

ЛАМИНАРНАЯ СОВМЕСТНАЯ КОНВЕКЦИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ
ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

П. М. Брдлик, В. И. Дубовик

(Москва)

Исследуется совместная (свободная и вынужденная) конвекция около вертикальной поверхности. Одновременный тепло- и массообмен бинарной смеси описывается системой дифференциальных уравнений ламинарного пограничного слоя с учетом диффузионной теплопроводности. Подход к решению поставленных задач различен в зависимости от того, какое течение берется за основное.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y — координаты,	R_1 — газовая постоянная,
g — ускорение силы тяжести,	c_p — удельная теплоемкость,
T — температура,	λ — коэффициент теплопроводности,
ν — кинематическая вязкость,	f_{wc}, f_{wg} — параметры вдува,
β_T, β_m — коэффициенты термического и концентрационного расширения,	G — число Грасгофа,
a — коэффициент температуропроводности,	R — число Рейнольдса,
M — молекулярный вес,	N — число Нуссельта,
D — коэффициент диффузии,	N_D — массообменное число Нуссельта,
h — коэффициент массоотдачи,	P — число Прандтля,
a_T — термодиффузионная постоянная,	S — число Шмидта

$$f_{wc} = -\frac{1}{3} R_w \left(\frac{G}{4} \right)^{-1/4}, \quad G = \frac{g \beta_T (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2}, \quad R = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad R_w = \frac{v_w x}{\nu}$$

$$N = \frac{\alpha x}{\lambda}, \quad N_D = \frac{hx}{D}, \quad P = \frac{\nu}{a}, \quad S = \frac{\nu}{D}$$

Индексы w — значения на поверхности, ∞ — значения на большом удалении от поверхности, 1—вдуваемый газ, 2—воздух.

Экспериментальное исследование массообмена в двухкомпонентном пограничном слое на вертикальной поверхности [1], обтекаемой вынужденным потоком, указывает на влияние свободной конвекции на процессы тепло- и массоотдачи.

В общем случае диффузионный поток массы i -компоненты в бинарной газовой смеси зависит от градиентов концентрации и температуры

$$j_i = -\rho D \left[\frac{\partial m_i}{\partial y} + a_T \frac{m_i (1 - m_i)}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{i=1,2} \quad (0.1)$$

Первый член в (0.1) описывает массовую диффузию, второй — термическую диффузию. Концентрации компонент смеси связаны с плотностью смеси так:

$$m_i = \rho_i / \rho, \quad m_1 + m_2 = 1$$

Тепловой поток в бинарных смесях включает в себя тепло, передаваемое теплопроводностью и диффузией

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} + a_T \frac{R_1 M^2 T}{M_1 M_2} j_i \quad (0.2)$$

Здесь второй член характеризует диффузионный перенос энергии (диффузионную теплопроводность).

Рассмотрим конвективное движение бинарной смеси около вертикальной пористой пластины, обтекаемой потоком со скоростью U_∞ и температурой T_∞ . Через пористую поверхность пластины вдувается инородный газ в пограничный слой.

Одновременный перенос тепла, массы и количества движения при совместной конвекции описывается уравнениями бинарного ламинарного пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T (T - T_\infty) + g\beta_m (m_1 - m_{1\infty}) \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (0.4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} (q) - \frac{c_{p1} - c_{p2}}{\rho c_p} j_1 \frac{\partial T}{\partial y} \quad (0.5)$$

$$u \frac{\partial m_1}{\partial x} + v \frac{\partial m_1}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (j_1) \quad (0.6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = v_w, \quad T = T_w, \quad m_1 = m_{1w} \quad \text{при} \quad y = 0 \\ u = U_\infty, \quad T = T_\infty, \quad m_1 = m_{1\infty} \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (0.7)$$

Положим, что $T_w > T_\infty$ (при $T_w < T_\infty$ ход рассуждений не изменится). Система координат выбрана так, что ось x направлена вдоль поверхности вверх, а ось y перпендикулярна к ней.

