

УДК 534.2:532

ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА НЕСФЕРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

А. А. Аганин, М. А. Ильгамов, Д. Ю. Топорков

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111 Казань
E-mails: aganin@kfti.knc.ru, Ilgamov@anrb.ru, dem17@rambler.ru

Исследуется влияние вихревого движения жидкости, возникающего при периодических радиальных колебаниях слабонесферического газового пузырька, на изменение малых начальных искажений сферической формы этого пузырька. Показано, что наиболее интенсивное вихревое движение жидкости возникает в приграничном слое (ближнем поле), в дальнем поле вихревое движение жидкости быстро переходит в потенциальное. Выделены области параметров задачи, в которых вихревое движение в дальнем поле течения не оказывает влияния на колебания пузырька, и области, в которых для получения качественно верного описания колебаний его учет является необходимым.

Ключевые слова: периодическое воздействие, устойчивость сферической формы пузырька, искажение, влияние вихревого движения, завихренность.

Введение. Открытие явления устойчивой периодической однопузырьковой сонолюминесценции, под которым понимается периодическое испускание коротких световых импульсов газовым пузырьком небольшого размера, совершающим колебания в пучности ультразвуковой стоячей волны давления, активизировало проведение исследований динамики пузырька [1, 2]. При этом возрос интерес к изучению особенностей изменения искажений сферической формы пузырька при его периодическом возбуждении. До последнего времени в основном определялись границы областей устойчивых колебаний [3, 4].

В настоящей работе изучается влияние вихревого движения жидкости, возникающего при периодических радиальных колебаниях слабонесферического пузырька, на изменение малых начальных искажений сферической формы этого пузырька. При этом основное внимание уделяется исследованию влияния вихревого движения в дальнем (относительно пузырька) поле течения. Как известно, если находящееся в слабовязкой жидкости тело совершает высокочастотные колебания, амплитуда которых мала по сравнению с его размером, то наиболее интенсивное вихревое движение жидкости возникает в приграничном слое (ближнем поле) толщиной $\delta_c \sim \sqrt{2\nu/\omega_c}$, где ω_c — частота колебаний; ν — кинематическая вязкость жидкости [5]. На расстояниях, больших δ_c (в дальнем поле), движение жидкости быстро становится потенциальным, поэтому во многих случаях вихревым движением в дальнем поле можно пренебречь. Такое допущение принимается в большинстве известных приближенных способов учета влияния вязкости жидкости на динамику газового пузырька (см., например, [6]). Если частота и амплитуда несферических колебаний изменяются в широких диапазонах, то соотношение интенсивностей вихревого движения в ближнем и дальнем (в области $r > R + \delta_c$) полях может изменяться. В настоящей работе

используется модель, в которой эволюция искажения сферичности пузырька описывается уравнением [7], учитывающим вихревое движение жидкости как в ближнем, так и в дальнем поле.

Показано, что на установившемся режиме радиальных колебаний вследствие влияния вихревого движения жидкости в дальнем поле изменение искажения от периода к периоду может быть не только экспоненциальным, как это имеет место под влиянием ближнего поля завихренности, но и значительно более медленным (по степенному закону). Возможен также режим изменения, при котором величина искажения от периода к периоду то уменьшается, то увеличивается (скачкообразное затухание искажения). Установлено, что вихревое движение жидкости в дальнем поле может оказывать существенное негативное влияние на устойчивость сферических колебаний пузырька.

1. Постановка задачи в рамках уравнений неразрывности и движения. Рассматривается изменение малых начальных искажений сферической формы пузырька при его радиальных колебаниях под действием периодически изменяющегося давления окружающей жидкости. На высокоскоростной стадии колебаний вследствие несферичности пузырька вблизи него возникает интенсивное вихревое движение. Завихренность распространяется в жидкости по закону нестационарной диффузии, быстро уменьшаясь по амплитуде. Как правило, для упрощения расчетов этот процесс предполагается квазистационарным [8]. В ряде случаев такое упрощение может приводить к некорректному описанию режимов колебаний. Изучению таких режимов посвящена настоящая работа.

Предполагается, что движение жидкости описывается следующими уравнениями:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau. \quad (1)$$

Здесь t — время; ρ — плотность; \mathbf{u} — скорость; $p = p(\rho)$ — давление; $\tau = \lambda g \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu e$ — тензор вязких напряжений; $\lambda = \mu' - 2\mu/3$; μ' — объемная вязкость; g — метрический тензор; e — тензор скоростей деформаций; μ — динамическая вязкость.

Влияние вязкости газа не учитывается. Предполагается, что на поверхности пузырька $F(x, y, z, t) = 0$ выполняются кинематическое условие

$$F_t + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (2)$$

и динамические (в проекции на нормаль и касательную к поверхности пузырька) условия

$$\mathbf{n}^0 \cdot \{[(p^+ - p^-)g - \lambda g \nabla \cdot \mathbf{u} - 2\mu e^+] \cdot \mathbf{n}^0\} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{n}^0; \quad (3)$$

$$\mathbf{n}^0 \times (e^+ \cdot \mathbf{n}^0) = 0. \quad (4)$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты; σ — коэффициент поверхностного натяжения; \mathbf{n}^0 — единичный вектор внешней нормали; индексы “+” и “-” соответствуют жидкости и газу.

Давление газа в пузырьке p_b полагается однородным, зависящим от его объема V : $p^- = p_b = p_b(V)$. Давление окружающей жидкости p_∞ изменяется по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \quad (5)$$

где p_0 — статическое давление; $\Delta p, \omega$ — амплитуда и частота колебаний.

В системе (1) не учитываются сила тяжести и влияние вязкой диссипации на изменение энергии. Эти факторы полагаются несущественными. Влияние сжимаемости жидкости считается малым.

Постановку задачи (1)–(5) можно использовать при изучении влияния вихревого движения жидкости на деформацию пузырька, однако эту постановку целесообразно упростить.

