

УДК 536.25; 532.546

## ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ<sup>1</sup>

С. М. Зеньковская, Т. Н. Роговенко\*

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

\*Ростовская государственная академия строительства, 344022 Ростов-на-Дону

Исследовано влияние высокочастотных поступательных вибраций на возникновение фильтрационной конвекции в плоском горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, насыщающей пористую среду. На границах слоя поддерживается постоянная температура. Установлено, что при всех направлениях вибрации, отличных от вертикального (поперечного), возможны конвекция в условиях невесомости и тепловая гравитационная конвекция как при нагреве сверху, так и при подогреве снизу. В случае пониженной гравитации найдены значения вибрационного параметра, при которых происходит выход на невесомость. Указанные выводы сделаны на основе анализа осредненных уравнений фильтрационной конвекции, которые выведены для произвольной области.

Конвекция в пористой среде, возникающая в неизотермических условиях, широко распространена в природе и технике и представляет интерес, например, в связи с изучением режима работы элементов теплоизоляции из пористых материалов, которые применяются в современной технике как в земных условиях, так и при космических исследованиях. В этой связи имеет смысл изучить влияние различных факторов на фильтрационную конвекцию с точки зрения управления устойчивостью конвективных течений в пористой среде. Одним из таких факторов является вибрационное воздействие.

В [1] исследовано влияние высокочастотных вертикальных колебаний на возникновение фильтрационной конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, насыщающей пористую среду. Установлено, что вертикальные вибрации препятствуют возникновению фильтрационной конвекции и даже могут полностью подавить ее.

Данная работа является продолжением статьи [1], где изучается влияние направления и скорости вибрации на конвективную неустойчивость в слое вязкой несжимаемой жидкости, насыщающей пористую среду, при заданном поперечном градиенте температуры. Исследование проводится на основе анализа осредненных уравнений, которые являются обобщением уравнений, полученных в [1]. Эти уравнения выведены для произвольной области, а проанализированы в частном случае горизонтального слоя. Получено, что при любом направлении вибрации, отличном от вертикального, возможны эффекты дестабилизирующего характера: фильтрационная конвекция в условиях невесомости, а также существование конвективных режимов при нагреве сверху в условиях гравитации.

Произведен расчет критических значений тепловых и вибрационных чисел Рэлея — Дарси при различных направлениях и скорости вибрации в условиях невесомости и гравитации. В случае пониженной гравитации найдены значения вибрационного параметра, при которых происходит выход на невесомость. Эти выводы могут быть использованы

<sup>1</sup>Данная работа была представлена на совместном X Европейском и VI Российском симпозиуме по физическим наукам в микрогравитации (Санкт-Петербург, 15–20 июня 1997 г.). Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01791).

при наземном моделировании условий невесомости, а также для управления конвекцией в пористой среде.

**1. Постановка задачи и вывод осредненных уравнений.** Пусть сосуд  $D$ , содержащий пористую среду, насыщенную вязкой несжимаемой жидкостью, совершает плоские гармонические колебания вдоль заданного направления  $\mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$  по закону  $a/\omega \cos(\omega t)$ . Уравнения тепловой конвекции в пористой среде в приближении Дарси — Обербека — Буссинеска, записанные в подвижной системе координат, имеют вид [1, 2]

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g\beta T \boldsymbol{\gamma} - \frac{\nu}{K} \mathbf{u} + \mathbf{w}_e \beta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla T) = \chi \nabla T, \quad \mathbf{w}_e = -\frac{a}{\varepsilon} \omega \cos(\omega t) \mathbf{s}.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — относительная скорость фильтрации;  $T$  — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $K$  — проницаемость;  $\varepsilon$  — пористость;  $b = (\rho c_p)_m / (\rho c_p)_f$  — отношение теплоемкостей среды и жидкости;  $\chi$  — эффективный коэффициент теплопроводности;  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх;  $\omega$  — частота колебаний сосуда;  $a$  — скорость;  $\varphi$  — угол направления вибрации с горизонтальной осью;  $\mathbf{w}_e$  — переносное ускорение. Область  $D \subset \mathbb{R}^3$  предполагается ограниченной. Однако, если предположить периодичность по пространственным переменным  $x_1, x_2$ , то можно рассматривать и неограниченные области (слой, цилиндр).