При составлении уравнений (0.3) — (0.6) физические свойства среды принимались постоянными, за исключением членов, выражающих подъемную силу, в которых плотность зависит от температуры и концентрации. Пренебрегаем в данном случае диссипацией энергии и термодиффузией, т. е. вторым членом в выражении (0.1).

1. Влияние вынужденного потока на свободную конвекцию. Примем за основное течение свободную конвекцию и исследуем влияние на нее вынужденного течения. Для этого введем функцию тока Ψ , такую что

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

удовлетворяют уравнению (0.4); новые зависимые и независимые переменные подобия

$$\eta = \frac{c_1 y}{x^{1/4}}, \quad \Psi = 4\nu c_1 x^{3/4} f(\eta), \quad c_1 = \left[\frac{g\beta_T (T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \quad (1.1)$$

тогда вместо (0.3) — (0.6) получим систему

$$f''''(\eta) + 3f(\eta) f''(\eta) - 2f'^2(\eta) + \theta(\eta) + e \varphi(\eta) = 0 \quad (1.2)$$

$$\theta''(\eta) + [3Pf(\eta) + a\varphi'(\eta)] \theta'(\eta) + 3cSf(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi''(\eta) + 3Sf(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (1.4)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi(\eta) = \frac{m_1 - m_{1\infty}}{m_{1w} - m_{1\infty}}$$

$$a = \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_p} (m_{1w} - m_{1\infty}) \frac{P}{S}, \quad c_p = \sum_i c_{pi} m_{iw}$$

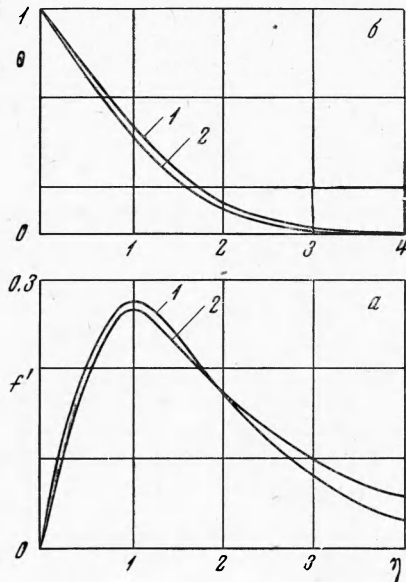
$$c = \frac{a_T R_1 M^2 T_w (m_{1w} - m_{1\infty})}{c_p M_1 M_2 (T_w - T_\infty)} \frac{P}{S} \quad (1.5)$$

$$e = \frac{\beta_m (m_{1w} - m_{1\infty})}{\beta_T (T_w - T_\infty)}, \quad \beta_m = \frac{M_2 / M_1 - 1}{1 + (M_2 / M_1 - 1) m_{1w}}$$

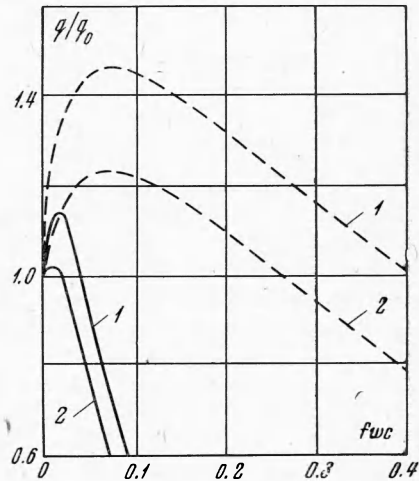
при следующих граничных условиях в новых переменных:

$$\begin{aligned} f'' = 0, f_w = \text{const}, \theta = 1, \varphi = 1 \text{ при } \eta = 0 \\ f'' = 1/2 R G^{-1/2}, \theta = 0, \varphi = 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.6)$$

Неавтономное граничное условие на бесконечности для f'' не оказывает существенного влияния на результаты решения. Так, на фиг. 1 дано сравнение профилей скорости (а) и температуры (б) для простейшего случая смешанной конвекции при $P = 0,72$ и $B = 0,1$, когда отсутствует массообмен и пористая подача вещества на стенке, с решением А.



