

УДК 532.545

## ВЕКТОР РАСХОДА НАНОСОВ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ НАД РАЗМЫВАЕМЫМ ДНОМ

А. Г. Петров, П. Г. Петров

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Рассмотрена проблема определения расхода наносов турбулентным потоком жидкости над размываемой поверхностью произвольного рельефа с конечным уклоном дна. Поверхность дна отделяет неподвижную сыпучую среду (песок) от движущейся двухфазной среды смеси жидкости и твердых частиц. Среда вовлекается в движение под действием касательного напряжения жидкости. В среде действуют закон Кулона трения сыпучей среды и закон Прандтля турбулентного трения жидкости. В результате решения краевой задачи для движения двухфазной смеси жидкости и твердых частиц получена общая формула расхода наносов. Вектор расхода наносов выражен через вектор касательного напряжения на дне, вектор уклона дна и функцию распределения твердых частиц в донном слое при произвольном рельефе дна с конечным уклоном. Показано, что расход наносов слабо зависит от детального распределения частиц в придонном слое. Получены условия обрушения поверхности дна. Формула расхода наносов позволяет записать замкнутую систему уравнений, определяющую процесс размыва дна в русле реки или канала.

Теория движения взвешенных частиц в турбулентном потоке при малой концентрации представлена в [1, 2]. В [3] предложено учитывать кулоновское сухое трение между твердыми частицами, движущимися в жидкости. В [4–8] исследование движения смеси жидкости и твердых частиц проводится с помощью реологического соотношения в виде комбинации сухого трения для твердой фазы и вязкого трения для жидкой. В [4–6] изучается одномерное турбулентное течение над ровным дном. В [7, 8] для трехмерного турбулентного течения найдено аналитическое выражение для вектора расхода наносов при рельефе дна с малым уклоном.

**1. Геометрическое описание поверхности дна.** Приведем точные формулы для локальных характеристик поверхности дна, не полагая уклон поверхности дна малым. Пусть  $X, Y, Z$  — неподвижная декартова система координат с осью  $Z$ , направленной вертикально вверх. Поверхность дна в этой системе координат определяется уравнением  $Z = \zeta(X, Y)$ , где  $\zeta$  — достаточно гладкая функция переменных  $X, Y$ . Вектор нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности дна имеет компоненты

$$n_x = -\frac{\partial \zeta}{\partial X} \cos \gamma, \quad n_y = -\frac{\partial \zeta}{\partial Y} \cos \gamma, \quad n_z = \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  и осью  $Z$ . Тригонометрические функции угла  $\gamma$  имеют вид  $\cos \gamma = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{(\partial \zeta / \partial X)^2 + (\partial \zeta / \partial Y)^2}$ .

Проекцию единичного вектора  $\mathbf{k}$ , направленного вертикально вверх, на касательную плоскость поверхности  $Z = \zeta$  назовем вектором уклона  $\mathbf{I}$  (рис. 1), который можно разложить по векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$ :  $\mathbf{I} = \mathbf{k} - \mathbf{n} \cos \gamma$ . Отсюда несложно выписать его компоненты по осям  $X, Y, Z$  и определить длину  $I = \sin \gamma$ .

Наряду с неподвижной системой координат введем локальную криволинейную ортогональную систему координат  $x, y, z$ . Ось  $z$  ортогональна поверхности  $Z = \zeta$ , а оси  $x, y$  —

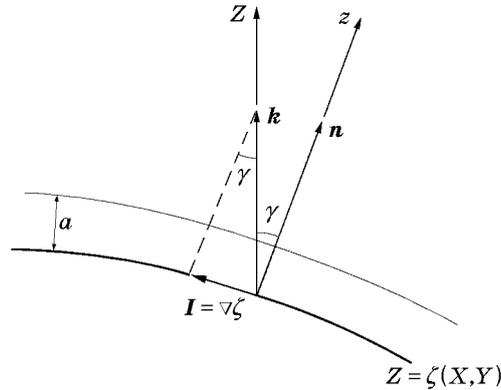


Рис. 1

внутренние координаты этой поверхности. В локальной системе координат поверхность дна определяется уравнением  $z = 0$ . Вектор уклона  $\mathbf{I}$  в локальной системе координат имеет компоненты  $I_x = \partial\zeta/\partial x$ ,  $I_y = \partial\zeta/\partial y$  или в векторной форме  $\mathbf{I} = \nabla\zeta$ ,  $|\nabla\zeta| = \sin \gamma$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ .

