

гипотеза цилиндрических сечений дает большое отклонение. Аналогичная картина наблюдается и для других коэффициентов присоединенных масс.

Для второй решетки с параметрами  $r_1 = 0,4$ ,  $r_2 = 1,4$ ,  $\theta_0 = 0,74$ ,  $h = 0,9$ ,  $N = 30$  удлинение  $\lambda = 5,4$ , густота и угол выноса в среднем сечении равны соответственно  $\tau = 1$ ,  $\beta = 45^\circ$ . В этом случае гипотеза цилиндрических сечений дает хорошее приближение к результатам пространственной теории. На фиг. 3 показана зависимость коэффициентов присоединенных масс  $m_{11}$ ,  $m_{41}$ ,  $m_{71}$  от радиуса для сдвига фазы  $\mu = 2\pi/15$ .

Вопрос о сходимости метода решался на основе численного эксперимента путем сравнения результатов при возрастающих значениях  $N$  и  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Было установлено, что для лопастей с малым удлинением результаты расчетов практически не зависят от величины  $N$ . Уже при  $N_1 = N_2 = 4$ ,  $N_3 = N_4 = 3$  дальнейшее увеличение  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) приводит к изменению результатов в третьем знаке.

Для лопастей с большим удлинением давление существенно меняется по размаху, поэтому сходимость несколько хуже. В этом случае для получения достаточной точности число  $N_2$  разбиений по радиусу следует увеличить. Например, для решетки с  $\lambda = 5$ ,  $\tau = 1$  при  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 6$ ,  $N_3 = N_4 = 3$  дальнейшее увеличение  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) приводит к изменению результатов в третьем знаке.

В заключение следует отметить, что при расчете присоединенных масс гипотеза цилиндрических сечений дает хорошие результаты для лопастей с большим удлинением, а также приемлема для лопастей с малым удлинением в случае, когда форма колебаний не зависит от радиуса, и что в общем случае для лопастей с малым удлинением рекомендуется использовать метод среднего сечения, который хорошо согласуется с пространственной теорией.

Поступила 6 VIII 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М.: Наука, 1969.
3. Горелов Д. Н. Присоединенные массы решетки пластин в несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2.
4. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфман Р. Л. Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1976.
6. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.

УДК 532.032 + 532.527

### ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

П. И. Гешев, Б. С. Ездин

(Новосибирск)

1. Введение. Кроме гидродинамики идеальной жидкости [1, 2], понятие точечных вихрей используется в теории сверхтекучего гелия [3], а также в модели сильно замагниченной плазмы, где поведение электронов и ионов математически эквивалентно вихревому движению [4]. Хотя в реальных явлениях, происходящих в сплошной среде, всегда присутствуют эффекты диссипации энергии, существует большой класс задач, где этими эффектами можно пренебречь. Это справедливо для любой вихревой системы, рассматриваемой на коротких временных интервалах. В жидком гелии при температурах, близких к абсолютному нулю, диссипацией энергии вообще можно пренебречь и систему квантовых вихрей рассматривать как идеальную [3]. Интересным является вопрос интегрируемости уравнений движения вихрей. В  $n$ -мерном фазовом пространстве движение происходит по многообразию размерности  $n-k$ , где  $k$  — число интегралов динамической системы. Необходимое условие стохастичности движения  $n - k > 2$  [5]. В [6, 7] показано, что задача трех вихрей в неограниченном простран-

стве интегрируется точно, в то время как в системе из четырех вихрей при определенных начальных условиях появляются стохастические траектории [6, 8]. Если область движения вихрей ограничена непроницаемыми стенками, то стохастичность появляется уже в системе из двух вихрей [9, 10].

В данной работе показано, что движение двух вихрей между параллельными стенками является еще одним точно интегрируемым случаем.

**2. Уравнения движения и интегралы сохранения.** Для системы идеальных вихрей в неограниченном пространстве уравнения движения впервые получены Кирхгофом [11]. Раус описал движение одного вихря в односвязной области [12], Лин предложил решение для системы из  $N$  вихрей в многосвязной области [13]. В случае движения  $N$  вихрей в односвязной области используется метод конформного отображения [10].

