

8. Налимов В. И., Плотников П. И. Нерегулярные задачи на собственные значения и эффект волновода // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1973.— Вып. 23.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1964.

г. Новосибирск

Поступила 6/IX 1988 г.,
в окончательном варианте — 10/III 1989 г.

УДК 532.51

A. M. Батчаев

РЕЖИМЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ЧЕТЫРЕХ КВАЗИДВУМЕРНЫХ ВИХРЕЙ

В последнее время уделяется большое внимание экспериментальному исследованию переходных процессов при возникновении турбулентности в простых гидродинамических течениях. В данной работе моделируется элементарная ячейка квазидвумерного двоякопериодического течения, родственного течению Колмогорова [1—4]. Полученные результаты могут оказаться полезными, например, в приложении к проблеме построения маломодовых систем, описывающих в основных чертах нелинейные процессы в гидродинамических течениях [2, 3].

Первичный режим течения представляет собой стационарную систему четырех квазидвумерных вихрей. Автоколебания в такой системе были впервые обнаружены при изучении конвективных движений в ячейке Хеле — Шоу [5, 6], а впоследствии в однородной жидкости, где течение индуцировалось магнитогидродинамическим приводом [7—9].

Цель настоящей работы — дальнейшее исследование вышеуказанной системы вихрей. Течение создавалось в горизонтальной прямоугольной кювете в слоях различной толщины под действием периодической по обеим координатам МГД-силы. В частности, получена зависимость амплитуды автоколебаний от числа Рейнольдса, проведен спектральный анализ автоколебательных режимов. Рассмотрено влияние придонного трения на характеристики течения.

1. Лабораторное оборудование и методика проведения экспериментов. Эксперименты проводились на установке, описанной в [9]. Течение создавалось внутри прямоугольной кюветы размерами $24 \times 12 \times 3$ см, расположенной горизонтально на плексигласовом корпусе. Внутри корпуса симметрично находятся два трехполюсных электромагнита. Индукция магнитного поля \mathbf{B} электромагнитов в области кюветы имеет вертикальную составляющую, которую приближенно можно представить в виде

$$B_z(x, y, z) = B_0(z) \sin(2\pi x/L_x) \cos(2\pi y/L_y).$$

Здесь $B_0(z)$ — амплитуда $B_z(x, y, z)$ на плоскости $z = \text{const}$; $L_x = 24$ см и $L_y = 12$ см — длина и ширина кюветы по осям x и y , лежащим на плоскости $z = 0$ и совмещенным с двумя смежными сторонами кюветы. Ось z направлена вертикально вверх. В кювету наливается электролит (раствор CuSO_4 концентрации 100 г/л). Между вделанными заподлицо в боковые стенки кюветы медными электродами пропускается электрический ток плотности $\mathbf{j} = (0, j_y, 0)$, на единицу массы жидкости действует сила Ампера $\mathbf{F} = \rho^{-1}c^{-1} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ (ρ — плотность электролита, c — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме). Течение определяется практически только компонентой $F_x = \rho^{-1}c^{-1} j_y B_z$, так как $F_y = 0$, а число Рейнольдса Re по $F_z = \rho^{-1}c^{-1} j_y B_x$ в экспериментах примерно на четыре порядка меньше, чем соответствующее Re по F_x (см. п. 3). Кроме этого, $F_z \leq 10^{-4} g$, где g — ускорение свободного падения. Величина $B_0(z)$ изменяется по закону, близкому к экспоненциальному. В расчетах берется ее значение на среднем уровне данного слоя электролита. Электромагнит подключен к лабораторному стабилизированному выпрямителю ТЭС-18, обеспечивающему постоянную силу тока в обмотках 1000 ± 3 мА. Потребляемая мощность составляет 11 Вт. Система охлаждения сделана на базе ультратермостата U10, подключенного к внешнему водопроводу; в качестве охлаждающей жидкости использовалось транс-

форматорное масло. Температура электролита в течение одного эксперимента поддерживалась постоянной с точностью $\pm 0,1$ °С и контролировалась медно-константановой термопарой. Питание кюветы осуществлялось от лабораторного стабилизированного выпрямителя ТЭС-20. Кювета покрыта сверху плексигласовой крышкой.