**2. Допущения.** Рассматривается турбулентный поток тяжелой несжимаемой жидкости с твердыми частицами в области  $\zeta(X, Y) \leq Z \leq \eta(X, Y)$ , где  $Z = \eta$  — уравнение свободной поверхности. В области  $Z \leq \zeta(X, Y)$  находится неподвижная сыпучая однородная среда, через которую фильтруется жидкость. На границе раздела  $Z = \zeta$  происходит массообмен твердых частиц с плотностью  $\rho_p$ , большей плотности жидкости  $\rho_w$ .

Предполагается, что основная масса частиц движется в придонном слое толщины  $a$ , много меньшей глубины  $h = \eta - \zeta$ . Изменение толщины слоя  $a$  по любому направлению много меньше изменения отметки дна:

$$a \ll h, \quad |\nabla a| \ll |\nabla\zeta|. \tag{2.1}$$

Ниже показано, что толщина слоя наносов оценивается величиной  $hI_{cp}$  ( $I_{cp}$  — средний уклон дна). Для равнинных рек и каналов средний уклон дна составляет не более  $10^{-3}$ , поэтому условие (2.1) практически всегда выполняется.

Гидростатический закон распределения давления имеет вид  $\partial p/\partial Z = -\rho g$  ( $\rho = \rho_w + C(\rho_p - \rho_w)$  — плотность смеси твердых частиц с жидкостью,  $C$  — концентрация частиц). Пусть задано давление  $p_a$  на поверхности жидкости (атмосферное). После интегрирования получим распределение давления

$$p = p_a + \rho_w g(\eta - Z) + g(\rho_p - \rho_w) \int_Z^h C dz'.$$

С учетом (2.1) для давления на поверхности дна с точностью до малой величины  $a \ll h$  получим

$$p_\zeta = p_a + \rho_w g(\eta - \zeta). \tag{2.2}$$

Область движения среды можно разбить на три области. В первой области  $z \leq 0$  (ниже поверхности дна) жидкость фильтруется через неподвижную сыпучую среду. В отсутствие волн на свободной поверхности ( $\nabla\eta = 0$ ) и при условиях, близких к гидростатическому равновесию, скорость фильтрации много меньше скорости жидкости в области  $z > 0$  (выше поверхности дна). Оценки показывают, что эффект фильтрации существен при достаточно больших градиенте свободной поверхности и размере твердых частиц. Ниже рассмотрен противоположный случай, когда скорость фильтрации близка к нулю.

Во второй области  $z > a$  твердая фаза находится во взвешенном состоянии и переносится турбулентным потоком жидкости как пассивная примесь. В соответствии с гравитационной теорией, развитой в работах [1, 2], концентрация частиц убывает по степенному закону  $C = C_0(a/z)^K$ ,  $K = W/(\varkappa U_*)$ , где  $U_*$  — динамическая скорость;  $W$  — скорость осаждения частиц в покоящейся жидкости (гидравлическая крупность);  $\varkappa \approx 0,4$  — постоянная Кармана. Параметр Шильдса  $K \approx 12$  при скорости потока, близкой к началу трогания частиц ( $U_{*т} \approx 0,2W$ ). При  $K \in (3, 12)$  (наиболее интересный для практики случай) вклад взвешенных частиц в расход наносов пренебрежимо мал по сравнению с основным вкладом донных наносов в области  $0 \leq z \leq a$ . Таким образом, для вычисления расхода достаточно исследовать течение смеси в третьей области  $0 \leq z \leq a$ , в которой необходимо учитывать трение частиц, турбулентный перенос и силу тяжести.

**3. Математическая модель.** Рассмотрим математическую модель движения смеси жидкости с частицами в тонком придонном слое  $0 \leq z \leq a$ . Ускорение частиц среды, движущейся стационарно в тонком слое, пренебрежимо мало по сравнению с силами трения:  $\rho|d\mathbf{v}/dt| \ll |\partial\boldsymbol{\tau}/\partial z|$ .