Пусть движение вихрей происходит в двумерной односвязной области с известной границей  $\Gamma$ . В этом случае всю гидродинамическую информацию можно получить из функции тока  $\psi$ , которая удовлетворяет уравнению Пуассона

$$(2.1) \quad \Delta\psi = -\omega$$

и является третьей компонентой векторного потенциала  $\mathbf{A} = (0, 0, \psi)$  поля скорости  $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Правая часть в уравнении (2.1) — это завихренность поля скорости. В случае точечных идеальных вихрей  $\omega$  можно записать в виде

$$(2.2) \quad \omega = \sum_{n=1}^N \gamma_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)),$$

где  $\gamma_n$  — циркуляция вокруг  $n$ -го вихря;  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$  — дельта-функция;  $\mathbf{x}_n(t)$  — мгновенное положение  $n$ -го вихря. Для того чтобы решить уравнение (2.1) с правой частью (2.2) и условием на границе

$$(2.3) \quad \psi(\mathbf{x}_n \in \Gamma) = 0,$$

необходимо знать аналитическую функцию, отображающую область реального движения вихрей  $D$  плоскости  $z = x + iy$  на каноническую область  $|w| \leq 1$  — круг плоскости  $w = u + iv$ . Тогда функция Грина задачи (2.1)–(2.3) определится формулой [14]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(z_0)}{1 - w(z)w(z_0)} \right|.$$

Функция тока имеет вид

$$(2.4) \quad \psi(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - \bar{w}(z_n)}{1 - w(z)\bar{w}(z_n)} \right|,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Скорость  $k$ -го вихря определяется всеми вихрями системы и их изображениями в стенках. Сам  $k$ -й вихрь на себе скорости не наводит. Ввиду этого для нахождения скорости  $k$ -го вихря из (2.4) следует вычесть член  $(\gamma_k/2\pi) \ln|z - z_k|$  и затем взять, согласно определению скорости, производные от получившейся разности в точке  $z = z_k$ . Тогда комплексная скорость вихря определится уравнением

$$(2.5) \quad \frac{d\bar{z}_k}{dt} = \frac{\gamma_k w_k''}{4\pi i w_k'} - \frac{\gamma_k}{2\pi i} \frac{w_k'}{w_k - \bar{w}_k^{-1}} + w_k' \sum_{n \neq k}^N \frac{\gamma_n}{2\pi i} \left[ \frac{1}{w_k - w_n} - \frac{1}{w_k - \bar{w}_n^{-1}} \right],$$

где  $w_k = w(z_k)$ ;  $w_k' = dw(z_k)/dz_k$ ;  $w_k'' = d^2 w(z_k)/dz_k^2$ .

Формулы (2.5) при  $k = 1, \dots, N$  дают динамические уравнения движения системы  $N$  точечных вихрей.

Гамильтониан системы  $N$  идеальных вихрей получен в [10]:

$$(2.6) \quad H(z_k, \bar{z}_k) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \left[ \gamma_k \ln \left| \frac{w_k'}{1 - w_k \bar{w}_k} \right| + \gamma_k \sum_{n \neq k}^N \gamma_n \ln \left| \frac{w_k - w_n}{1 - w_k \bar{w}_n} \right| \right].$$

Нетрудно убедиться, что систему уравнений (2.5) можно представить в гамильтоновой форме

$$\gamma_k \frac{d\bar{z}_k}{dt} = 2i \frac{\partial H(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_k}$$

или

$$(2.7) \quad \gamma_k \dot{x}_k = \partial H(x_k, y_k) / \partial y_k, \quad \gamma_k \dot{y}_k = -\partial H(x_k, y_k) / \partial x_k.$$

Канонически сопряженными переменными являются  $q_k = x_k$ ,  $p_k = \gamma_k y_k$ .

В случае, если «физическая» область движения  $D$  есть круг ( $w \equiv z$ ), в силу инвариантности гамильтониана (2.6) относительно вращений существует дополнительный интеграл движения «момент»  $M = \sum_{k=1}^N \gamma_k |z_k|^2 = \text{const}$ . Постоянство  $M$  связано с сохранением полного момента импульса жидкости в круге [10]. Если «физическая» область движения вихрей — полоса, то гамильтониан (2.6) инвариантен относительно сдвига вдоль нее, и, следовательно, должен существовать дополнительный интеграл движения — «импульс». Действительно, при сдвиге системы координат на  $\delta x$  координаты вихрей получают приращение  $\delta z_k = \delta x$ . Вычислив при помощи уравнения (2.7) вариацию  $H$  и приравняв ее к нулю, получим

$$\delta H = \sum_{k=1}^N \frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial H}{\partial y_k} \delta y_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k y_k \right) \delta x,$$

откуда видно, что сохраняется величина («импульс»)  $P = \sum_{k=1}^N \gamma_k y_k$ .

