

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЭРОЗИОННОГО ГОРЕНИЯ

В. А. Архипов, Е. А. Зверев, Д. А. Зимин

НИИ прикладной математики и механики при ТГУ, 634050 Томск, leva@niipmm.tsu.ru

Предложена новая методология экспериментального изучения процессов горения конденсированных веществ, основанная на постановке и решении обратных задач. Поставлена обратная задача восстановления скорости эрозионного горения твердых топлив по экспериментальным данным. Проведено обоснование выбора подхода к решению задачи на основе совместного рассмотрения известных методов решения обратных задач и специфики экспериментальных исследований процессов горения, в частности эрозионного горения. Решение задачи проиллюстрировано численным примером. В ходе тестирования проведен сравнительный анализ двух оптимизационных методов: при одинаковой точности обоих методов для задач данного класса метод быстрого спуска обладает более высокой скоростью сходимости по сравнению с методом сопряженных градиентов.

Вопросы экспериментального определения внутриваллистных параметров (скорость горения топлива, дисперсность конденсированных частиц, коэффициент эрозии и др.) продолжают оставаться актуальными как при совершенствовании и разработке ракетных и артиллерийских систем, так и для дальнейшего развития теории горения конденсированных веществ. В частности, знание зависимости скорости горения от параметров тангенциально набегающего потока (так называемое эрозионное горение) необходимо для проектирования ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ), так как в канале заряда наблюдаются значительные скорости потока, особенно в узких щелях, а в бесопловых РДТТ скорости потока могут быть сверхзвуковыми.

Получение зависимости скорости горения твердого топлива от некоторых безразмерных параметров, характеризующих условия обдува, и использование этой зависимости при проектировании твердотопливных энергоустановок является целью экспериментального исследования эрозионного горения. Известен широкий спектр методов получения данной зависимости — от простейших (прерывание горения с последующим измерением толщины сгоревшего свода Δe за время горения образца t_k) до сложных и дорогостоящих, включающих скоростную киносъемку, рентгеновский, емкостный, ультразвуковой, микроволновый методы, обеспечивающие непрерывное измерение толщины сгоревшего свода $\Delta e(t)$. Достаточно пол-

ный анализ этих методов приведен в [1].

Эффекту эрозионного горения со времени его открытия О. И. Лейпунским в 1942 г. было посвящено множество теоретических и экспериментальных работ. Однако лишь публикации [1–4] содержат результаты исследований в условиях звукового и сверхзвукового обдува, в то время как потребности практики диктуют получение новых данных именно в этих условиях. Жесткие условия экспериментов (высокие давления и температуры, нестационарность процессов и т. д.) существенно ограничивают возможности проведения прямых измерений [4]. Методы обработки экспериментальных данных, связанные с осреднением по времени, не позволяют достичь требуемой точности.

В работе [5] была проведена серия экспериментов по исследованию эрозионного горения в сверхзвуковом потоке: рассматривался участок плоского расширяющегося канала (рис. 1), одна из сторон которого образована исследуемым образцом твердого топлива. В начальный момент времени t_0 во входное сечение поступает сверхзвуковой поток продуктов сгорания, формируемый газогенератором. Состав продуктов сгорания газогенераторного и исследуемого образцов предполагается одинаковым. Поступающий поток воспламеняет исследуемый образец твердого топлива. Вследствие его выгорания происходит изменение конфигурации канала, параметров течения и характеристик горения. В процессе горения могут быть измерены

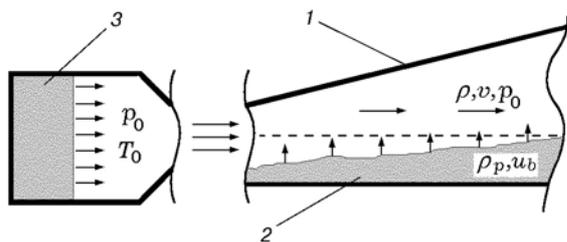


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 — стенка сопла, 2 — исследуемый образец твердого топлива, 3 — газогенератор

давление и температура в камере газогенератора. Затем в момент времени t_k осуществляется принудительное гашение и определяется выгорание образца путем измерения толщины сгоревшего свода $\Delta e(t_k)$ в равноудаленных сечениях образца с шагом 5 мм вдоль его длины. На основе проведенных измерений требуется определить скорость эрозионного горения.