Представленные результаты получены на основе измерений разности скорости течения в двух симметричных относительно плоскости $y = \bar{L}_y/2$ точках с помощью термоанемометра, выполненного на базе двух одинаковых микротерморезисторов МТ-54М, подключенных параллельно к измерительному мосту. Терморезисторы погружались на глубину 3 мм от поверхности жидкости в точках с координатами (7,6 см; 1,2 см) и (7,6 см; 10,8 см). Точки выбраны так, чтобы диапазон Re , в котором скорость течения в них не меняет знак, был наибольшим. Для данных точек требование верно при $Re \leq 3Re^*$. Обтекание датчиков стационарное ($Re \sim 10$). Методика позволяет, во-первых, выделить флуктуации скорости относительно среднего значения и, во-вторых, обеспечивает, как показывают оценки, почти линейную характеристику термоанемометра. Это связано с тем, что в исследуемом диапазоне Re вместе с увеличением скорости в одной из указанных точек при автоколебаниях происходит уменьшение скорости примерно на ту же величину в другой. Нелинейности характеристик, расположенных в этих точках терморезисторов, компенсируются. Снимаемый с измерительного моста сигнал через усилитель подается на вход кассетного регистратора [11]. Для контроля записи использовался осциллограф С1-82. Полученная информация затем обрабатывалась на ЭВМ. Типичная запись состоит из $12 \cdot 10^4$ точек при частоте квантования 120 Гц. Параллельно велась запись сигнала на ленту электроизмерителя Н3030-1. Проводились также визуальные наблюдения течения. Подобная методика экспериментов применялась в [4, 9].

2. Безразмерные параметры течения. Исследуемое течение имеет три определяющих безразмерных параметра: а) число Рейнольдса «по внешней силе» $Re = (L_x/2\pi)^3(j_yB_0/\rho cv^2)$ (v — коэффициент кинематической вязкости). Значение Re контролировалось с точностью $\sim 1\%$; б) безразмерный параметр придонного трения $\sigma_0 = (L_x/h)^2$; в) безразмерный геометрический параметр (эксцентриситет) кюветы $\varepsilon = L_xL_y$. Эксперименты проводились при $Re \leq 3Re^*$ в девяти различных слоях жидкости с $122,7 \leq \sigma_0 \leq 1963$ в кювете с $\varepsilon = 2$.

Введем еще одну безразмерную величину — число Рейнольдса по параметру «внешнего трения» $\lambda = v/h^2$ [10]: $Re_\lambda = (h^4/8\pi^3L_x)(j_yB_0/\rho cv^2)$. Ее можно использовать в качестве одного из определяющих параметров ($Re_\lambda = Re/\sigma_0^2$). При изложении результатов экспериментов будем пользоваться общим временным масштабом $\tau_L = L_x^2/v$ и масштабом времени $\tau_h = h^2/v$, полученным по толщине слоя (время затухания). Значения частоты будут представлены соответственно в двух формах: $f_L = L_x^2/Tv$ и $f_h = h^2/Tv$ (T — измеряемый период автоколебаний). Среднее τ_L по всем экспериментам равно $5 \cdot 10^4$ с.