**3. Движение вихрей в полосе**  $|y| \leq 0,5$ ,  $|x| < \infty$ . Формулы прямого и обратного отображения полосы на единичный круг имеют вид [15]

$$(3.1) \quad w = \frac{\exp(\pi z) - 1}{\exp(\pi z) + 1}, \quad z = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+w}{1-w}.$$

Используя выражения (3.1), (2.6), получаем гамильтониан системы двух вихрей в полосе

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \gamma_1^2 \ln \left| \frac{\pi e^{\pi z_1}}{e^{\pi z_1} + e^{-\pi z_1}} \right| + \gamma_2^2 \ln \left| \frac{\pi e^{\pi z_2}}{e^{\pi z_2} + e^{-\pi z_2}} \right| + 2\gamma_1 \gamma_2 \ln \left| \frac{e^{\pi z_1} - e^{\pi z_2}}{e^{\pi z_1} + e^{\pi z_2}} \right| \right\}.$$

Гамильтоновы уравнения (2.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -\frac{\gamma_1}{4} \operatorname{tg} \pi y_1 - \frac{\gamma_2}{4} \left[ \frac{\sin \pi (y_1 - y_2)}{\operatorname{ch} \pi (x_1 - x_2) - \cos \pi (y_1 - y_2)} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin \pi (y_1 + y_2)}{\operatorname{ch} \pi (x_1 - x_2) + \cos \pi (y_1 + y_2)} \right]; \\ \dot{y}_1 = & \pm \frac{\gamma_2}{4} \left[ \frac{\operatorname{sh} \pi (x_1 - x_2)}{\operatorname{ch} \pi (x_1 - x_2) - \cos \pi (y_1 - y_2)} - \frac{\operatorname{sh} \pi (x_1 - x_2)}{\operatorname{ch} \pi (x_1 - x_2) + \cos \pi (y_1 + y_2)} \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$Q(y_1, y_2) = \exp \left( -\frac{4\pi E}{\gamma_1 \gamma_2} \right) \left( \frac{2 \cos \pi y_1}{\pi} \right)^{\nu} \left( \frac{2 \cos \pi y_2}{\pi} \right)^{1/\nu},$$

где  $\nu = \gamma_1 / \gamma_2$ ;  $E$  — энергия взаимодействия. Теперь систему динамических уравнений можно записать в виде

$$(3.2) \quad \dot{x}_1 = -\frac{\gamma_1}{4} \operatorname{tg} \pi y_1 - \frac{\gamma_2 (1-Q)}{4Q} \frac{(\sin \pi (y_1 - y_2) + Q \sin \pi (y_1 + y_2))}{(\cos \pi (y_1 - y_2) + \cos \pi (y_1 + y_2))};$$

$$(3.3) \quad \dot{y}_1 = \pm \frac{\gamma_2}{4} \frac{(1-Q)}{Q (\cos \pi (y_1 - y_2) + \cos \pi (y_1 + y_2))} \times \\ \times \sqrt{4Q \cos^2 \pi y_2 - (\sin \pi (y_1 - y_2) + Q \sin \pi (y_1 + y_2))^2}.$$

Уравнения движения второго вихря получаются взаимной перестановкой индексов 1 и 2.

Импульс  $P$  и уравнение для разности  $x_1 - x_2$  следующие:

$$(3.4) \quad P = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2;$$

$$(3.5) \quad \operatorname{ch} \pi (x_1 - x_2) = [\cos \pi (y_1 - y_2) + Q \cos \pi (y_1 + y_2)] / (1 - Q).$$

Если подставить  $y_2$  из (3.4) в (3.3), разделить переменные и проинтегрировать по  $y_1$ , можно получить решение  $y_1(t)$  в неявном виде. Период относительного движения вихрей будет выражаться формулой

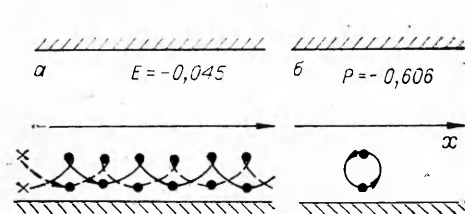
$$(3.6) \quad T = 2 \int_{y_1^*}^{y_1^{**}} \frac{4Q (\cos \pi (y_1 - y_2) + \cos \pi (y_1 + y_2))}{1 - Q} \times \\ \times \frac{dy_1}{\sqrt{4Q \cos^2 \pi y_2 - (\sin \pi (y_1 - y_2) + Q \sin \pi (y_1 + y_2))^2}},$$