Краевые условия на твердой границе  $\partial D$  запишем в виде

$$u_n \Big|_{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} + b_T T \Big|_{\partial D} = f, \quad (1.2)$$

что соответствует непроницаемости границы и общим условиям теплообмена [2]. Здесь  $b_T, f$  — заданные функции точки границы, при этом функция  $b_T$  может быть кусочно-непрерывной, так что на различных частях границы можно задавать различные условия. Случай  $b_T \rightarrow \infty$  соответствует заданию температуры, а  $b_T = 0$  — заданию теплового потока.

Рассматриваем вибрацию большой частоты ( $\omega \rightarrow \infty$ ) с малой амплитудой  $a/\omega$ , предполагая, что скорость модуляции  $a$  остается конечной. К системе (1.1), (1.2) применяем известный метод осреднения Крылова — Боголюбова [3] аналогично тому, как это сделано в [4] для однородной жидкости и в [1] для пористой среды. Согласно данному асимптотическому методу при больших частотах неизвестные представляются в виде суммы быстрой и медленной компонент, при этом быструю компоненту оказывается возможным выразить через медленную, а для последней осреднение по быстрому времени приводит к замкнутой системе уравнений, в которые входит новая сила, названная в [5] виброгенной. Известно, что этот метод эффективен при исследовании механических систем, находящихся в поле быстроосциллирующих сил. Одним из ярких примеров является стабилизация верхнего положения маятника при вертикальной вибрации точки подвеса. В работах [1, 4] обнаружено, что вертикальная вибрация сосуда с жидкостью, подогреваемого снизу, также стабилизирует ее относительное равновесие. Благодаря применению этого метода в теории конвективной устойчивости появилось новое направление — вибродинамическая конвекция, которая, начиная с [4], изучалась в ряде работ (см., например, [6]).

Обоснование метода осреднения для однородной жидкости дано в [7, 8], где доказано, что исследовать устойчивость периодического решения исходной задачи можно, изучая устойчивость стационарного решения, которое является средним по промежутку времени

$2\pi/\omega$  и удовлетворяет осредненным уравнениям. Метод осреднения для механических систем с вибрационными силами и связями развит в [5], где дана единообразная трактовка многих эффектов вибрационного воздействия.

Для вывода осредненных уравнений фильтрационной конвекции представим решение  $(\mathbf{u}, T, p)$  задачи (1.1), (1.2) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\xi}, \quad T = \tau + \eta, \quad p = q + \delta, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{v}, \tau, q$  — медленные составляющие, а  $\boldsymbol{\xi}, \eta, \delta$  — быстрые, имеющие нулевое среднее по времени.

Уравнения для быстрых неизвестных можно получить, если подставить выражения (1.3) в (1.1) и приравнять главные по  $\omega$  вибрационные члены: порядка  $\omega$  в первом уравнении (1.1) и порядка 1 во втором. Следует заметить, что в обычных условиях коэффициент проницаемости  $K$  достаточно мал, поэтому далее будем предполагать, что  $\nu/K = \lambda\omega$ , причем  $\lambda$  остается постоянной, когда  $\omega \rightarrow \infty$ . Тогда система для быстрых неизвестных примет вид

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\frac{\nabla \delta}{\rho} - \lambda\omega \boldsymbol{\xi} - \frac{a}{\varepsilon} \omega \cos(\omega t) \beta \tau \mathbf{s}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \quad b \frac{\partial \eta}{\partial t} = -(\boldsymbol{\xi}, \nabla \tau). \quad (1.4)$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих в [1] слагаемым  $\lambda\omega \boldsymbol{\xi}$  в первом уравнении, которое следует учитывать, если  $\lambda = O(1)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Как показано ниже, это приводит к переопределению вибрационного числа Грасгофа — Дарси. Исключая в (1.4) давление  $\delta$  применением проектора  $\Pi$  [9], для неизвестных  $\boldsymbol{\xi}$  и  $\eta$  получаем систему уравнений