2. Упрощенная постановка задачи. Принимая во внимание малость несферических возмущений и слабую сжимаемость жидкости, влияние этих эффектов будем учитывать независимо друг от друга. Для этого используем сферическую систему координат (r, θ, φ) , в которой уравнение поверхности пузырька представляется в виде

$$F(r, \theta, \varphi, t) = r - R(t) \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=-i}^{j=i} \varepsilon_{ij}(t) Y_i^j(\theta, \varphi) \right) = 0.$$

Здесь Y_i^j — сферическая гармоника степени i порядка j ($-i \leq j \leq i$); R — радиус сферической составляющей поверхности пузырька; ε_{ij} — отклонение (отнесенное к радиусу R) формы поверхности от сферической в виде Y_i^j , амплитуда которого определяется его модулем $|\varepsilon_{ij}(t)|$, а направление — знаком произведения $\varepsilon_{ij} Y_i^j$ (наружу — при $\varepsilon_{ij} Y_i^j > 0$, внутрь — при $\varepsilon_{ij} Y_i^j < 0$). При $j = 0$ сферические гармоники Y_i^j представляют собой полиномы Лежандра, а пузырек является осесимметричным. Например, в случае $j = 0, i = 2$ при $\varepsilon_{2,0} > 0$ пузырек оказывается вытянутым вдоль оси симметрии, а при $\varepsilon_{2,0} < 0$ — приплюснутым.

С учетом малости искажений ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$) значение ε_{ij} не зависит от j , поэтому далее индекс j опускается. Кроме того, поскольку несферические возмущения малы, можно разделить искажения для каждого значения ε_i в отдельности. Поэтому уравнение поверхности пузырька принимается в виде

$$F(r, \theta, \varphi, t) = r - R(t)(1 + \varepsilon_i(t) Y_i(\theta, \varphi)) = 0. \quad (6)$$

Без учета несферических возмущений и сжимаемости жидкости из (1)–(4) легко получить известное уравнение Рэлея — Лэмба для радиуса пузырька

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_b - p_\infty}{\rho_0} - 4\nu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{\rho_0 R}, \quad (7)$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность жидкости; $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость. Принимается, что давление газа в пузырьке равно

$$p_b = p_b^0 \left(\frac{R_0^3 - AR_0^3}{R^3 - AR^3} \right)^\gamma, \quad (8)$$

где $p_b^0 = p_0 + 2\sigma/R_0$ — начальное давление газа в пузырьке; R_0 — начальный радиус пузырька; A — константа.

Если в (1)–(4) учесть несферические возмущения, но пренебречь сжимаемостью жидкости, то с учетом малости несферических возмущений для определения ε_i можно получить уравнение [7]

$$R\ddot{\varepsilon}_i + \left(5\dot{R} + 2(i+1)(i+2) \frac{\nu}{R} \right) \dot{\varepsilon}_i + \left(R\omega_i^2 + \frac{3\dot{R}^2}{R} + \frac{6\nu i(i+1)\dot{R}}{R^2} - (i-2)\ddot{R} \right) \varepsilon_i + \frac{i(i+1)}{R} \left(\frac{\nu T_i(R, t)}{R} + \frac{2\nu(2i+1)}{R^{2-i}} \alpha_i + \frac{\dot{R}}{R} \beta_i \right) = 0, \quad (9)$$

где

$$\alpha_i = -\frac{i+1}{2i+1} \int_R^\infty \frac{T_i}{r^i} dr, \quad \beta_i = \int_R^\infty \left[\left(\frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \left(\frac{R}{r} \right)^i T_i dr, \quad \omega_i^2 = \frac{\sigma(i^2 - 1)(i+2)}{\rho_0 R^3}.$$

Входящая в (9) функция $T_i(r, t)$ характеризует вихревое движение жидкости и связана с вихрем скорости выражением

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times T_i Y_i \mathbf{e}_r = \frac{T_i}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_i}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta - \frac{T_i}{r} \frac{\partial Y_i}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi$$

($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ — единичные векторы осей r, θ, φ). Функция $T_i(r, t)$ находится из уравнения [7]

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \dot{R} R^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_i}{r^2} \right) + \nu \left(\frac{i(i+1)T_i}{r^2} - \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$T_i(R, t) = \frac{2}{i+1} [(i+2)R\dot{\varepsilon}_i + 3\dot{R}\varepsilon_i + (2i+1)R^{i-1}\alpha_i], \quad T_i(\infty, t) = 0. \quad (11)$$

Следует отметить, что влияние обусловленного вязкостью вихревого движения жидкости, вызванного радиальными колебаниями пузырька, на изменение формы этого пузырька описывается в (9) четвертым слагаемым (определяемым через функцию T_i), влияние вязкости потенциального движения жидкости — вторым и третьим слагаемыми. В литературе для упрощения описания вихревого движения жидкости используются также дополнительные предположения. В частности, в [8] пренебрегается нестационарной диффузией завихренности жидкости. Однако в этом случае не учитывается ряд важных эффектов. Изучению некоторых этих эффектов посвящена настоящая работа.

Без учета сжимаемости жидкости упрощенная постановка рассматриваемой задачи представляется уравнениями (5)–(11). Учет сжимаемости жидкости (в пренебрежении несферичностью пузырька) приводит лишь к изменению уравнения для радиуса пузырька. В настоящей работе сжимаемость жидкости учитывается в соответствии с [9]. В этом случае вместо уравнения Рэлея — Лэмба (7) имеем

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_0} + \frac{4\nu}{c_0 R}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\dot{R}}{c_0}\right) \dot{R}^2 = \\ = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_0}\right) \frac{p_b - p_\infty}{\rho_0} + \frac{R}{c_0} \frac{\dot{p}_b - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - 4\nu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{\rho_0 R} \end{aligned} \quad (12)$$

(c_0 — невозмущенная скорость звука в жидкости). Следует отметить, что, по сути, в (12) учитывается лишь сжимаемость жидкости вдали от пузырька [9].