*Уравнения движения.* Поперек тонкого слоя действует гидростатический закон, а вдоль слоя выполняется уравнение баланса сил трения, градиента давления и тяжести

$$\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial z} = \nabla p\zeta + \rho g \nabla\zeta, \quad \rho = \rho_p C + \rho_w(1 - C). \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) аналогично уравнению Рейнольдса для тонкого слоя вязкой жидкости.

*Реологический закон.* Связь касательного напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  и скорости деформации  $\partial\mathbf{v}/\partial z$  можно определить тензорной функцией  $\boldsymbol{\tau}(\partial\mathbf{v}/\partial z)$ , которая обобщает закон Прандтля для турбулентного слоя жидкости и закон Кулона сухого трения для твердых частиц. Зависимость, удовлетворяющая этим требованиям, имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_w + \tau_p) \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \left| \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \right|^{-1}; \quad (3.2)$$

$$\tau_w = (\varkappa z)^2 \left| \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \right|^2 \rho_w; \quad (3.3)$$

$$\tau_p = p_p \operatorname{tg} \varphi, \quad p_p = (\rho_p - \rho_w) g \cos \gamma \int_z^a C dz'. \quad (3.4)$$

Здесь  $\tau_w$ ,  $\tau_p$  — абсолютные величины касательного напряжения жидкой и твердой фаз;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в направлении вектора  $\partial\mathbf{v}/\partial z$ ;  $p_p$  — давление твердых частиц, взвешенных в воде;  $\varphi$  — угол внутреннего трения ( $\varphi \approx 30^\circ$  для песка). Формула (3.3) определяет закон Прандтля, формула (3.4) — закон Кулона сухого трения для твердой фазы.

Система уравнений (3.1)–(3.4), дополненная уравнением диффузии, введена в [7, 8]. В частном случае одномерного течения над ровным дном эти уравнения приведены в [4–6].

Не добавляя пока уравнение, определяющее распределение концентрации, будем считать ее заданной функцией  $C(z)$ . Тогда в общие формулы для расхода наносов войдет функция распределения частиц в слое  $0 \leq z \leq a$ , которая выражается через  $C(z)$ :

$$f(z) = \int_z^a C dz' / \int_0^a C dz'. \quad (3.5)$$

*Граничные условия.* Краевые условия можно получить из непрерывности скорости и касательного напряжения в результате следующих рассуждений [7, 8]. При  $z \leq 0$  среда

покоится:  $v = 0$ . Касательное напряжение в покоящейся среде не превосходит кулоновского трения:  $\tau \leq p_p \operatorname{tg} \varphi$ . В движущейся среде при  $z > 0$  согласно введенному реологическому закону (3.2), (3.3)  $\tau = p_p \operatorname{tg} \varphi + \tau_w$ , причем  $\tau_w \geq 0$ . Непрерывность  $\tau$  в точке  $z = 0$  возможна только при условии  $\tau_w = 0$ . Таким образом, получаем условия

$$z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \tau_w = 0, \quad f = 1. \quad (3.6)$$

Следует отметить существенное различие распределений скорости в рассматриваемой задаче и в задаче при отсутствии частиц, несмотря на идентичный закон турбулентного трения (3.3). Для чистой жидкости вблизи стенки  $\tau_w \approx \operatorname{const}$ , откуда следует логарифмический закон распределения скорости. Согласно (3.6) для смеси  $\tau_w$  возрастает пропорционально расстоянию от стенки, поэтому закон распределения скорости вблизи  $z = 0$  линейный.

На верхней границе слоя задано касательное напряжение  $\mathbf{T}$ . Твердые частицы переходят во взвешенное состояние, и  $\tau_p = 0$ . Отсюда получаем граничные условия

$$z = a: \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}, \quad \tau_p = 0, \quad f = 0. \quad (3.7)$$

Ввиду условий (2.1) толщиной слоя  $a$  можно пренебречь и считать величину  $\mathbf{T}$  такой же, как в чистой жидкости на дне  $Z = \zeta$ , поэтому  $\mathbf{T}$  вычисляется из решения гидродинамической задачи (при отсутствии твердых частиц).