3. Первичный стационарный режим и возбуждение автоколебаний. При малых Re в кювете формируется первичный режим, представляющий собой стационарную систему четырех квазидвумерных вихрей (рис. 1, a). Расположенные на одной диагонали вихри имеют одинаковое направление вращения. При переходе Re через критическое значение $Re^* = Re^*(\sigma_0)$ в течении в мягком режиме возбуждаются автоколебания. Поскольку критическое значение Re существенно зависит от σ_0 , то закритичность течения удобно характеризовать отношением Re/Re^* . При $(Re/Re^*) \sim 1$ автоколебания монохроматичны. За период автоколебаний T происходит одно перезамыкание вихрей с одинаковым знаком, суммарное по всему течению значение вихря остается почти нулевым [9]. При увеличении Re/Re^* частота и амплитуда автоколебаний возрастают, в течении возбуждаются высшие гармоники — усложняется пространственная структура течения. На рис. 1, б—д приведена кинограмма автоколебаний ($t = t_0; t_0 + T/10; t_0 + T/5; t_0 + T/2$) в течении с $\sigma_0 = 843$ при $(Re/Re^*) = 3,1$.

Как и при $(Re/Re^*) \sim 1$, наблюдается циклическое перезамыкание вихрей с одинаковым знаком — сложная пространственная структура течения четко повторяется от периода к периоду. Оцененное по трекам суммарное значение вихря существенно отлично от нуля и периодически меняет знак. Отметим, что в узком диапазоне Re между первичным стационарным и автоколебательным режимами реализуется, возможно, вторичный трехвихревой стационарный режим [8], подробное исследование которого выходит за рамки данной работы. Re^* определялось путем «квазистатического» наращивания Re — значение Re увеличивалось на 2—5 % и затем выжидалось некоторое время, в течение которого поле скорости адаптировалось под новое значение Re . Для $Re \gg Re^*$ время адаптации составляет несколько минут, при $Re \sim Re^*$ — несколько часов (в зависимости от σ_0). Чем больше σ_0 (тоньше слой жидкости), тем динамичнее процессы и время выжидания меньше. Для проведения измерений требуемое Re достигалось «медленным» наращиванием. Отличие данного способа от «квазистатического» в том, что время выжидания как при $Re \ll Re^*$, так и при $Re \geq Re^*$ равнялось 3—5 мин. При таком включении внешней силы оценивалось значение инкремента γ колебаний в слабозакритическом течении. Величина γ при фиксированном σ_0 растет с увеличением Re/Re^* . При фиксированном Re/Re^* γ возрастает при увеличении σ_0 . Типичные значения γ порядка 10^{-3} с^{-1} . Например, в течении с $\sigma_0 = 122,7 \pm 0,4$ при $(Re/Re^*) = 1,18 \pm 0,03$ имеем $\gamma = (0,30 \pm \pm 0,02)10^{-3} \text{ с}^{-1}$; при $\sigma_0 = 843 \pm 3$ и $(Re/Re^*) = 1,06 \pm 0,03$ $\gamma = (1,17 \pm \pm 0,04)10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Приведенные γ получены на отрезке времени, в котором средняя величина амплитуды колебаний была в 4—7 раз меньше установившейся окончательно (в первом случае через 3 ч и во втором через 1 ч).

Использовался еще один способ возбуждения течения — требуемое значение Re устанавливается ударным включением внешней силы. При этом обнаружено, что в течении имеются подкритические затухающие автоколебания. Автоколебания возбуждаются при $Re < Re^*$ ($Re \sim Re^*$) практически сразу после включения внешней силы и через время, равное 3—5 периодам и более, затухают. Время затухания автоколебаний тем больше, чем меньше $Re - Re^*$ и σ_0 . Если ударно устанавливается $Re > Re^*$ ($Re \sim Re^*$), то автоколебания также возбуждаются и затухают, но через некоторое время возбуждаются вновь. При больших $Re - Re^*$ наблюдается подобная картина, однако колебания не затухают полностью, их амплитуда с некоторого ненулевого уровня начинает расти и достигает своего характерного значения. Ударное включение внешней