Поверхность исследуемого образца покрыта характерной для эрозионного горения рябью (высота бугорков сопоставима с величиной самого выгорания при значениях $t_k \approx 0,1$ с), что вносит существенную погрешность в измерение зависимости $\Delta e(t_k)$. С другой стороны, дальнейшее увеличение времени горения исследуемого образца приводит к росту погрешности, обусловленной осреднением параметров потока по времени (давление в канале уменьшилось в три раза по сравнению с начальным давлением при времени горения $t_k \approx 1$ с). Влияние этих факторов не позволяет добиться приемлемой точности в определении искомых характеристик. Поэтому идентификация внутриваллистических характеристик по результатам косвенных измерений и построение их зависимостей от определяющих параметров требуют в общем случае решения соответствующей обратной задачи.

Методы решения обратных задач широко используются при интерпретации экспериментальных данных в различных областях науки и техники. Однако эти методы еще не получили достаточного развития в исследованиях внутрикамерных процессов, хотя сложность и высокая стоимость проведения огневых испытаний обуславливают необходимость увеличения информативности исследований и повышения достоверности получаемых результатов. Возможность широкого внедрения обратных методов связана с современными достижениями теории решения некорректных задач и с развитием вычислительной техники, определяю-

щим возможность численной реализации решения подобных задач. Для решения некорректных задач теории горения были предложены прямые методы, методы теории оптимизации и технология прямого поиска [6].

Настоящая работа посвящена разработке новой методологии экспериментального исследования процессов горения на основе решения обратных задач внутренней баллистики (ОЗВБ) и определению возможностей ее применения для обработки экспериментальных данных по эрозионному горению в сверхзвуковом потоке. Представлена постановка обратной задачи восстановления скорости эрозионного горения по экспериментальным данным. Предлагаемые подходы к ее решению протестированы на примере численного решения модельной задачи.

Как отмечалось в [7], обратные задачи определения количественных характеристик процесса по известным (с погрешностью) результатам их косвенных проявлений являются некорректными. Некорректность обратной задачи определяется 1) неточностью задания измеряемой величины, вызванной погрешностью измерений; 2) неточностью задания оператора, выражающего связь измеряемой величины с искомой, вследствие использования идеализированных моделей.

Наиболее общие подходы к решению некорректных задач — это метод квазирешений В. К. Иванова и метод регуляризации А. Н. Тихонова. Метод квазирешений состоит в априорном задании компактного множества, на котором осуществляется поиск решения на базе физических соображений (количественных и качественных) о характере решения. Метод регуляризации требует от решения определенных условий гладкости. При этом привлекается информация о погрешности экспериментальных данных, которая должна быть согласована с величиной невязки [8]. Выбор подхода определяется спецификой предметной области — особенностями измерений, характером используемых математических моделей и дополнительной априорной информации о решении обратной задачи.

Специфическими особенностями ОЗВБ являются:

- высокая точность измерений первичных параметров;
- привлечение упрощенных математических моделей с целью выделения «элементар-

ного» исследуемого процесса из совокупности сложных процессов;

- достаточно большое количество априорной информации (количественной и качественной) об искомом решении, так как характер зависимости восстанавливаемых внутрибаллистических характеристик от определяющих параметров изучен достаточно хорошо.