Фиг. 1



Фиг. 2

Шевчика [2] (кривые 1), выполненным для этого случая, но другим методом — разложением в ряд по параметру $R / G^{1/2}$.

В уравнениях (1.2) — (1.4) штрих означает дифференцирование по η . Параметр $B = R / 2G^{1/2}$ характеризует влияние вынужденного течения на свободную конвекцию. Составляющие скорости u, v выражаются соотношениями

$$u = 4\nu c_1^2 x^{1/2} f''(\eta), \quad v = \nu c_1 x^{-1/2} [\eta f''(\eta) - 3f(\eta)] \quad (1.7)$$

Граничное условие $f_w = \text{const}$ означает, что

$$v_w = -3\nu c_1 x^{-1/2} f_w, \text{ или } v_w \sim x^{-1/2}.$$

Как показано в работах [3,4], закон изменения v_w при свободной и вынужденной конвекции оказывает сравнительно слабое влияние на пограничный слой и теплообмен.

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.2) — (1.4) с граничными условиями (1.6) применен следующий итерационный процесс:

- 1) выбираются нулевые приближения для функций $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$;
- 2) в коэффициенты уравнения (1.4) подставляется нулевое приближение $f^{(0)}(\eta)$ и решается краевая задача. Находится нулевое приближение для функции $\varphi(\eta)$;
- 3) подставляя в уравнения (1.2), (1.3) вместо функций $f(\eta)$, $\theta(\eta)$, $\varphi(\eta)$ и их производных нулевые приближения, получаем $f^{(1)}(\eta)$, $\theta^{(1)}(\eta)$. Затем находим по уравнению (1.4) $\varphi^{(1)}(\eta)$ и т. д.

Указанная операция продолжается до тех пор, пока разность между двумя последовательными приближениями искомых функций для всех значений η не станет меньше заранее заданного $\varepsilon > 0$. Линейные краевые задачи, возникающие при каждой итерации, решались методом прогонки [5]. Величина a_T вычислялась по формулам (2-44) — (2-50) работы [6] при $T_w = 328$ °К. В результате проведенных расчетов на ЭВМ М-220 представляется возможным подсчитать профили температуры, скорости и распределение концентрации компоненты 1 в пограничном слое при совместной конвекции при вдуве водорода, гелия, водяного пара и углекислого газа.

Локальный коэффициент теплообмена рассчитывается по формуле

$$N = - \left(\frac{G}{4} \right)^{1/4} \left[\theta'(0) + \frac{P}{S} \frac{a_T R_1 M^2 T_w}{c_D M_1 M_2} \frac{(m_{1w} - m_{1\infty})}{(T_w - T_\infty)} \varphi'(0) \right] \quad (1.8)$$

Для потока массы компоненты 1 (без учета термодиффузии) из выражения (0.1) находим массообменное число Нуссельта

$$N_D = - \left(\frac{G}{4} \right)^{1/4} \varphi'(0) \quad (1.9)$$

На фиг. 2 представлены отношения тепловых потоков для вдува гелия при температурном режиме, характеризуемом отношением $T_w / T_\infty = 1.1$. Видно, что диффузионная теплопроводность оказывает существенное влияние на теплообмен. При малых вдувах интенсивность теплообмена возрастает; кривые имеют максимум. В случае свободной конвекции при учете диффузионной теплопроводности максимум достигается при параметре вдува (сплошная кривая 1)

$${}^{1/3}R_w ({}^{1/4}G)^{-1/4} = 0.015$$

а без учета диффузионной теплопроводности (пунктирная кривая) при

$${}^{1/3}R_w ({}^{1/4}G)^{-1/4} = 0.076$$

Для параметра вдува, равного 0.05, разница между величинами q / q_0 , подсчитанными с учетом диффузионной теплопроводности и без нее составляет 60%. При больших вдувах, следствием чего является утолщение пограничного слоя, теплообмен уменьшается, причем при учете диффузионной теплопроводности q становится меньше q_0 (без вдува). В случае, когда диффузионный эффект не учитывается, q становится равным q_0 при параметре вдува, равном 0.41.