где  $y_1^*$  и  $y_1^{**}$  — «точки возврата» — определяются из условия обращения в нуль подкоренного выражения в (3.6). Интеграл (3.6) расходится, если где-то в области интегрирования выполняется равенство  $Q = 1$ . Период  $T$  становится при этом бесконечно большим и движение инфинитным, т. е. вихри, согласно (3.5), неограниченно удаляются друг от друга. В противном случае  $T < \infty$ , движение финитно и вихри движутся связанным образом. Через время  $T$   $y$ -координаты вихрей будут иметь те же значения, что и в начале движения,  $x$ -координаты получат за это время приращение  $\Delta x$ , которое легко определить, интегрируя уравнение (3.2) в пределах от 0 до  $T$ . Ясно, что в системе координат, движущейся со скоростью  $V = \Delta x / T$ , финитное движение вихрей будет происходить по замкнутым траекториям.

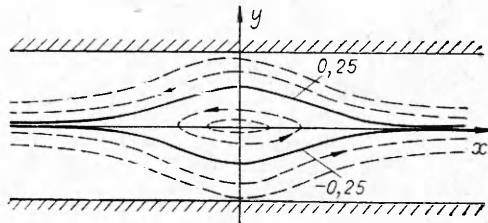
Движение вихрей полностью определяется энергией  $E$  и импульсом  $P$ , которые в свою очередь зависят от величины и знака  $\nu$  и начального положения вихрей. Имеется пять возможных типов траекторий, примеры которых демонстрируются ниже.

Для проверки всех выводов была составлена программа численного счета, позволяющая решать методом Рунге — Кутты систему уравнений (2.5), находить по заданным начальным положениям вихрей значения  $E$  и  $P$ , методом деления отрезка пополам определять границы интегрирования  $y_1^*$  и  $y_1^{**}$ , вычислять периоды движения и скорость системы координат, в которой траектории замкнуты.

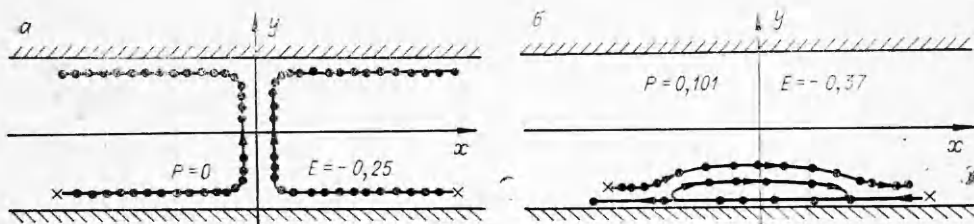
На фиг. 1 показаны периодические траектории вихрей ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $T = 0,682$ ) в покоящейся системе координат (а) и в системе, движущейся со скоростью  $V = 0,689$  (б). Точками указаны последовательные положения вихрей; временной интервал между точками  $t = 0,125$ . Начальное положение вихрей отмечено крестиками. На фиг. 2 показана сепаратриса, разделяющая финитные и инфинитные траектории для  $\nu = 1$  и сим-



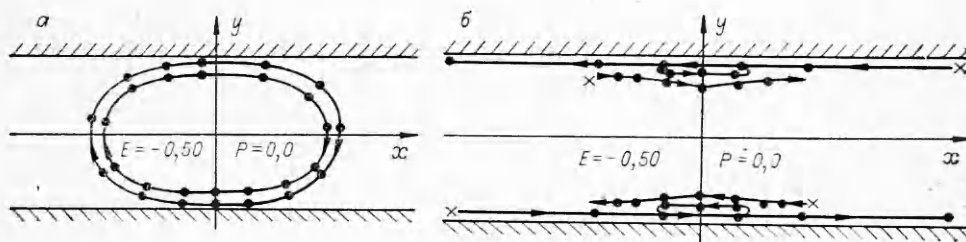
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

метричного начального положения вихрей. Траектории инфинитного движения для  $v < 0$ ,  $\gamma_1 = -\gamma_2 = 1$  представлены на фиг. 3. Если  $y$ -координаты начального положения вихрей одинаковы, т. е.  $P = 0$ , то реализуется симметричная траектория фиг. 3, а. В противном случае реализуется траектория фиг. 3, б. Ближайший к стенке вихрь при этом движется быстрее, определяя знак импульса. Случай, когда для одних и тех же интегралов движения существует несколько различных траекторий, назовем вырожденным (по аналогии с квантовой механикой). Максимальная степень вырождения равна трем. На фиг. 4 показаны траектории трехкратно вырожденного движения, две из них инфинитные (б), одна финитная (а). Строгую классификацию движения вихрей можно провести, исследуя нули подкоренного выражения (3.6) для периода  $T$ .