Таким образом, используемая в настоящей работе упрощенная постановка задачи включает уравнения (5)–(12). Эта постановка использовалась в работах [2–4] при изучении колебаний пузырька в режиме сонолюминесценции.

В рассматриваемых задачах начальные условия принимаются в виде

$$R(0) = R_0, \quad \dot{R}(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}_i(0) = 0, \quad T_i(r, 0) = 0, \quad \varepsilon_i(0) = \varepsilon_i^0, \quad (13)$$

где ε_i^0 — малое начальное значение искажения ε_i .

Исследование проводится при следующих значениях параметров: $\rho_0 = 10^3$ кг/м³; $c_0 = 1500$ м/с; $p_0 = 10^5$ Па; $A = 8,5 \cdot 10^{-3}$; $\nu = 10^{-6}$; $1,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\gamma = 1,4$; $\sigma = 0,073$ Н/м; $\omega/(2\pi) = 26,4$ кГц; 2 мкм $< R_0 < 12$ мкм; $0,95 \cdot 10^5$ Па $< \Delta p < 1,30 \cdot 10^5$ Па. Эти значения соответствуют режиму однопузырьковой сонолюминесценции воздушного пузырька в воде при комнатных условиях, за исключением значения Δp , которое на режиме сонолюминесценции несколько больше ($1,3 \cdot 10^5$ Па $< \Delta p < 1,7 \cdot 10^5$ Па).

В соответствии с используемой методикой расчета задачи (5)–(13) [10] выполняется замена переменных $\xi = R/r$, $\zeta = t$, в результате чего пространственная область интегрирования $R(t) \leq r < \infty$ уравнения (10) преобразуется в интервал $0 < \xi \leq 1$. Этот интервал

разбивается на N равных отрезков длиной $\Delta\xi = 1/N$. Входящие в (9) интегралы вычисляются по формуле трапеций. Частные производные в уравнении (10) аппроксимируются центральными разностями в узлах ξ_k , $k = \overline{1, N}$. В результате такой аппроксимации для отыскания значений сеточной функции $T_{i,k}(\zeta)$, $k = \overline{1, N}$ получаем N обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями в узлах ξ_0 и ξ_{N+1} . Указанная система N обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $T_{i,k}$ совместно с уравнениями (12) и (9) решается методом Дормана — Принса [11].

Как известно, аппроксимация центральными разностями первой производной по пространству может оказаться неприменимой вследствие ее немонотонности. Однако, как показано в [10], в рассматриваемых в настоящей работе задачах использование центральных разностей допустимо, что объясняется наличием в (10) диссипативных вязкостных слагаемых. Проведенные расчеты показывают, что на достаточно мелких сетках центральные и односторонние разности “против потока” дают одно и то же численное решение. При этом вследствие меньшего порядка аппроксимации при использовании односторонних разностей время расчета значительно увеличивается. В [10] также показано, что применяемый в настоящей работе подход является более эффективным по сравнению с методом Бубнова — Галеркина и методом коллокаций. Отметим также, что все представленные в данной работе результаты контролировались на сходимость путем последовательного измельчения расчетной сетки.

3. Устойчивость сферичности пузырька при радиальных колебаниях в зависимости от длины волны возмущения. На рис. 1 в плоскости $(\Delta p, R_0)$ для ряда значений Δp из интервала $0,9 \cdot 10^5 \text{ Па} \leq \Delta p \leq 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\omega/(2\pi) = 20,6 \text{ кГц}$ показаны границы области устойчивых сферических колебаний пузырька (колебания устойчивы при $R < R_0$). Для сравнения приведены также значения полученных в экспериментах [4] радиусов, при которых происходит разрушение пузырька по гармонике $i = 2$. Из рис. 1 следует, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Анализ расчетных кривых, представленных на рис. 1, показывает, что при периодических колебаниях сферическая форма пузырька наименее устойчива к эллипсоидальным возмущениям ($i = 2$). При этом по мере уменьшения длины волны возмущений устойчи-

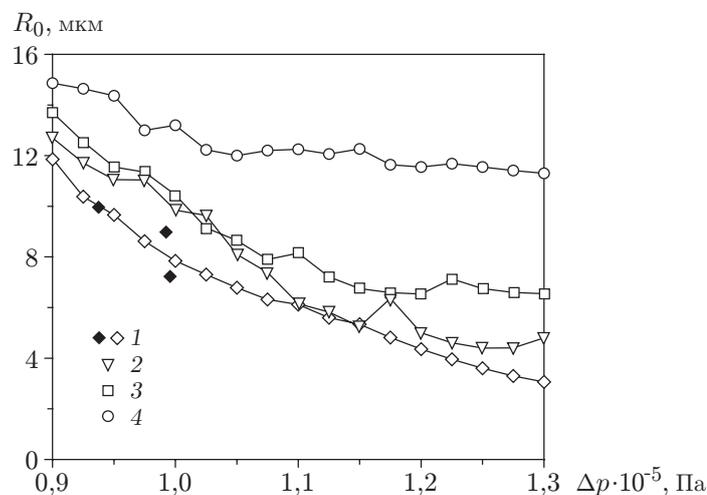


Рис. 1. Границы области устойчивых сферических колебаний пузырька, полученные в расчетах (светлые точки) и экспериментах [4] (темные точки):
 1 — $i = 2$; 2 — $i = 3$; 3 — $i = 4$; 4 — $i = 5$