Отметим, что невязка экспериментально измеренных и расчетных параметров, минимизируемая при решении ОЗВБ, определяется не столько погрешностями измерений, которые невелики и могут быть легко оценены, сколько упрощениями принятой математической модели по сравнению с реальным процессом. С другой стороны, используя очевидные физические ограничения на искомые решения, можно задать класс корректности — множество, на котором задача нахождения решения соответствующего уравнения является корректно поставленной (корректной по Тихонову) [7, 8]. С учетом указанных особенностей наиболее органичным для ОЗВБ оказался подход, связанный с отысканием квазирешений.

Для численной реализации метода квазирешений обратная задача формулируется в экстремальной постановке и решается с использованием методов теории оптимизации. Задача восстановления эрозионной скорости горения по результатам измерений в экстремальной постановке заключается в определении решения, принадлежащего некоторой заданной области допустимых решений, которое обеспечивает минимум функционала невязки экспериментально измеренных и расчетных величин в рамках принятой модели. В качестве физической модели процесса использовалась схема экспериментальной установки из работы [5], описанная выше.

Выбор измеряемой величины (косвенного проявления) и соответственно функционала невязки определяется простотой и точностью измерения выбранного параметра и его чувствительностью по отношению к искомому параметру. В качестве измеряемой величины взята толщина сгоревшего свода после принудительного гашения образца Δe в зависимости от продольной координаты x . Функционал невязки

$$J = \int_0^L \left[\Delta e(x) - \int_{t_0}^{t_k} u_b(x, t) dt \right]^2 dx, \quad (1)$$

где L — длина канала, u_b — эрозионная ско-

рость горения, задается алгоритмически и рассчитывается на основе заданной модели течения.

Модель течения в сверхзвуковом канале, связывающая измеряемое конечное выгорание с искомой эрозионной скоростью горения, основывается на следующих допущениях:

- воспламенение исследуемого образца твердого топлива происходит мгновенно, процессы зажигания и нестационарного горения не учитываются;
- течение предполагается одномерным и квазистационарным;
- теплотери, объемное тепловыделение и трение не учитываются (модель идеального газа).

Система уравнений, описывающая течение газа в разгорающемся канале с учетом газоприхода от исследуемого образца, в рамках принятых допущений имеет вид [9]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v A) = \rho_p b u_b,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho A v^2) = -A \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v A \left(H + \frac{v^2}{2} \right) \right] = \rho_p b u_b H_b, \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b u_b,$$

$$p = \rho R T.$$

Здесь p , ρ , T , v — давление, плотность, температура и скорость газа в канале; b — ширина горящей поверхности; R — газовая постоянная; A — площадь проходного сечения канала; $H = E + p/\rho = c_p T$ — удельная энтальпия, $E = c_V T$ — внутренняя энергия; c_p , c_V — изобарическая и изохорическая теплоемкости газа; $H_b = \chi c_p T_b$, T_b — температура горения топлива, χ — средний по объему и времени коэффициент тепловых потерь в камере сгорания; ρ_p — плотность топлива.

Начальные условия определяются из расчета системы (2) для невыгоревшего канала. Условия на левой границе рассчитываются для входного сечения канала с использованием газодинамических функций по параметрам торможения потока в газогенераторе.

Известно, что в области положительной эрозии экспериментальные результаты с удовлетворительной точностью аппроксимируются линейной двухпараметрической зависимостью от параметра Вилюнова $I = \rho v / \rho_p u_0 \sqrt{c_f}$ [10] и эрозионная скорость горения определяется выражением

$$u_b = u_0 [1 - k(I - I_0)],$$

где $u_0 = u_1(p/p_a)^\nu$ — скорость горения в отсутствие обдувающего потока, p_a — атмосферное давление, c_f — коэффициент трения. Эту функцию можно рассматривать в качестве искомой, определяя эмпирические параметры k , I_0 .