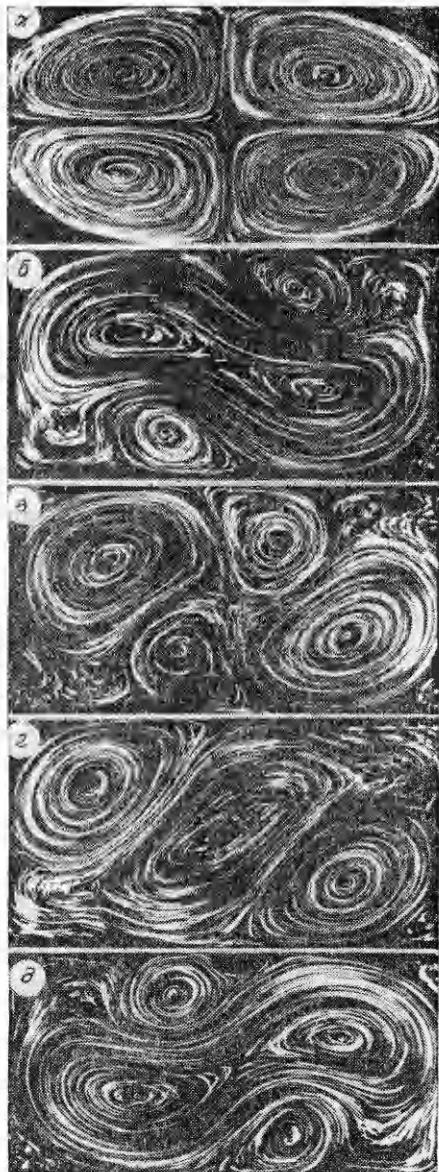
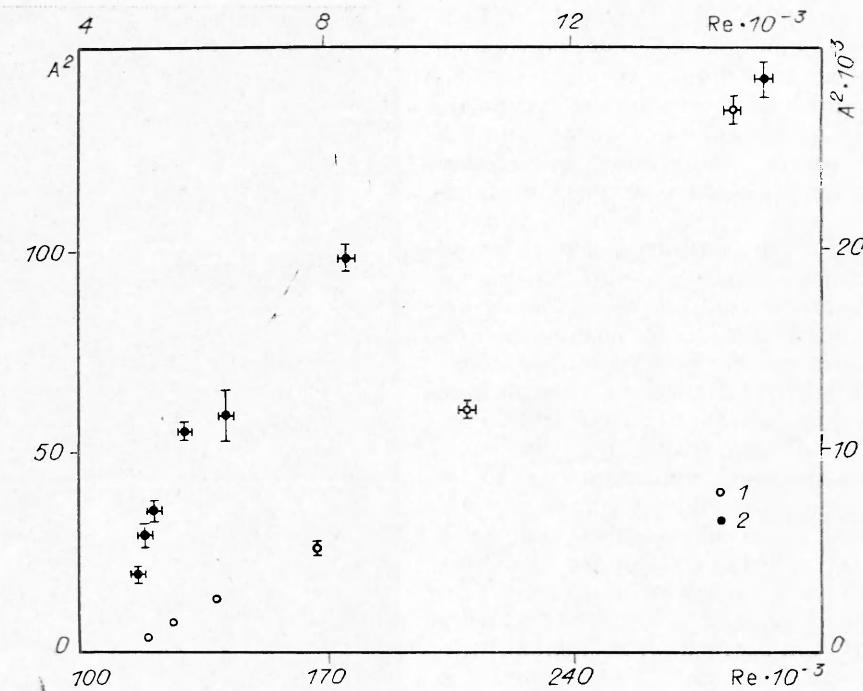