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\lambda\omega \boldsymbol{\xi} - \frac{a}{\varepsilon} \omega \beta \cos(\omega t) \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \quad b \frac{\partial \eta}{\partial t} = -(\boldsymbol{\xi}, \nabla \tau). \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{w} = \Pi(\mathbf{s}\tau)$ , где  $\Pi$  — ортопроектор в  $L_2(D)$  на подпространство соленоидальных векторов, у которых нормальная составляющая  $w_n$  равна нулю на границе ( $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали). Это означает, что для вектора  $\mathbf{w}$  имеет место представление  $\mathbf{w} = \mathbf{s}\tau - \nabla \Phi$ , где функция  $\Phi$  является решением задачи Неймана

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \mathbf{s}\tau, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\partial D} = (\mathbf{s}\tau, \mathbf{n}). \quad (1.6)$$

Интегрируя систему (1.5) по явно входящему времени, считая при этом температуру  $\tau$  и вектор  $\mathbf{w}$  постоянными на отрезке  $[0, 2\pi/\omega]$ , получаем

$$\boldsymbol{\xi} = (B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)) \mathbf{w}, \quad \eta = \frac{1}{\omega b} (B \cos(\omega t) - C \sin(\omega t)) (\mathbf{w}, \nabla \tau), \quad (1.7)$$

$$B = \frac{-a\beta}{1 + \lambda^2 \varepsilon^2}, \quad C = \lambda \varepsilon B, \quad \lambda = \frac{\nu}{K\omega}.$$

Подставляя (1.7), (1.3) в (1.1), (1.2) и осредняя по явно содержащемуся времени, для плавных составляющих  $\mathbf{v}, \tau, q$  получим замкнутую автономную систему

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla q}{\rho} + g\beta\tau\gamma - \frac{\nu}{K} \mathbf{v} + \frac{a^2 \beta^2}{2\varepsilon^2 (1 + \lambda^2 \varepsilon^2)} (\mathbf{w}, \nabla) \left( \frac{\varepsilon}{b} \mathbf{s}\tau - \mathbf{w} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad b \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \tau) = \chi \Delta \tau, \quad \mathbf{w} = \mathbf{s}\tau - \nabla \Phi, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad (1.8)$$

$$v_n \Big|_{\partial D} = w_n \Big|_{\partial D} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tau}{\partial n} + b_T \tau \right|_{\partial D} = f.$$

В задаче (1.8) перейдем к безразмерным переменным, выбрав масштабы следующим образом:  $(x, t, \mathbf{v}, \tau, q) \rightarrow (l, l^2/\nu, \nu/l, Al, \rho\nu^2/K)$ , где  $l$  — характерный размер полости;  $A$  —

характерное значение градиента температуры. Обозначая безразмерные переменные теми же буквами, что и размерные, получим систему уравнений и краевых условий

$$c \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c}{\varepsilon} (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla q + \text{Gr} \gamma \tau - \mathbf{v} + \text{Gv} (\mathbf{w}, \nabla) \left( \frac{\varepsilon}{b} \mathbf{s} \tau - \mathbf{w} \right), \quad (1.9)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad b \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \tau) = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \tau, \quad \mathbf{w} = \mathbf{s} \tau - \nabla \Phi, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0;$$

$$u_{\tau} \Big|_{\partial D} = w_{\pi} \Big|_{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial n} + b_T l \tau \Big|_{\partial D} = \frac{f}{A}. \quad (1.10)$$

Здесь  $c = K/(l^2 \varepsilon)$  — отношение безразмерной проницаемости к пористости;  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $\text{Gr} = A \beta g l^2 K / \nu^2$  — фильтрационное число Грасгофа — Дарси;  $\text{Gv} = (a \beta A l / \nu \varepsilon)^2 K / (2(1 + \lambda^2 \varepsilon^2))$  — вибрационное число Грасгофа для пористой среды. Осредненная система, полученная в [1], соответствует  $\lambda = 0$ , т. е. отличается определением вибрационного числа Грасгофа и выражениями для быстрых составляющих.

