедура перенормировки. Получено замкнутое эволюционное уравнение для функции распределения завихренности, содержащее конвективный оператор Гельмгольца и квазилинейный эллиптический оператор 2-го порядка с нелокальными коэффициентами. Уравнение в явной форме учитывает физический эффект знакопеременной вихревой вязкости, так как местный знак матрицы диссипативных коэффициентов определяется мгновенным распределением завихренности. Показано, что во всей области течения при отсутствии внутренних границ эволюция идет с возрастанием информационно-энтропии и распределение завихренности стремится к стационарному.

1. В неограниченной плоскости (x, y) рассмотрим систему N точечных вихрей с одинаковой интенсивностью циркуляции κ . Декартовы координаты вихрей (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$ канонически сопряжены относительно гамильтониана [6]

$$H_N = - \sum_{i < j}^N V_{ij} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad V_{ij} = \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$