В то же время представляет интерес получение данных по эрозионному горению в более общем виде. Поэтому естественно решать обратную задачу при менее жестких ограничениях на множество функций ε . Предлагается задавать коэффициент эрозии в виде

$$\varepsilon = E(p/p_a)^\eta (\lambda)^\mu, \quad (3)$$

где $\lambda = v/a_*$ — приведенная скорость потока, a_* — критическая скорость звука. Представление коэффициента ε в виде степенной зависимости от безразмерных параметров типично для обработки экспериментальных данных по эрозионному горению и позволяет отразить результаты, отклоняющиеся от линейной зависимости, без перехода к методам функциональной оптимизации. Тогда искомая скорость эрозионного горения запишется в виде $u_b = \varepsilon u_0$.

Скорость горения положительна, конечна и возрастает с ростом давления и скорости потока. Следовательно, параметры E , η , μ положительны и ограничены сверху. Множество, включающее класс возможных решений, компактно и представляет собой совокупность зависимостей от конечного числа ограниченных действительных параметров [11]. Это позволяет использовать метод квазирешений В. К. Иванова для преодоления некорректности.

Таким образом, обратная задача состоит в отыскании параметров E , η , μ , соответствующих минимуму функционала невязки (1), при ограничениях (2).

В качестве оптимизационных методов для поиска минимума функционала (1) использовались метод быстрого спуска и метод сопряженных градиентов [12]. Их использование

связано с регуляризирующими свойствами градиентных методов, которые позволяют эффективно начинать итерационный процесс от далекой начальной оценки и резко замедляются при приближении функционала к минимуму. В качестве метода одномерного поиска использовался метод Фибоначчи, который также имеет высокую скорость сходимости.

Верификация предложенного метода, подбор оптимальных параметров расчета и выбор наиболее эффективного оптимизационного метода проведены на примере решения модельной задачи в три этапа.

1. Решалась прямая задача (2) с заданными значениями параметров скорости эрозионного горения, которые рассматривались в дальнейшем как «точное» решение: $\bar{E} = 0,8$, $\bar{\eta} = 0,1$, $\bar{\mu} = 0,8$. Прямая задача решалась для следующих значений параметров: $p_0 = 6,35$ МПа, $T_b = 2360$ К, $t_k = 0,84$ с, $b = 10$ мм, $L = 110$ мм, угол расширения канала $\alpha = 10^\circ$, площадь критического сечения сопла газогенератора $A_* = 40$ мм², $c_p = 1,5$ кДж/(кг·К), показатель адиабаты $\gamma = 1,245$, $R = 413$ Дж/(кг·К), $\rho_p = 1,6 \cdot 10^3$ кг/м³, $u_1 = 0,37 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\nu = 0,82$, $\chi = 1$.

2. Решалась обратная задача восстановления скорости эрозионного горения, при этом полученная в ходе решения прямой задачи зависимость $\Delta e(x)$, «возмущенная» генератором погрешности, использовалась в качестве входного («экспериментального») параметра.

3. Полученные на втором этапе значения параметров скорости горения сравнивались с «точным» решением, оценивалась методическая погрешность расчета.

Результаты решения модельной задачи представлены на рис. 2, где приведены проекции траектории спуска на поверхность отклика функционала (1) в зависимости от параметров уравнения (3) при задании «точных» значений следующих параметров: $\bar{\mu} = 0,8$ (рис. 2, а), $\bar{E} = 0,8$ (рис. 2, б) и $\bar{\eta} = 0,1$ (рис. 2, в). Цифрами на рисунках даны значения функционала невязки. Из рис. 2 видно, что функционал выпуклый, имеет единственный минимум и нет никаких особенностей, осложняющих его поиск. Траектория спуска наглядно демонстрирует работу метода быстрого спуска применительно к данной задаче.