**2. Механическое равновесие и его устойчивость.** В [1] приведены необходимые, а для односвязной области и достаточные условия существования равновесного решения ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ), из которых следует, что только при специальных условиях подогрева и специальной геометрии области  $D$  возможно равновесие. Жидкость может находиться в равновесии только при линейном по вертикальной координате распределении температуры. Такой областью может служить, например, горизонтальный слой или бесконечный круговой цилиндр. Если это прямоугольник, то на вертикальных стенках можно задать условие тепловой изоляции  $\partial T / \partial n = 0$ . Далее рассмотрим случай, когда область  $D$  есть плоский слой  $|y| \leq l/2$ , на твердых границах которого задана температура  $T_1, T_2$ , так что характерный градиент  $A = (T_1 - T_2)/l$ , причем при подогреве снизу  $A > 0$ , а при нагреве сверху  $A < 0$ . Задача (1.9), (1.10), (1.6) имеет стационарное решение

$$\begin{aligned} v_0 = 0, \quad \tau_0 = -y, \quad q_0 = -\text{Gr} \frac{y^2}{2} + \text{const}, \quad w_{0x} = -y \cos \varphi, \\ w_{0y} = 0, \quad \Phi_0 = -\frac{y^2}{2} \sin \varphi + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что у этого решения скорость, температура и давление не зависят от параметров вибрации, поэтому такое же равновесное решение имеет задача о фильтрационной конвекции в отсутствие вибрационных сил. Исследуем устойчивость решения (2.1) относительно малых плоских возмущений  $\mathbf{u}, T, \mathbf{w}, \Phi$ .

Введем функции тока соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w_y = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Тогда линеаризованная система примет вид

$$\begin{aligned} -c \text{Pr} \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t \partial x} - R \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \mu \left[ \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sin \varphi \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \cos \varphi \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \left( 1 - \frac{b}{\varepsilon} \right) w_{0x} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} \right], \\ w_{0x} = -y \cos \varphi, \quad \text{Pr} b \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{Pr}, \quad \Delta F = \frac{\partial T}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial T}{\partial x} \sin \varphi, \\ \psi = F = T = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm l/2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $R = \text{Pr} \cdot \text{Gr}$ ,  $\mu = \text{Gv} \cdot \text{Pr} \varepsilon / b$  — тепловое и вибрационное числа Рэлея — Дарси. Следуя [2], параметр  $c$  полагаем равным нулю. Действительно, коэффициент проницаемости  $K$  является величиной порядка  $10^{-12} \div 10^{-8}$  см<sup>2</sup>, даже для очень пористых волокнистых

металлов значение  $K$  не превышает  $10^{-4}$  см<sup>2</sup>. Пористость изменяется в пределах  $0 < \varepsilon < 1$ ; для металлических материалов она близка к единице, а для насыпей из плотноупакованных сфер  $0,25 < \varepsilon < 0,5$ . Следовательно, коэффициент  $c$  можно положить равным нулю, как, например, при использовании модели Дарси для описания фильтрационной конвекции.

Рассматривая в (2.2) нормальные возмущения вида

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t), T(x, y, t), F(x, y, t) \right) = \exp(\sigma t + i\alpha x) (\text{Pr}^{-1} u(y), \Theta(y), f(y)),$$

получаем спектральную задачу

$$\begin{aligned} Lu = R\alpha^2 \Theta + \mu\alpha^2 \left[ \cos^2 \varphi \Theta + i\alpha \sin \varphi f - \cos \varphi Df - \left(1 - \frac{b}{\varepsilon}\right) w_{0x} Lf \right], \quad w_{0x} = -y \cos \varphi, \\ \text{Pr} b \sigma \Theta = L\Theta - u, \quad Lf = \cos \varphi D\Theta - i\alpha \sin \varphi \Theta, \quad u = \Theta = f = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 1/2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $D \equiv d/dy$ ;  $L \equiv D^2 - \alpha^2$ ,  $\alpha$  — волновое число.