Рис. 1



Р и с. 2

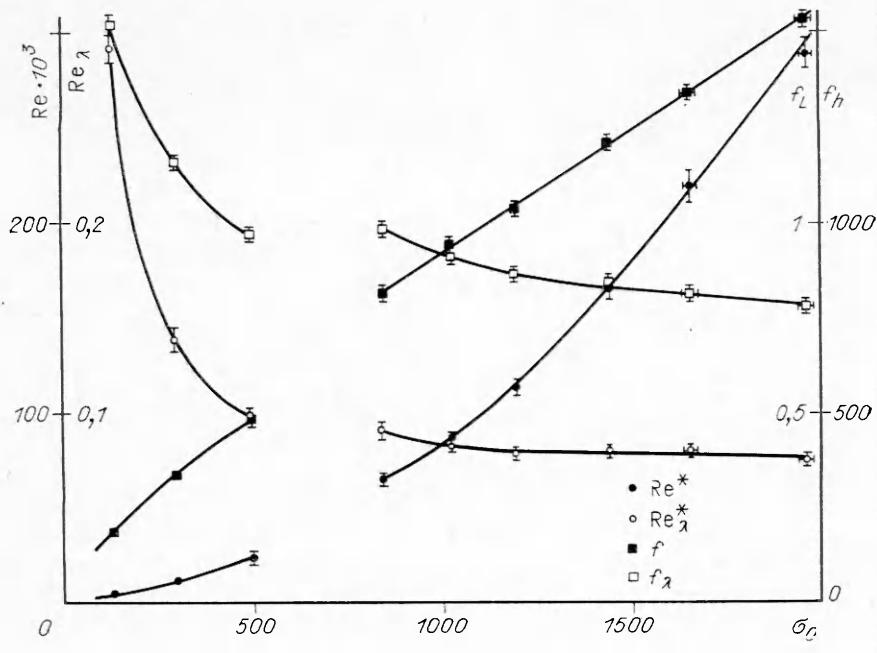
силы можно рассматривать, по-видимому, как внесение в установившееся течение периодического по пространству возмущения конечной амплитуды.

4. Основные характеристики автоколебаний. При малых $Re - Re^*$ для амплитуды сигнала с термоанемометра, пропорционального разности скоростей течения в двух фиксированных симметричных точках, выполняется корневой закон [12]:

$$A = k(Re - Re^*)^{1/2}.$$

Коэффициент $k = k(\sigma_0)$ уменьшается при возрастании σ_0 . При дальнейшем увеличении $Re - Re^*$ в спектре течения возбуждаются высшие гармоники, обнаруживается качественное отличие в поведении зависимости $A^2(Re)$ в слоях с $\sigma_0 \leq 497$ и $\sigma_0 \geq 843$. При $\sigma_0 \leq 497$ экспериментальные точки ложатся на кривую с выпуклостью вниз, а при $\sigma_0 \geq 843$ — с выпуклостью вверх. Это проиллюстрировано на рис. 2, где полученные точки в слое с $\sigma_0 = 122,7 \pm 0,4$ обозначены цифрой 1, а точки, найденные в слое с $\sigma_0 = 1110 \pm 4$, — 2. В первом случае значения A^2 отложены по правой оси ординат и Re — по верхней оси абсцисс, во втором — соответственно по левой оси ординат и нижней оси абсцисс. Вышеизложенное относится к диапазону $1,05Re^* \leq Re \leq 3Re^*$, для $Re < 1,05Re^*$ надежных данных нет. Отметим, что при одинаковом значении Re/Re^* скорость всюду на поверхности слоя заметно возрастает с увеличением σ_0 (за исключением центров вихрей и гиперболической точки). Так, при $(Re/Re^*) = 1$ для составляющей u по оси x в точках расположения зондов в слоях с $\sigma_0 = 497; 843; 1963$ имеем соответственно $u_x = 0,45 \pm 0,04$ см/с; $0,73 \pm 0,07$ см/с; $1,5 \pm 0,2$ см/с. Период автоколебаний T/τ_L монотонно убывает с возрастанием Re при всех σ_0 . Чем меньше σ_0 , тем больше относительное изменение T/τ_L при одном и том же изменении Re/Re^* . Для фиксированного Re/Re^* T/τ_L растет с уменьшением σ_0 [9].