Таким образом, несмотря на то, что уравнения (3.2), (3.3) не удастся проинтегрировать в простом аналитическом виде, все характеристики движения можно найти с любой степенью точности численными методами, так как решение задачи о двух вихрях между параллельными стенками сведено к квадратурам. Следовательно, этот случай может рассматриваться как еще один пример точно интегрируемого нестационарного движения идеальной жидкости.

В заключение отметим, что изложенная теория движения вихрей имеет чисто кинематический характер: уравнения Эйлера не использовались. Эти уравнения могут быть использованы для нахождения давления в любой точке потока через интеграл Коши — Лагранжа.

Поступила 1 IX 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
3. Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1964.
4. Edwards S. F., Taylor J. B. Negative temperature states of two-dimensional plasmas and vortex fluids.— Proc. Roy. Soc. London, 1974, vol. A. 336, p. 257.
5. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
6. Aref H., Pomphrey N. Integrable and chaotic motions of four vortices.— Proc. Roy. Soc. London, 1982, vol. A 380, p. 359.
7. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 5.
8. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Стохастические свойства системы четырех вихрей.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 3.

9. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Стохастизация вихрей. — Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, № 12.
10. Гешев П. П., Черных А. И. Движение вихрей в двумерной односвязной области. — Препринт № 65, Новосибирск: изд. ИТФ СО АН СССР, 1980.
11. Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
12. Routh E. J. Some application of conjugate function. — Proc-Lond. Math. Soc., 1881, vol. 12, p. 73.
13. Lin C. C. On the motion of vortices in two dimension. Toronto: Univ. Toronto Pres., 1943.
14. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.
15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

УДК 532.51

## ДВА ТИПА ВИХРЕВЫХ ТРУБОК

*В. А. Бубнов, А. А. Соловьев, Х. З. Усток*

(Москва)

Эффективным средством в решении проблемы вихреобразования является экспериментальное и теоретическое моделирование [1—7].

В ряде работ отмечается, что вертикальные потоки в линейных вихрях направлены снизу вверх всюду, начиная от оси вплоть до границы твердого вращения и лишь вдали, на периферии, направление изменяется на противоположное [8, 9]. В других исследованиях замечались нисходящие осевые потоки и восходящие вдоль стенок вихревой трубки [10, 11], структуру вихря называют соответственно одноячейстой и двухъячейстой [10]. В [10] сделана попытка классифицировать вихревые трубки в зависимости от соотношения интенсивности вертикальных потоков и циркуляции. В данной работе сообщается об экспериментальном изучении перехода от одноячейстого вихря к двухъячейстому.

Вихревые трубки возбуждались в вихревой камере. Высота камеры 0,665 м. Диаметр 0,382 м.

В верхней части устанавливался четырехлопастный завихритель, насаженный на ось двигателя. Высота прямоугольных лопаток составляла 0,07 м, ширина в некоторых опытах равнялась 0,05 м, в остальных — 0,10 м. Завихритель крепился на оси двигателя после массивной цилиндрической платформы. Диаметр платформы 0,21 м, высота 0,05 м. Она предназначалась для отклонения потока, который подходил к двигателю после взаимодействия с нижней поверхностью. Кроме того, с помощью этой платформы поддерживалась стабильность частоты вращения завихрителя. Сверху камера закрывалась крышкой. Опыты производились как в закрытой, так и открытой камере, причем кольцевой зазор нужных размеров задавался изменением диаметра крышки.

С помощью зазора в крышке можно было изменить размер зоны, на которой потоку придается угловой момент. Кроме того, с изменением за-

зора варьировался секундный расход  $Q$  вдоль оси вихря: 
$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr,$$

где  $R$  — протяженность зоны восходящих потоков.

Контроль частоты двигателя осуществлялся тахометром. Он состоял из источника света, фотодиода и осциллографа. Измерения скорости и давления производились пятиканальным шаровым зондом с диаметром шарика 0,003 м, укрепленным на стержне диаметра 0,015 м.

Давления в отверстиях зонда измерялись микроманометрами Прандтля. Зонд фиксировался на определенном расстоянии и имел возможность перемещаться по радиусу, по высоте и вращаться вокруг оси державки на угол  $\varphi$ .

В потоке зонд ориентировался по углу  $\varphi$  так, чтобы давления в отверстиях 4 и 5, расположенных поперек державки, становились одинаковыми, т. е.  $p_m = p_4 = p_5$ . В процессе измерений регистрировались: угол  $\varphi$  расположения вектора скорости относительно выбранной плоскости от-