Система (2.3) имеет постоянные коэффициенты при  $b = \varepsilon$  и  $\varphi = \pi/2$ . В [1] доказано, что в этих случаях справедлив принцип монотонности (неустойчивость вызывается монотонными возмущениями). В [10], где рассмотрен случай  $b = \varepsilon$ , решение задачи (2.3) свелось к исследованию трансцендентного уравнения, левая часть которого есть определитель шестого порядка. В данной работе считаем, что отношение  $b/\varepsilon$  произвольно,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $\text{Re} \sigma = 0$ ,  $\text{Im} \sigma \neq 0$ . Для решения спектральной задачи (2.3) применялся метод стрельбы, который заключается в сведении решения краевой задачи к решению задач Коши, а в задачах на собственные значения — в конечном счете к численному решению комплексного трансцендентного уравнения, которое также имеет вид определителя. Задачи Коши решались методом Рунге — Кутты — Фельберга пятого порядка с использованием подпрограммы RKF45 [11]. В качестве одного спектрального параметра выбиралась частота нейтральных колебаний  $\text{Im} \sigma$ , в качестве другого — либо вибрационное число Рэлея — Дарси  $\mu(\alpha, \varphi)$  при  $R = 0$  (конвекция в невесомости), либо тепловое фильтрационное число Рэлея  $R(\alpha, \varphi, \mu)$  (гравитационная конвекция). Отметим, что в результате проведенных вычислений колебательная неустойчивость не обнаружена (на границе устойчивости мнимая часть  $\sigma$  мала:  $\text{Im} \sigma \sim 10^{-8}$ ), что численно подтверждает принцип монотонности.

**3. Конвекция в невесомости.** Известно, что при  $g = 0$  тепловая конвекция отсутствует. Одним из эффектов высокочастотной вибрации является возможность возникновения конвекции в условиях невесомости. Для однородной жидкости эта задача изучалась в [12–14]. Как показано в [1], при поперечной вибрации ( $\varphi = \pi/2$ ) фильтрационная конвекция в условиях невесомости не может возникнуть. Ниже аналитически и численно установлено, что при любом направлении вибрации, содержащем продольную составляющую, в плоском слое возможна конвекция при  $g = 0$ .

При  $\varphi = 0$ ,  $R = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  задача (2.3) имеет только положительные и простые собственные значения  $\mu(\alpha)$ , а при  $\varphi = \pi/2$  — все собственные значения  $\mu(\alpha) < 0$ . Эти утверждения имеют строгое математическое доказательство, основанное на теории осцилляционных операторов М. Г. Крейна и Ф. Р. Гантмахера аналогично тому, как это сделано в работах В. И. Юдовича, применившего данную теорию к задачам гидродинамической теории устойчивости [15]. При  $0 < \varphi < \pi/2$  существование положительных собственных значений  $\mu(\alpha)$  установлено численно.

Полагая в (2.3)  $R = 0$ , численно находим критические значения  $\mu_*(\varphi, b/\varepsilon) = \min_{\alpha} \mu(\alpha, \varphi, b/\varepsilon)$ . Значения параметра  $b/\varepsilon$  выбирались в пределах от 0,5 до 2, характерных для наиболее распространенных пористых сред. Фильтрационная конвекция в пористых слоях различной ориентации изучалась в [16], там же представлены результаты расчетов основных характеристик переноса тепла и проведено их сравнение с опытными данными.

Таблица 1

$\varphi$ , град	$b/\varepsilon = 0,5$		$b/\varepsilon = 0,8$		$b/\varepsilon = 1$		$b/\varepsilon = 1,25$	
	$\mu_*$	$\alpha_*$	$\mu_*$	$\alpha_*$	$\mu_*$	$\alpha_*$	$\mu_*$	$\alpha_*$
0	66,79	3,25	52,63	3,25	46,42	3,26	40,56	3,24
30	114,67	2,88	85,65	2,99	73,87	2,99	63,39	2,92
45	274,35	2,17	193,38	2,06	157,77	2,50	130,79	2,45
50	421,64	1,87	284,64	2,04	233,37	2,15	190,59	2,19
52	512,07	1,74	342,99	1,93	279,74	2,01	227,12	2,06
54	630,45	1,62	419,34	1,78	340,43	1,87	274,84	1,92
56	787,54	1,50	521,00	1,62	420,94	1,73	338,05	1,78
58	999,23	1,39	657,28	1,52	529,39	1,58	423,08	1,65
60	1289,60	1,27	844,53	1,40	677,95	1,46	539,52	1,50
65	2664,77	1,01	1730,44	1,11	1380,03	1,16	1088,55	1,51
70	6504,85	0,78	4199,75	0,85	3333,80	0,89	2664,57	0,94