Основная проблема при реализации градиентных методов — построение экономичной процедуры вычисления градиента целевого

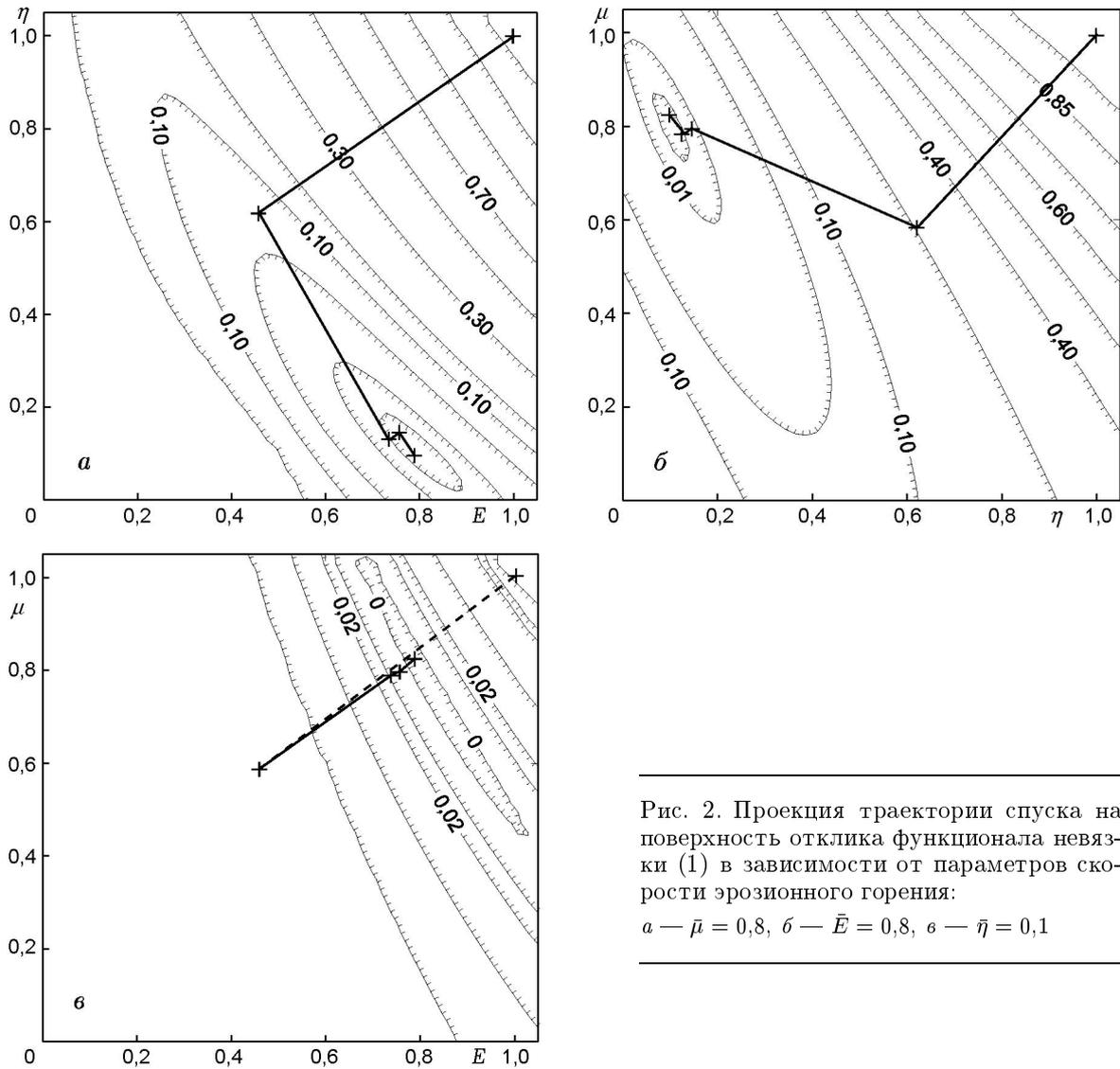


Рис. 2. Проекция траектории спуска на поверхность отклика функционала невязки (1) в зависимости от параметров скорости эрозивного горения:
 а — $\bar{\mu} = 0,8$, б — $\bar{E} = 0,8$, в — $\bar{\eta} = 0,1$