Кривые 2 на фиг. 2 получены при учете влияния вынужденного течения на свободную конвекцию ($B = 2$). В этом случае для параметра вдува, равного 0.1, отношение q / q_0 уменьшается за счет влияния вынужденной конвекции при учете диффузионной теплопроводности на 14%, а без учета — до 20%.

2. Влияние свободной конвекции на вынужденную. Для рассмотрения влияния свободной конвекции на вынужденную сведем систему (0.3) — (0.6) к обыкновенным дифференциальным уравнениям путем введения независимой переменной

$$\eta = y (U_\infty / \nu x)^{1/2}$$

и функции тока

$$\Psi = (U_{\infty} \nu x)^{1/2} f(\eta)$$

В новых переменных составляющие скорости выразятся следующим образом:

$$u = U_{\infty} f'(\eta), \quad v = -\frac{1}{2} \left(\frac{U_{\infty} \nu}{x} \right)^{1/2} [f(\eta) - \eta f'(\eta)] \quad (2.1)$$

и вместо системы (0.3) — (0.6) получаем

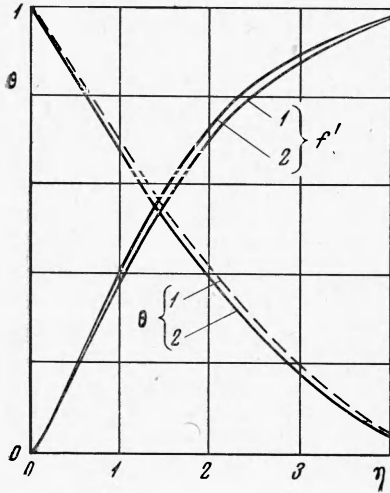
$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) + [\theta(\eta) + \epsilon \varphi(\eta)] \frac{G}{R^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\theta''(\eta) + [\frac{1}{2} P f(\eta) + a \varphi'(\eta)] \theta'(\eta) - \frac{1}{2} c S f(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi''(\eta) + \frac{1}{2} S f(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (2.4)$$

где $\theta(\eta)$, $\varphi'(\eta)$, a , c и ϵ определяются по формулам (1.5)

Переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям возможен при условии, что $A = G/R^2 = \text{const}$. Это выполняется точно, если $T_w - T_{\infty} = Cx^n$, $n = \text{const}$. Однако для нашего случая, т. е. $T_w - T_{\infty} = \text{const}$,



Фиг. 3

для вынужденной конвекции; при больших значениях A процесс свободной конвекции будет оказывать влияние на вынужденное течение и теплообмен.

Граничные условия (0.7) для системы (2.2) — (2.4) в новых переменных для случая совпадающих по направлению потоков при совместной конвекции будут

$$\begin{aligned} f' = 0, \quad f_w = \text{const}, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \\ f' = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

В случае противоположных направлений свободной и вынужденной конвекции в граничных условиях (2.5) имеем $f'(\infty) = -1$ для $\eta \rightarrow \infty$.

Система уравнений (2.2) — (2.4) решалась методом, описанным в п. 1 для совпадающих и противоположных по направлению потоков свободной и вынужденной конвекции.

Результаты численных расчетов позволяют получить тепловые и массовые потоки на вертикальной поверхности при вдуве инородных газов для различных значений параметра G/R^2 .