**4. Вывод формулы расхода донных наносов.** Перейдем от переменной  $z$  к новой переменной  $f$  (3.5). В отсутствие волн на свободной поверхности ( $\nabla \eta = 0$ ) градиент давления в придонном слое согласно (2.2) равен  $\nabla p_\zeta = -\rho_w g \nabla \zeta$ . Тогда уравнения (3.1), (3.4) запишутся в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial f} = -T a_1 \boldsymbol{\Gamma}, \quad \frac{\partial \tau_p}{\partial f} = T a_1, \quad df = -C dz \Big/ \int_0^a f dz; \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\nabla \zeta}{\cos \gamma \operatorname{tg} \varphi}, \quad |\boldsymbol{\Gamma}| = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \varphi}; \quad (4.2)$$

$$a_1 = \frac{(\rho_p - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{T} \int_0^a C dz. \quad (4.3)$$

Интегрируя уравнение (4.1) с учетом условия (3.7), можно найти следующие выражения для вектора полного напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  и напряжений в твердой и жидкой фазах:

$$\boldsymbol{\tau} = T \mathbf{F}, \quad \tau_p = T a_1 f, \quad \tau_w = |\boldsymbol{\tau}| - \tau_p = T(F - a_1 f); \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\Gamma} a_1 f(z), \quad F = |\mathbf{F}| = \sqrt{(1 - \boldsymbol{\Gamma}_x a_1 f)^2 + (\boldsymbol{\Gamma}_y a_1 f)^2}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{s}$  — единичный вектор, коллинеарный вектору  $\mathbf{T}$ ; ось  $x$  направлена по вектору  $\mathbf{s}$ .

Постоянную  $a_1$  можно выразить через  $\boldsymbol{\Gamma}_x, \boldsymbol{\Gamma}_y$ . Для этого воспользуемся условиями (3.6) на дне. Из (4.4) следует, что при  $z = 0$   $\tau_w = 0$ ,  $f = 1$ ,  $F = a_1$ . Подставив эти значения в (4.5), получим уравнение для определения  $a_1$

$$(1 - \boldsymbol{\Gamma}_x a_1)^2 + (\boldsymbol{\Gamma}_y a_1)^2 = a_1^2 \Rightarrow (1/a_1 - \boldsymbol{\Gamma}_x)^2 = 1 - \boldsymbol{\Gamma}_y^2. \quad (4.6)$$

Существование положительного корня уравнения (4.6) определяет область изменения вектора уклона  $\boldsymbol{\Gamma}$ . На рис. 2 эта область изображена на плоскости  $\boldsymbol{\Gamma}_x, \boldsymbol{\Gamma}_y$ . Единственный положительный корень существует внутри круга единичного радиуса  $|\boldsymbol{\Gamma}| < 1$ , на части дуги которого  $|\boldsymbol{\Gamma}| = 1$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_x > 0$ , а также на лучах  $\boldsymbol{\Gamma}_y = \pm 1$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_x > 0$  и равен

$$a_1 = \frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}_x + \sqrt{1 - \boldsymbol{\Gamma}_y^2}}. \quad (4.7)$$

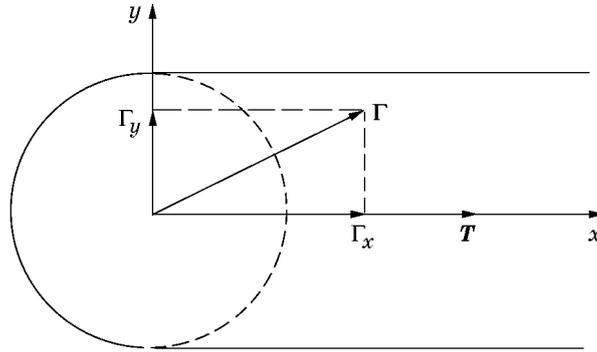


Рис. 2

Два положительных корня существует в правой полуполосе, ограниченной дугой круга  $|\Gamma_y| < 1$ ,  $|\Gamma| > 1$ :  $a_1 = 1/(\Gamma_x \pm \sqrt{1 - \Gamma_y^2})$ .