функционала. Наиболее общим (хотя и наименее эффективным) способом расчета градиента является использование конечно-разностной аппроксимации градиента $\partial J/\partial z$ в окрестности рассматриваемого приближения z . Здесь $z = (z_1, \dots, z_k)$ — вектор, аппроксимирующий искомое решение z при дискретизации задачи. В простейшем случае

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = \frac{1}{\Delta z_i} \left[J(z_1, \dots, z_i + \Delta z_i, \dots, z_k) - J(z_1, \dots, z_i, \dots, z_k) \right],$$

где Δz_i — приращение i -й компоненты вектора z .

Помимо того, что необходимы многократные вычисления целевого функционала для

расчета градиента, значительные сложности представляет выбор параметров Δz_i . Поскольку ошибка численной оценки производной складывается из ошибок отбрасывания и ошибок условий, последствия варьирования конечно-разностного интервала для них противоположны [12]. Исследования показали, что оптимально значение $\Delta z_i = 10^{-12}$, $i = 1, 2, 3$.

Для определения оптимального значения параметра одномерного поиска (количества используемых чисел Фибоначчи n) была проведена серия расчетов с различными значениями n . Результаты расчетов представлены на рис. 3. Видно, что значение $n = 25$ является достаточным и его дальнейшее увеличение не улучшает сходимости или точности получаемого решения обратной задачи. При $n = 5, 10$ наблю-

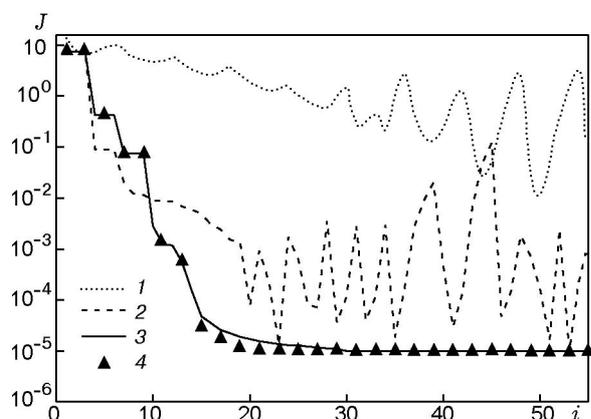


Рис. 3. Зависимость функционала невязки от числа итераций при поиске минимума функционала:

$n = 5$ (1), 10 (2), 25 (3), 50 (4)

даются характерные для обратных задач эффекты неустойчивости в виде осцилляций при приближении функционала к минимуму. Аналогичное проявление эффекта неустойчивости вблизи минимума наблюдается и при $n = 25, 50$, однако осцилляции проявляются значительно позже и с существенно меньшей амплитудой, чем при малых значениях n . Исходя из этого можно найти область устойчивости итерационного оптимизирующего алгоритма, границы которой определяются началом проявления осцилляций, и выбрать в качестве критерия остановки условие неубывания функционала невязки:

$$J_{i+1} - J_i > 0.$$

Область устойчивости метода определяет его минимальную методическую погрешность и соответственно его точность. В этом плане значение $n = 25$ также является оптимальным и его дальнейшее увеличение не приводит к уменьшению методической погрешности.

В процессе отработки метод исследовался также на предмет его устойчивости к вариациям входных данных. Было установлено, что погрешность в определении $\Delta \epsilon(x)$ порядка $10 \div 15\%$ (соответствует данным экспериментов [5]) позволяет восстанавливать параметры скорости горения с методической погрешностью $\approx (3 \div 4)\%$ по сравнению с «точным» решением для всех искомых параметров, что позволяет говорить об его устойчивости.