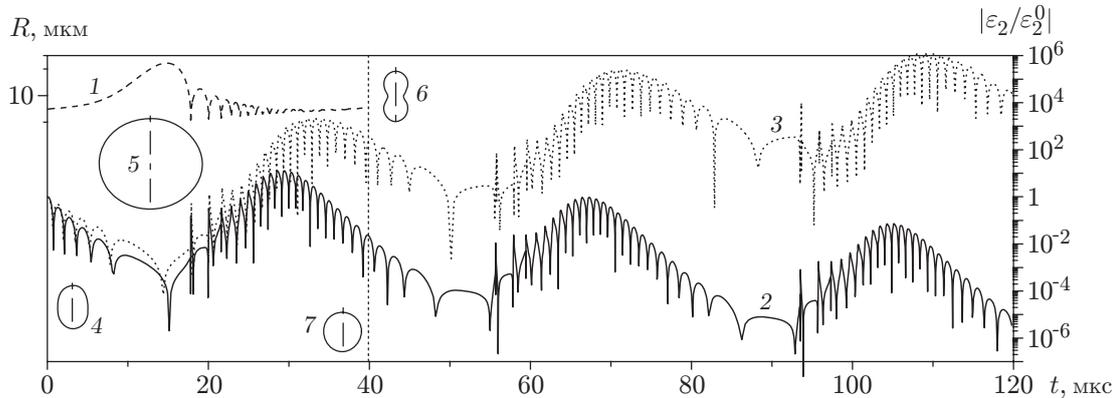


Рис. 2. Зависимости от времени величин R (1) и $|\varepsilon_2/\varepsilon_2^0|$ на устойчивом при $\nu = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (2) и неустойчивом при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (3) режимах колебаний: 4–7 — осевые сечения пузырька (4 — в начале первого периода колебаний, 5 — в момент максимального расширения, 6, 7 — в конце первого периода колебаний: 6 — $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, 7 — $\nu = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$)

вость колебаний формы пузырька повышается. Поэтому в настоящей работе рассматривается случай $i = 2$.

4. Эволюция искажения без учета вихревого движения жидкости в дальнем поле. Рассматривается модель, в которой не учитывается влияние вихревого движения жидкости, обусловленного колебаниями пузырька, как в дальнем, так и в ближнем поле (соответствующее уравнение эволюции искажения можно получить из (9) при $\alpha_i = \beta_i = 0$ и $T_i(R, t) = 0$) [6]. Существуют также другие модели без учета влияния вихревого движения жидкости в дальнем поле. Так, широко известна модель с учетом завихренности жидкости только на поверхности пузырька (соответствующее уравнение эволюции искажения можно получить из (9), если в (9), (11) положить $\alpha_i = \beta_i = 0$, а $T_i(R, t)$ выразить из (11)). Аналогичное уравнение получено, например, в [12]. Используются также модели [8], в которых завихренность жидкости учитывается во всем ближнем поле, но при некоторых упрощающих предположениях.

На рис. 2 приведены временные зависимости R и $|\varepsilon_2/\varepsilon_2^0|$, полученные без учета влияния вихревого движения жидкости при $\nu = 10^{-6}; 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Схематично показаны также осевые сечения поверхности пузырька в начале и конце первого периода колебаний давления жидкости и в момент максимального расширения пузырька для случая $j = 0$. Соответствующие кривые зависимости $R(t)$ и сечения в момент достижения максимального радиуса для указанных выше значений ν совпадают (различие составляет приблизительно 1 %). На рис. 2 показан только первый период колебаний радиуса R .

От периода к периоду искажение изменяется либо в режиме экспоненциального роста (кривая 3 на рис. 2), либо в режиме экспоненциального убывания (кривая 2). Такое изменение величины искажения имеет место и при использовании других моделей без учета вихревого движения жидкости в дальнем поле (в том числе без учета вязкости жидкости). Различаются лишь значения декремента затухания (или инкремента роста).

5. Эволюция искажения при учете вихревого движения жидкости в дальнем поле. На рис. 3 показана эволюция искажения при учете возникающего в дальнем поле вихревого движения жидкости для случая $\Delta p = 1,17 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

5.1. *Увеличение искажения на стадии расширения пузырька.* Увеличение искажения при расширении пузырька отчетливо видно на рис. 3, а на каждом периоде начиная со второго. Этот эффект является парадоксальным для моделей без учета вихревого движения