Значения параметров взяты из таблиц работы [16]. На рис. 1 (для  $b/\varepsilon = 1$ ) и в табл. 1 (для  $b/\varepsilon = 0,5; 0,8; 1; 1,25$ ) приведены зависимости  $\mu_*(\varphi)$  (а в табл. 1 и  $\alpha_*(\varphi)$ ), из которых следует, что с увеличением угла  $\varphi$  вибрационное число Рэлея — Дарси  $\mu_*(\varphi)$  растет, так что область устойчивости расширяется. При фиксированном угле  $\varphi$  с увеличением отношения  $b/\varepsilon$  область устойчивости уменьшается. При  $b/\varepsilon = 1$  и  $\varphi \neq \pi/2$  построена асимптотика вибрационного числа Рэлея  $\mu(\alpha)$  при малых значениях волновых чисел  $\alpha \rightarrow 0$ , которая имеет вид

$$\mu(\alpha) = \frac{120}{\alpha^2 \cos^2 \varphi} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (3.1)$$

Начиная с  $\alpha = 0,1$  численные и асимптотические значения, вычисленные по формуле (3.1), совпадали с точностью до 1 %.

**4. Гравитационная конвекция.** Если  $g \neq 0$ , то вибрационное число Рэлея  $\mu$  можно представить в виде  $\mu = r^2 R^2$ , где параметр  $r^2 = (a/(\sqrt{2gl}))^2 \chi \nu / (K b \varepsilon (1 + \lambda^2 \varepsilon^2))$  не зависит от температуры и характеризует отношение вибрационных и гравитационных сил. Если  $\varphi = \pi/2$ , то существуют только положительные числа Рэлея  $R(\alpha, r)$  [1]. Численное исследование задачи (2.3) показало, что при  $\varphi \neq \pi/2$  существуют как положительные

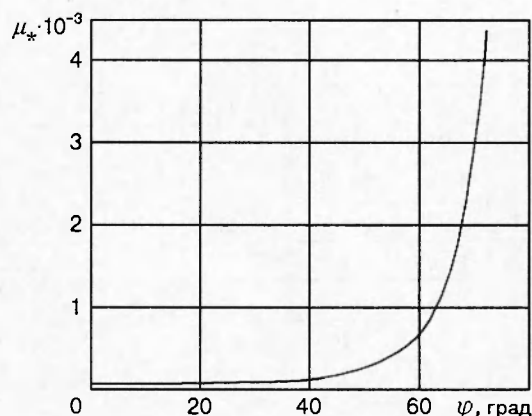


Рис. 1

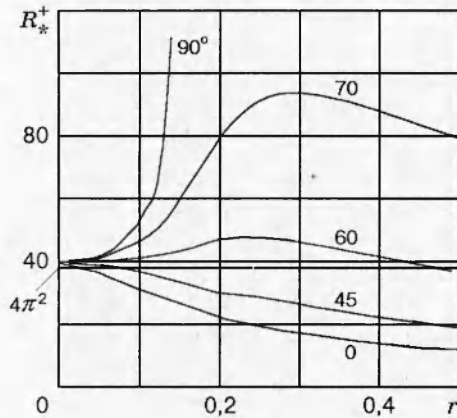


Рис. 2

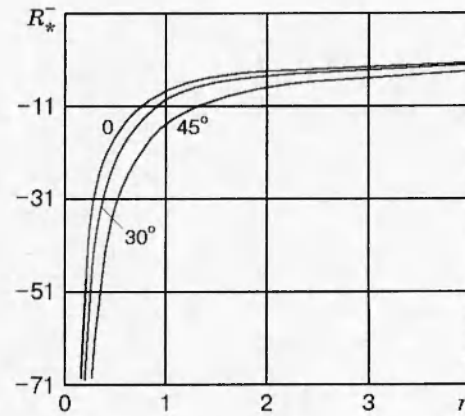


Рис. 3

$R^+(\alpha, r, \varphi)$ , так и отрицательные  $R^-(\alpha, r, \varphi)$  значения чисел Рэлея. Положительные значения соответствуют подогреву снизу, отрицательные — нагреву сверху. Известно, что в отсутствие вибрации конвекция возможна только при  $R > 0$ .