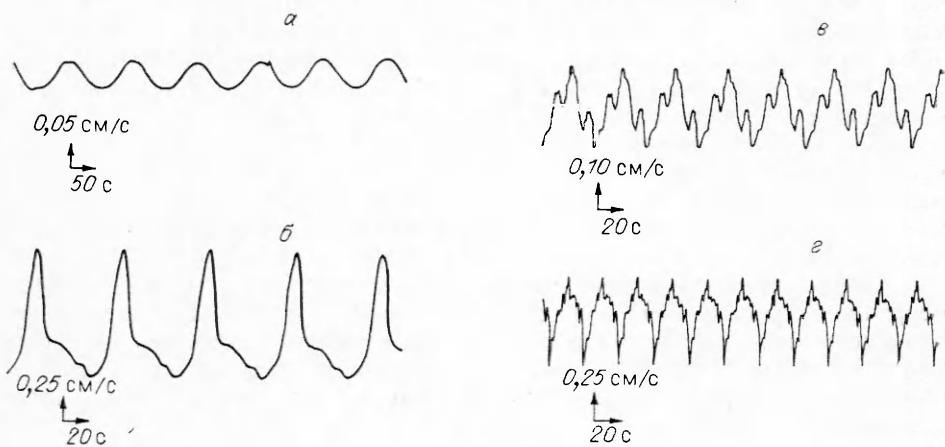
На рис. 3 представлены построенные по экспериментальным точкам зависимости $Re^*(\sigma_0)$, $Re_\lambda^*(\sigma_0)$, $f_L(\sigma_0)$ и $f_h(\sigma_0)$. Приведенные значения $f_L(\sigma_0)$ и $f_h(\sigma_0)$ получены при $(Re/Re^*) = 1,5$. Значения $Re^*(\sigma_0)$ и $f_L(\sigma_0)$ возрастают с увеличением σ_0 ; $Re_\lambda^*(\sigma_0)$ и $f_h(\sigma_0)$ заметно убывают с ростом



Р и с. 3

σ_0 (при $\sigma_0 \leqslant 497$) и слабо меняются при $\sigma_0 \geqslant 843$. Можно предположить, что в интервале $497 < \sigma_0 < 843$ каждая из зависимостей имеет либо точку излома, либо две точки перегиба. Отметим также, что в слоях с $\sigma_0 \geqslant 843$ можно в некотором смысле говорить об автомодельности течения по σ_0 . Рассматриваемое течение при малой безразмерной толщине слоя становится, по существу, однопараметрическим и характеризуется только Re_λ . Применительно к квазидвумерным сдвиговым течениям, определяемым параметрами Re и Re_λ , в [10] показана автомодельность течения в тонких слоях по Re .

При $(Re/Re^*) \sim 1$ временная зависимость сигнала с термоанемометра близка к синусоидальной и усложняется с увеличением Re/Re^* . Во всем диапазоне $Re \leqslant 3Re^*$ в пределах чувствительности электроизмерителя форма автоколебаний воспроизводится во всех деталях рис. 4, а—г — $(Re/Re^*) = 1,13; 3,18; 2,85; 3,85$). При одном и том же значении Re/Re^* форма колебаний заметно усложняется при росте σ_0 , но слабо меняется с изменением σ_0 внутри каждого из интервалов (рис. 4, а, б — $\sigma_0 = 497$ и $\sigma_0 = 843$, 1963). При фиксированном Re/Re^* число