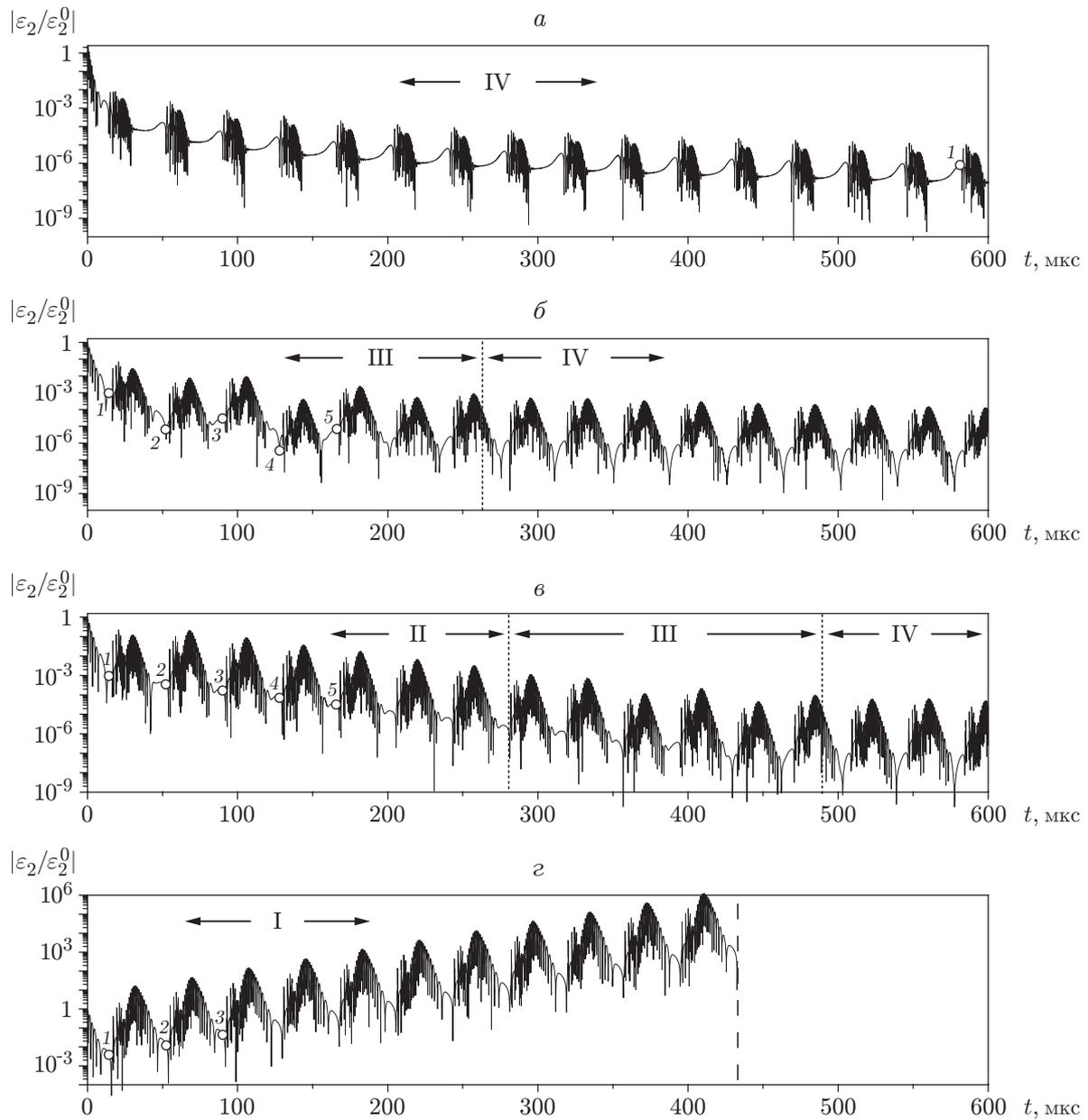


Рис. 3. Зависимости величины $|\varepsilon_2/\varepsilon_2^0|$ от времени, полученные с учетом влияния вихревого движения жидкости в ближнем и дальнем полях при $\Delta p = 1,17 \cdot 10^5$ Па: *a* — $R_0 = 3,5$ мкм, *б* — $R_0 = 4,706$ мкм, *в* — $R_0 = 4,74$ мкм, *г* — $R_0 = 5,1$ мкм; I-IV — интервалы, в которых влияние вихревого движения жидкости является определяющим (I — в ближнем поле при неустойчивых сферических колебаниях, II — в ближнем поле при устойчивых сферических колебаниях, III — в дальнем поле на неустановившемся режиме устойчивых сферических колебаний, IV — в дальнем поле на установившемся режиме устойчивых сферических колебаний)

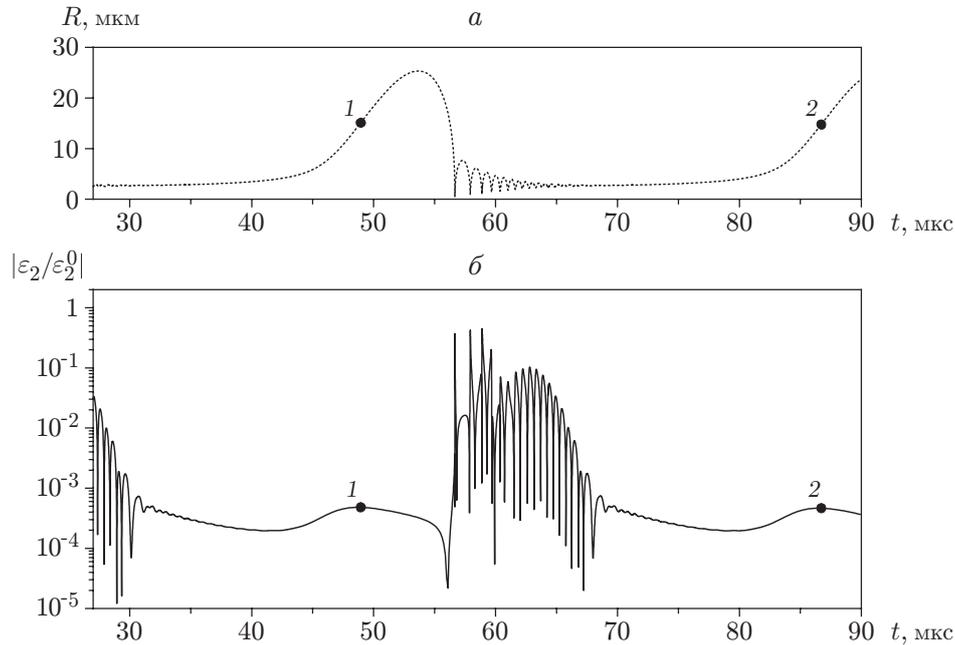


Рис. 4. Зависимости величин R (а) и $|\varepsilon_2/\varepsilon_2^0|$ (б) от времени при $R_0 = 3,15$ $\mu\text{км}$ и $\Delta p = 1,3 \cdot 10^5$ Па

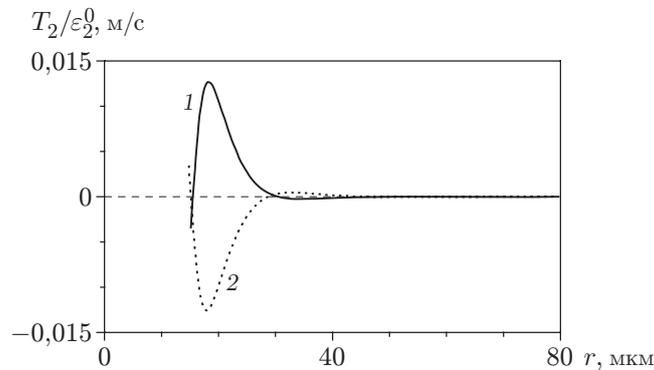


Рис. 5. Пространственные распределения функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ (1, 2) для моментов времени, соответствующих точкам 1, 2 на рис. 4

жидкости в дальнем поле. Действительно, из теоремы Биркгоффа [13] следует, что при использовании таких моделей сферичность пузырька всегда должна быть устойчивой при его относительно медленном росте до максимальных размеров. Более того, из той же теоремы следует, что в рассматриваемом случае $i = 2$ увеличение искажения на стадии роста пузырька невозможно даже при полном пренебрежении вязкостью и при любых радиальных ускорениях, что при $i > 2$ может быть обусловлено неустойчивостью Рэля — Тейлора.