Сравнение метода быстрого спуска и метода сопряженных градиентов (рис. 4) показало, что метод быстрого спуска облада-

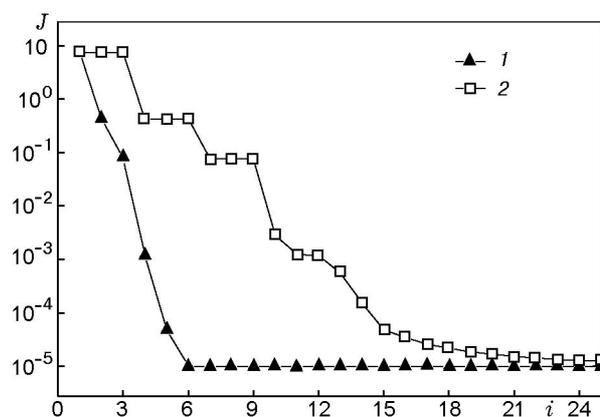


Рис. 4. Зависимость функционала невязки от числа итераций при поиске минимума функционала методом быстрого спуска (1) и методом сопряженных градиентов (2)

ет более высокой скоростью сходимости и, таким образом, эффективнее для решения данной задачи: соответствующее расчетное время для численного решения данной задачи на ЭВМ сокращается в три раза. Это связано с тем, что метод сопряженных градиентов требует большей точности определения направления и величины шага по сравнению с методами быстрого спуска. Вследствие накопления вычислительной ошибки направления перестают быть сопряженными [12]. Из рисунка видно, что шаги по сопряженным направлениям фактически не приводят к уменьшению функционала невязки, что видно на отдельных участках кривой 2 на рис. 4.

Проведенный в работе анализ свойств и особенностей представленного метода, выявивший его устойчивость и приемлемую точность, позволяет рекомендовать метод для обработки экспериментальных данных по эрозионному горению с целью повышения достоверности и информативности дорогостоящих экспериментов. Проведенный подбор оптимальных численных параметров позволяет эффективно вести поиск решения при минимальных затратах времени. Следует также отметить, что конкретность постановки не ограничивает общность подхода, он может быть легко обобщен на случай другой схемы эксперимента, а рассуждения, связанные с выбором подхода к преодолению некорректности, являются общими для исследований процессов горения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Razdan M. K., Kuo K. K. Erosive burning

- of solid propellants // Fundamentals of Solid Propellant Combustion / К. К. Kuo, М. Summerfield (Eds). Progress in Astronautics and Aeronautics; V. 90. 1994.
2. **Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А., Марголин А. Д. и др.** Горение баллистического пороха Н в звуковом потоке // Физика горения и взрыва. 1972. Т. 8, № 4. С. 501–505.
 3. **Вилюнов В. Н., Исаев Ю. М.** Эрозионное горение в сверхзвуковом потоке // Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем: Материалы IX Всесоюз. симпоз. по горению и взрыву. Черногловка, 1989. С. 12–15.
 4. **Traineau J. C., Kuentzmann P.** Ultrasonic measurements of solid propellant burning rates in nozzleless rocket motors // J. Propul. and Power. 1986. V. 2, N 3. P. 215–222.
 5. **Архипов В. А., Зимин Д. А.** Эрозионное горение твердого топлива в сверхзвуковом потоке // Физика горения и взрыва. 1998. Т. 34, № 1. С. 61–64.
 6. **Arkhipov V. A., Zimin D. A., Bondarchuk S. S.** Inverse methods in combustion diagnostics // Proc. Twenty-Seventh Intern. Symp. on Combustion. Boulder, Colorado USA, August 2–7, 1998.
 7. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
 8. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректных задач. Алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
 9. **Ерохин Б. Т.** Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ. М.: Машиностроение, 1991.
 10. **Вилюнов В. Н.** К теории эрозионного горения порохов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136, вып. 2. С. 381–383.
 11. **Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б.** Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990.
 12. **И. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 16/1 2001 г.