Р и с. 4

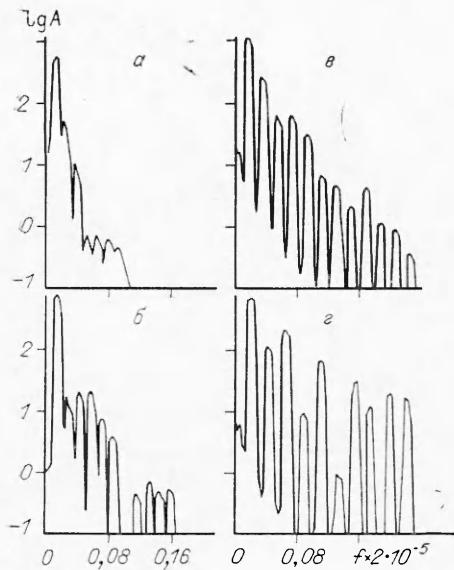


Рис. 5

мы и спектра автоколебаний. Это может быть связано с тем, что с изменением σ_0 меняется набор активно взаимодействующих мод. Вероятно, с уменьшением безразмерной глубины слоя большую роль начинают играть моды меньшего масштаба.

5. Эффект изменения частоты автоколебаний при изменении коэффициента гармоник. Данный эффект удается наблюдать по той причине, что инкременты (соответственно декременты при уменьшении Re) амплитуды основной гармоники больше, чем у обертона. Например, в течении с $\sigma_0 = 843$ путем медленного наращивания установлено $Re = 1,17Re^*$. Приблизительно через 0,5 ч зарегистрировано возбуждение автоколебаний. Инкремент нарастания амплитуды и частота автоколебаний равны: $\gamma = (5,1 \pm 0,2)10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $f_L = 730 \pm 5$ ($T = 69,5 \pm 0,5$ с). В течение 1 ч амплитуда колебаний практически устанавливается, а форма (первоначально близкая к синусоидальной) продолжает меняться из-за возбуждения и развития высших гармоник. Относительная часть энергии, заключенной в них, повышается; частота понижается и равна 710 ± 3 ($T = 70,4 \pm 0,3$ ($T = 70,4 \pm 0,3$ с)). Окончательно амплитуда и форма автоколебаний устанавливается еще через 2 ч, при этом $f_L = 697 \pm 2$ ($T = 71,7 \pm 0,2$ с). Таким образом, при возбуждении высших гармоник частота автоколебаний понижается. Есть и обратный эффект — повышение частоты при затухании гармоник, или при убывании клирфактора. В слабо закритическом течении, в котором значение клирфактора (следовательно, и изменение частоты) мало, в пределах ошибок измерений обнаружить ее изменение не удается.

По-видимому, данный эффект и объясняет тот факт, что чем больше σ_0 , тем меньше относительное изменение частоты при одном и том же изменении Re/Re^* (см. п. 4), поскольку изменение коэффициента гармоник при этом соответственно больше. Количественных оценок на основании имеющихся результатов провести не удается.

Соотношение для изменения частоты автоколебаний при возбуждении обертонов впервые было выведено Ван-дер-Полем [13]. В [3] показано, что имеет место также понижение пространственной частоты (увеличение размеров вихрей, генерируемых при потере устойчивости жидкости, вращающейся внутри эллипсоидальной призмы) при возбуждении пространственных гармоник.

возбуждаемых в течении гармоник также растет с увеличением σ_0 . На рис. 5, *a*—*г* приведены временные спектры автоколебаний в слое с $\sigma_0 = 843$ при $(Re/Re^*) = 1,06; 1,25; 2,12; 2,98$. Соответствующие значения клирфактора (коэффициента гармоник) равны $0,016; 0,036; 0,26; 0,38$. В слоях с $\sigma_0 \leq 497$ при тех же Re/Re^* число возбуждаемых в течении обертона существенно меньше. Например, при $(Re/Re^*) \sim 3$ в течении с $\sigma_0 = 497$ возбуждается всего 5—6 высших гармоник.