Для объяснения причин возникновения отмеченного увеличения искажения на рис. 4, 5 представлены результаты расчета для случая $\Delta p = 1,3 \cdot 10^5$ Па, $R_0 = 3,15$ $\mu\text{км}$. На стадии интенсивных радиальных пульсаций пузырька на каждом периоде колебаний формируется дальнейшее поле завихренности (в области $15 \mu\text{км} < r < 30 \mu\text{км}$) (рис. 5), под влиянием которого затухающие колебания поверхности пузырька с переходом через сферическое состояние ($25 \mu\text{с} < t < 30 \mu\text{с}$, $58 \mu\text{с} < t < 68 \mu\text{с}$) трансформируются в колебания без перехода через это состояние ($30 \mu\text{с} < t < 35 \mu\text{с}$, $68 \mu\text{с} < t < 73 \mu\text{с}$). После этого

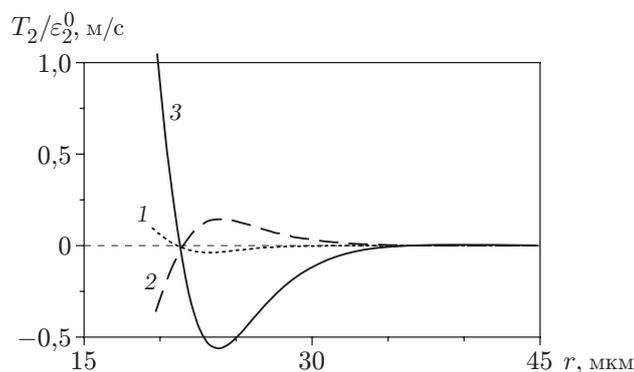


Рис. 6. Пространственные распределения функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ (1–3) для моментов времени, соответствующих точкам 1–3 на рис. 3,г

в течение некоторого промежутка времени искажение уменьшается монотонно по закону, близкому к степенному (то же явление наблюдается при свободном затухании искажения в случае постоянного радиуса [6]). Такой характер уменьшения искажения обусловлен незначительным превышением сил поверхностного натяжения (третье слагаемое в (9)) над силами вязкости (четвертое слагаемое в (9)), вызванными вихревым движением жидкости, интенсивность которого уменьшается по степенному закону. При этом влияние сил поверхностного натяжения приводит к уменьшению величины искажения, а влияние сил вязкости, обусловленных вихревым движением жидкости, — к ее увеличению, т. е. к увеличению ее положительных значений (кривая 1 на рис. 5) или к уменьшению отрицательных значений (кривая 2). При дальнейшем увеличении радиуса пузырька силы поверхностного натяжения уменьшаются быстрее, чем силы вязкости, что и вызывает увеличение искажения ($42 \text{ мкс} < t < 49 \text{ мкс}$ и $80 \text{ мкс} < t < 87 \text{ мкс}$).

Случаи, представленные на рис. 3,а и рис. 4, несколько различаются. В случае, соответствующем рис. 3,а, вихревое движение жидкости в дальнем поле формируется в момент начала колебаний формы пузырька. Изменение характера вихревого движения при последующих колебаниях оказывается несущественным. В случае, соответствующем рис. 4, вихревое движение формируется на каждом периоде, при этом механизм его влияния, вследствие которого нарушается сферичность пузырька при его расширении, не меняется.

5.2. *Экспоненциальный рост амплитуды колебаний искажения.* Экспоненциальное от периода к периоду увеличение искажения показано на рис. 3,г (интервал I). На рис. 6 приведены соответствующие этому случаю пространственные распределения функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ в моменты максимального расширения пузырька. В эти моменты далее поле завихренности оказывает наиболее значительное влияние на изменение искажения, так как изменение формы пузырька существенно замедляется и завихренность в ближнем поле становится относительно небольшой.

В данном случае особенность колебаний заключается в том, что по окончании каждого периода дальнее поле завихренности фактически обновляется (см. рис. 6), а влияние поля завихренности, созданного на предыдущем периоде, оказывается пренебрежимо малым. Поэтому на неустойчивом режиме как при учете вихревого движения жидкости в дальнем поле (см. рис. 3,г), так и без его учета (см. рис. 2) характер увеличения искажения от периода к периоду оказывается одинаковым — экспоненциальным.

5.3. *Экспоненциальное затухание колебаний величины искажения.* Экспоненциальное от периода к периоду затухание колебаний величины искажения показано на рис. 3,в (интервал II). Соответствующие пространственные распределения функции T_2/ε_2^0 в моменты

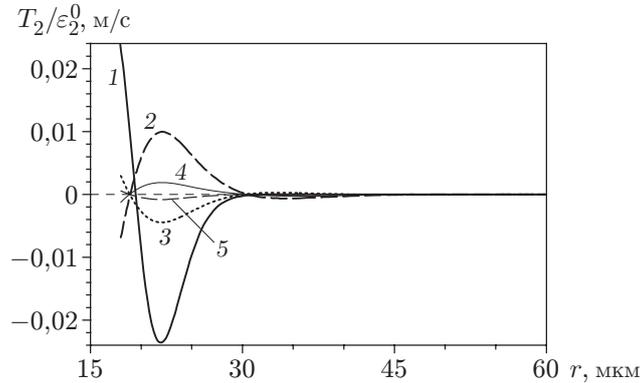


Рис. 7. Пространственные распределения функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ (1–5) для моментов времени, соответствующих точкам 1–5 на рис. 3,б