На рис. 2 представлены нейтральные кривые  $R_*^+(r, \varphi) = \min_{\alpha} R^+(\alpha, r, \varphi)$  при  $b/\varepsilon = 1$  для  $\varphi = 0; 45; 60; 70; 90^\circ$ . Линия  $R_*(r) = 4\pi^2$  соответствует значению фильтрационного числа Рэлея в отсутствие вибрации. На графиках видно, что вертикальное направление является исключительным — только в этом случае возможна абсолютная стабилизация. Для углов  $55^\circ \leq \varphi < 90^\circ$  существуют значения параметра  $r$ , при которых имеет место максимальная устойчивость, а при  $0^\circ \leq \varphi < 55^\circ$  вибрация оказывает только дестабилизирующее влияние. На рис. 3 изображены ветви нейтральных кривых  $R_*^-(r, \varphi) = -\min_{\alpha} |R^-(\alpha, r, \varphi)|$  для  $\varphi = 0; 30; 45^\circ$  и  $b/\varepsilon = 1$ , которые существуют только при  $r \neq 0$ . Поведение критических значений параметров  $\mu_*(r, \varphi, R)$  и  $\alpha_*(r, \varphi, R)$  при  $r \geq 1$  отражено в табл. 2. При достаточно больших  $r$  ( $r > 10$ ) критические значения параметров  $\mu$  и  $\alpha$  приближаются практически к тем же, что и в случае невесомости ( $r = \infty$ ). Этот факт можно использовать для наземного моделирования условий невесомости при исследовании фильтрационной конвекции в высокочастотном вибрационном поле.

**Заключение.** Согласно проведенным исследованиям, как и в случае конвекции Обербека — Буссинеска, высокочастотные вибрации могут оказывать и стабилизирующее и дестабилизирующее влияние на конвективную неустойчивость жидкости, насыщающей пористую среду. Можно задержать возникновение конвекции или даже полностью ее пре-

Таблица 2

$\varphi$ , град	$r$	$\mu_*$	$\alpha_*$	$R$	$\varphi$ , град	$r$	$\mu_*$	$\alpha_*$	$R$
0	1	39,10	3,239	6,253	60	1	487,14	1,560	22,071
	5	44,85	3,255	1,339		5	636,77	1,481	5,047
	10	45,63	3,257	0,675		10	657,16	1,472	2,564
	$\infty$	46,42	3,259	0		$\infty$	677,95	1,464	0
45	1	120,10	2,531	10,959	70	1	2368,9	0,950	48,671
	5	149,51	2,466	2,445		5	3126,9	0,901	11,184
	10	153,57	2,459	1,239		10	3229,5	0,896	5,683
	$\infty$	157,77	2,498	0		$\infty$	3333,8	0,891	0

дотвратить, заставляя контейнер совершать вертикальные вибрации. В то же время интенсивная горизонтальная вибрация оказывает дестабилизирующее влияние, вызывая конвекцию в условиях невесомости и микрогравитации. В земных условиях горизонтальная вибрация вызывает конвекцию не только при подогреве снизу, но и при нагреве сверху.

Таким образом, вибрация контейнера может служить средством управления конвективной неустойчивостью в пористой среде.

Авторы выражают благодарность В. И. Юдовичу за внимание к работе, а также С. Славчеву (Болгария) и О. В. Воинову за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зеньковская С. М. Действие высокочастотной вибрации на фильтрационную конвекцию // ПМТФ. 1992. № 5. С. 83–88.
2. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
4. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55.
5. Юдович В. И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 5. С. 622–624.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
7. Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстроосциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб. 1972. Т. 87, № 2. С. 236–253.
8. Левенштам В. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях // Сиб. мат. журн. 1993. № 2. С. 105–122.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
10. Зеньковская С. М., Роговенко Т. Н. О влиянии направления и скорости высокочастотной вибрации на фильтрационную конвекцию. М., 1996. Деп. в ВИНТИ 12.03.96, № 773-В96.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 3. С. 580–584.
13. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Вибрационная тепловая конвекция в невесомости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1983.
14. Зеньковская С. М., Овчинникова С. Н. Термовибрационная конвекция в слое жидкости при невесомости или пониженной гравитации // ПМТФ. 1991. № 2. С. 84–90.
15. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 4. С. 688–698.
16. Власюк М. П., Полежаев В. И. Естественная конвекция и перенос тепла в проницаемых пористых материалах. М., 1975. (Препр. / Ин-т проблем механики АН СССР; № 77).

*Поступила в редакцию 10/IV 1997 г.,  
в окончательном варианте — 27/IV 1998 г.*