Таким образом, поведение зависимостей $Re^*(\sigma_0)$, $Re_h^*(\sigma_0)$, $f_L(\sigma_0)$, $f_h(\sigma_0)$ и $A^2(Re)$ в толстых ($\sigma_0 \leq 497$) и тонких ($\sigma_0 \geq 843$) слоях различаются между собой. Исходя из качественных сравнений, отметим, что при переходе σ_0 через интервал (497, 843) происходит более заметное, чем в остальной области, изменение фор-

Автор выражает благодарность А. М. Обухову за внимание к работе, Ф. В. Должанскому за обсуждение результатов и В. М. Пономареву за помощь в спектральной обработке материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обухов А. М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН.— 1983.— Т. 38, вып. 4.
2. Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
3. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их приложение.— М.: Наука, 1981.
4. Батчаев А. М. Экспериментальное исследование закритических автоколебательных режимов течения Колмогорова на цилиндрической поверхности // Изв. АН СССР. ФАО.— 1988.— Т. 24, № 8.
5. Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернотынский В. Н. О конвективных течениях в ячейке Хеле-Шоу // ДАН СССР.— 1977.— Т. 235, № 3.
6. Путин Г. Ф., Ткачева Е. А. Экспериментальное исследование надкритических конвективных движений в ячейке Хеле-Шоу // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 1.
7. Гак М. З. Лабораторное исследование автоколебаний в системе четырех вихрей // Изв. АН СССР. ФАО.— 1981.— Т. 17, № 2.
8. Пленшанова Л. А. Колебания в системе четырех вихрей // Изв. АН СССР. ФАО.— 1982.— Т. 18, № 4.
9. Батчаев А. М. Экспериментальное исследование характеристик автоколебаний в системе четырех вихрей в слоях жидкости различной толщины // Изв. АН СССР. ФАО.— 1989.— Т. 25, № 4.
10. Должанский Ф. В. О влиянии внешнего трения на устойчивость плоскопараллельных течений однородной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. ФАО.— 1987.— Т. 23, № 4.
11. Ломадзе С. О., Нестерова Т. Н., Смирнов А. С. Автоматизация экспериментальных работ в ИФА АН СССР.— М., 1987.— (Препр./ АН СССР, ИФА; № 2).
12. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
13. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы.— М.: Гостехиздат, 1948.

г. Москва

Поступила 6/III 1989 г.

УДК 532.516

K. Е. Кошелев, M. П. Стронгин

РАСЧЕТ ОТРЫВНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ

В задачах технологии часто возникают проблемы нахождения коэффициентов сопротивления и теплообмена одиночной сферы при существенном отличии ее температуры от температуры натекающего газа. В химически реагирующих системах, кроме того, бывает необходимым детальное знание полей скоростей и температуры течения около частицы.

Обтеканию сферы однородным несжимаемым стационарным потоком посвящено значительное число работ (например, [1—4]). Эти исследования позволили выявить детальную картину течения, совпадающую с экспериментом в таких тонких параметрах, как угол отрыва вихря и длина рециркуляционной зоны за кормой. В последнее время делались попытки расчета неизотермической задачи [5], а также задачи обтекания испаряющейся капли при небольших коэффициентах массообмена [6]. Имеется большое количество работ по сверхзвуковому обтеканию сферы при больших числах Рейнольдса Re_∞ , значительная часть которых обсуждается в [7, 8]. Гиперзвуковое обтекание сферы при умеренных значениях Re_∞ рассматривается в [9], но эти расчеты носят методический характер в силу того, что для описания течения газа при рассматриваемых числах Рейнольдса и Маха, когда числа Кнудсена $Kn = M_\infty/Re_\infty > 0,1$, уравнения Навье — Стокса, вообще говоря, неприменимы. В работах по сверхзвуковому обтеканию сферы авторов обычно интересуют характеристики течения в лобовой части сферы, которые, в основном, определяют коэффициенты сопротивления и теплообмена и параметры ударной волны [10, 11]. Однако, как уже упоминалось, в случае реагирующих потоков горения характеристики течения за кормой сферы, в особенности в зоне отрывного течения, могут оказывать определяющее влияние на параметры процесса.

© 1990 Кошелев К. Б., Стронгин М. П.