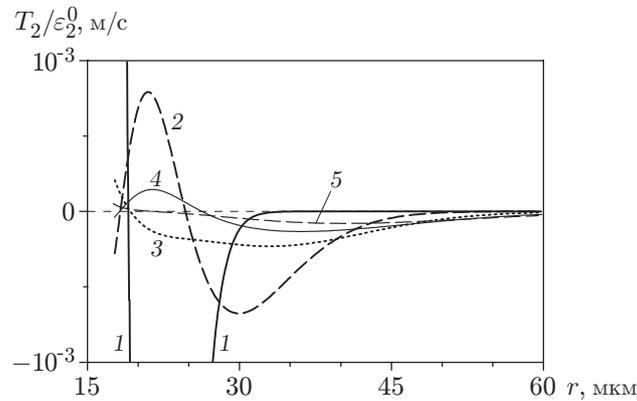


Рис. 8. Пространственные распределения функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ (1–5) для моментов времени, соответствующих точкам 1–5 на рис. 3,б

максимального расширения пузырька приведены на рис. 7. Как и в случае экспоненциального роста амплитуды изменения искажения, в данном случае на каждом периоде дальнейшее поле завихренности фактически полностью обновляется (см. рис. 7), что и определяет экспоненциальный закон изменения искажения от периода к периоду.

5.4. *Скачкообразное затухание колебаний величины искажения.* В рассмотренных выше примерах дальнейшее поле завихренности сохраняет свое влияние в течение только одного периода колебаний давления жидкости, обновляясь на каждом следующем. Ниже рассмотрены случаи, в которых дальнейшее поле завихренности в течение одного периода полностью не обновляется. В результате влияние необновляемой части дальнего поля, вследствие которого нарушается сферичность пузырька, проявляется на последующих периодах.

Скачкообразное (от периода к периоду) затухание колебаний величины искажения показано на рис. 3,б,в (интервалы III). Для случая, представленного на рис. 3,б, на рис. 8 приведены пространственные распределения функции T_2/ε_2^0 в моменты максимального расширения пузырька. В этом случае особенностью колебаний является то, что в отличие от случая экспоненциального затухания дальнейшее поле завихренности в течение периода колебаний полностью не обновляется: в более удаленной его части для любого периода $T_2/\varepsilon_2^0 < 0$ (см. рис. 8), а в более близко расположенной части для одних периодов $T_2/\varepsilon_2^0 < 0$ (кривые 3, 5 на рис. 8), а для других $T_2/\varepsilon_2^0 > 0$ (кривые 2, 4 на рис. 8). На тех периодах,

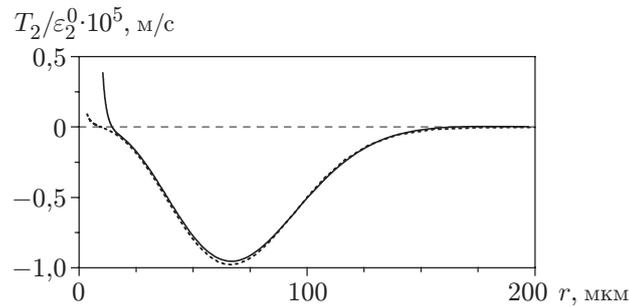


Рис. 9. Пространственные распределения функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ для момента времени, соответствующего точке 1 на рис. 3,а:
сплошная кривая — $\Delta p = 1,17 \cdot 10^5$ Па, пунктирная — $\Delta p = 0$

когда знаки T_2/ε_2^0 в обеих частях дальнего поля совпадают, влияние дальнего поля на поверхность пузырька оказывается больше, чем на периодах, когда они различаются. Иными словами, влияние обновленной части дальнего поля периодически усиливается и ослабляется. При этом чем больше влияние дальнего поля на периоде, тем менее существенно уменьшается искажение [6]. В результате наблюдается некоторый скачкообразный режим затухания колебаний.

Следует отметить, что экспоненциальное затухание колебаний величины искажения, как правило, со временем становится скачкообразным (интервал $280 \text{ мкс} < t < 480 \text{ мкс}$ на рис. 3,в). Это обусловлено различием скоростей уменьшения интенсивности вихревого движения в обновляемой (интервал $15 \text{ мкм} < r < 30 \text{ мкм}$ на рис. 7) и необновляемой (интервал $r > 30 \text{ мкм}$ на рис. 7) частях дальнего поля. В обновляемой части интенсивность вихревого движения уменьшается от периода к периоду по экспоненциальному закону, а в необновляемой — по степенному.

В свою очередь скачкообразное затухание колебаний становится степенным (интервалы IV на рис. 3,б,в) в тот момент, когда определяющее влияние начинает оказывать необновляемая часть дальнего поля.

5.5. *Степенное затухание колебаний величины искажения.* На рис. 3,а–в временные интервалы IV соответствуют степенному (от периода к периоду) затуханию колебаний величины искажения. Для случая, представленного на рис. 3,а, на рис. 9 сплошной линией показано пространственное распределение функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$. Для сравнения пунктирной линией показано распределение функции $T_2(r, t)/\varepsilon_2^0$ в тот же момент времени в случае уменьшения искажения без учета радиальных колебаний пузырька [6].

При первом колебании поверхности относительно ее сферической формы возмущения вихревого движения жидкости в ближнем поле оказываются больше, чем при всех последующих колебаниях. Вихревое движение, диффундируя от поверхности пузырька, образует дальнее поле завихренности. Возникающая впоследствии незначительная завихренность в ближнем поле жидкости практически не оказывает влияния на завихренность в дальнем поле. Поэтому дальнее поле изменяется так же, как при свободном затухании начального искажения [6] (см. рис. 9). В результате амплитуда изменений искажения уменьшается от периода к периоду по степенному закону (см. рис. 3,а), что характерно для свободного затухания.

Таким образом, на устойчивом режиме колебаний начиная с некоторого момента времени изменение искажения от периода к периоду определяется дальним полем завихренности жидкости и происходит по степенному закону.

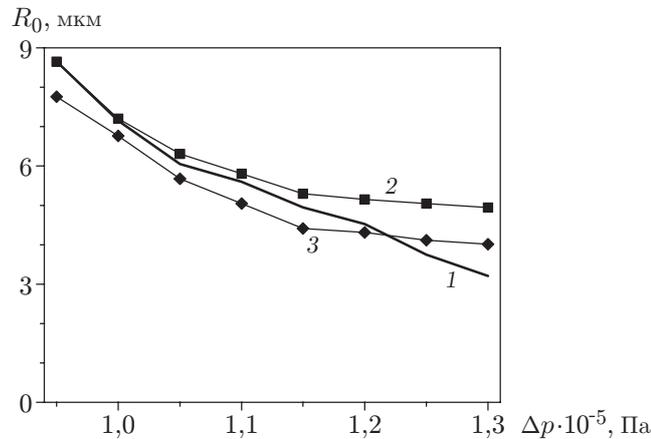


Рис. 10. Границы области устойчивых сферических колебаний пузырька, полученные с учетом (1) и без учета (2, 3) влияния вихревого движения жидкости в дальнем поле: 2 — расчет без учета завихренности жидкости во всей области, за исключением поверхности пузырька; 3 — расчет без учета завихренности жидкости во всей области

6. Влияние вихревого движения на устойчивость сферических колебаний пузырька. На рис. 10 в плоскости $(\Delta p, R_0)$ для дискретного набора значений Δp из интервала $0,95 \cdot 10^5 \text{ Па} \leq \Delta p \leq 1,30 \cdot 10^5 \text{ Па}$ при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ показаны границы области устойчивых сферических колебаний пузырька.

При малых значениях Δp и больших значениях R_0 вихревое движение жидкости имеет малую интенсивность. Результаты расчетов с использованием точной модели (кривая 1 на рис. 10) хорошо аппроксимируются приближенной моделью, в которой завихренность жидкости во всей области, за исключением поверхности пузырька, полагается нулевой (кривая 2). С увеличением Δp возрастающая скорость колебаний формы пузырька вызывает рост интенсивности вихревого движения жидкости. Это приводит к тому, что кривая 1, полученная с использованием точной модели, приближается к кривой 3, полученной с помощью приближенной модели, в которой завихренностью пренебрегается во всей области. Этот неожиданный результат объясняется тем, что полное пренебрежение завихренностью можно трактовать как ее учет во всей области, занимаемой жидкостью, при выполнении условия $\nu T_i(R, t) + 2\nu(2i + 1)R^{i-1}\alpha_i + \dot{R}\beta_i = 0$.

При $\Delta p > 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ граница области устойчивости, определенная с использованием точной модели, оказывается значительно ниже соответствующих границ, определенных с помощью приближенных моделей. Это объясняется тем, что с ростом Δp интенсивность вихревого движения жидкости в дальнем поле повышается, в результате чего величина искажений увеличивается, а устойчивость сферических колебаний уменьшается.

Заключение. Установлено, что вихревое движение жидкости, возникающее при периодических радиальных колебаниях несферического газового пузырька, оказывает существенное влияние на эволюцию малых начальных искажений сферической формы этого пузырька.

При устойчивых сферических колебаниях пузырька начиная с некоторого момента времени изменение искажения от периода к периоду определяется дальним полем завихренности жидкости и происходит по степенному закону. При неустойчивых колебаниях дальнее поле завихренности обновляется на каждом периоде колебаний, поэтому искажение увеличивается от периода к периоду экспоненциально. Такая ситуация имеет место при использовании приближенных способов учета вязкости (как на устойчивом, так и на неустойчивом режиме), в которых влиянием дальнего поля завихренности пренебрегается.

В случае устойчивых сферических колебаний для значений параметров вблизи границы области устойчивости показаны некоторые особенности влияния вихревого движения жидкости. Если на каждом периоде внешнего возбуждения дальнее поле завихренности полностью обновляется, то искажение изменяется от периода к периоду по экспоненциальному закону. Если дальнее поле обновляется не полностью, т. е. существует необновляемая часть, то может наблюдаться скачкообразное затухание искажения.

Обнаружено, что вследствие влияния дальнего поля завихренности может наблюдаться парадоксальное для приближенных способов учета вязкости увеличение искажения при относительно медленном расширении пузырька.

Установлено, что дальнее поле завихренности значительной интенсивности может приводить к уменьшению устойчивости сферических колебаний пузырька.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gaitan D. F., Crum L. A., Church C. C., Roy R. A.** Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable cavitation bubble // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91. P. 3166–3183.
2. **Putterman S. J., Weninger K. P.** Sonoluminescence: How bubbles turn sound into light // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 445–476.
3. **Wu C. C., Roberts P. H.** Bubble shape instability and sonoluminescence // Phys. Lett. A. 1998. V. 250. P. 131–136.
4. **Hao Y., Prosperetti A.** The effect of viscosity on the spherical stability of oscillating gas bubbles // Phys. Fluids. 1999. V. 11, N 6. P. 1309–1317.
5. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
6. **Аганин А. А., Ильгамов М. А., Топорков Д. Ю.** Влияние вязкости жидкости на затухание малых искажений сферической формы газового пузырька // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 30–39.
7. **Prosperetti A.** Viscous effects on perturbed spherical flows // Quart. Appl. Math. 1977. V. 34. P. 339–352.
8. **Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M.** Phase diagrams for sonoluminescing bubbles // Phys. Fluids. 1996. V. 8, N 11. P. 2808–2826.
9. **Keller J. B., Miksis M.** Bubble oscillations of large amplitude // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. P. 628–633.
10. **Aganin A. A., Khismatullina N. A.** Liquid vorticity computation in non-spherical bubble dynamics // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2005. V. 48. P. 115–133.
11. **Хайпер Э.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайпер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. М.: Мир, 1990.
12. **Воинов О. В.** Влияние вязкости на динамику возмущений пузыря в жидкости // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 3–5.
13. **Birkhoff G.** Stability of spherical bubbles // Quart. Appl. Math. 1956. V. 13. P. 451–453.

*Поступила в редакцию 17/IV 2007 г.,
в окончательном варианте — 2/IX 2009 г.*