В точках  $\Gamma_y \pm 1$  происходит бифуркация решения (ответвление второго корня). Существование второго корня зависит от его устойчивости. Если в начальный момент времени поверхность дна удовлетворяет условию  $|\operatorname{tg} \gamma| < \operatorname{tg} \varphi$ , а в дальнейшем  $|\Gamma_y| < 1$ , то второй корень отсутствует. Это следует из непрерывной зависимости  $a_1$  от вектора  $\Gamma$ . Далее ограничимся исследованием первой ветви корня (4.7).

Равенства (4.5) и (4.7) определяют зависимость  $F(f)$  при заданном векторе  $\Gamma(\Gamma_x, \Gamma_y)$ , которая при  $f = 0$  и  $f = 1$  имеет следующие разложения:

$$F \approx 1 - \Gamma_x a_1 f, \quad f \ll 1, \quad F \approx a_1 f + \sqrt{1 - \Gamma_y^2}(1 - f), \quad 1 - f \ll 1.$$

Таким образом, функция  $F(f)$  монотонно возрастает на отрезке  $f \in (0, 1)$  от значения  $F(0) = 1$  до значения  $F(1) = a_1$ . Распределения характеристик в слое выражаются точно через функции  $F$  и  $F - a_1 f$ , зависящие от аргумента  $f$ , и единичный вектор  $\mathbf{e}$  вида

$$\mathbf{e} = (\mathbf{s} - \Gamma a_1 f(z)) F^{-1}, \quad e_x = (1 - \Gamma_x a_1 f) F^{-1}, \quad e_y = -\Gamma_y a_1 f F^{-1}. \quad (4.8)$$

В дальнейшем используются также разложения с точностью до третьей степени по  $\Gamma_x, \Gamma_y$ :

$$F^{-1} \approx 1 + f\Gamma_x - f(1 - f)\Gamma_x^2 - f^2\Gamma_y^2/2, \quad F - a_1 f \approx (1 - f)(1 - f\Gamma_y^2/2), \quad (4.9)$$

$$e_x \approx 1 - f^2\Gamma_y^2/2, \quad e_y \approx -f\Gamma_y[1 - (1 - f)\Gamma_x].$$

Перейдем к нахождению распределения скорости смеси и расхода. Из (3.3), (4.4) имеем

$$\left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right| = U_* \frac{\sqrt{F - a_1 f}}{\alpha z}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{e} \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right|. \quad (4.10)$$

Из (3.5), (4.3) получим

$$\Phi_0 = \int_0^a C dz = \frac{\Gamma a_1}{(\rho_p - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}, \quad C dz = -\Phi_0 df. \quad (4.11)$$

С помощью (4.11) расход наносов  $\mathbf{G}$  можно представить в виде

$$\mathbf{G} = \rho_p \int_0^a C \mathbf{v} dz = -\rho_p \Phi_0 \int_0^a \mathbf{v}(z) df. \quad (4.12)$$

Интегрируя по частям, находим

$$-\int_0^a \mathbf{v} df(z) = -\mathbf{v}f \Big|_0^a + \int_0^a f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz. \quad (4.13)$$

Первое слагаемое правой части равно нулю в силу условий  $\mathbf{v}(0) = 0$ ,  $f(a) = 0$ . Подставляя в (4.13) выражения (4.10), получим

$$-\int_0^a \mathbf{v} df(z) = \frac{U_*}{\varkappa} \int_0^a \frac{f\sqrt{F - a_1 f}}{z} \mathbf{e} dz. \quad (4.14)$$

Точное значение интеграла (4.14) представляется в виде разложения по векторам  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{\Gamma}$

$$-\int_0^a \mathbf{v} df(z) = \frac{U_*}{\varkappa} [(A + B\Gamma_x) \mathbf{s} - B\mathbf{\Gamma}], \quad (4.15)$$

$$A = \int_0^a \frac{f\sqrt{F - a_1 f}}{z} e_x dz, \quad -B\Gamma_y = \int_0^a \frac{f\sqrt{F - a_1 f}}{z} e_y dz.$$

Подставляя (4.15) в (4.12), получим формулу для определения расхода наносов

$$\mathbf{G} = G_0 a_1 [(A + B\Gamma_x)(\mathbf{T}/|\mathbf{T}|) - B\mathbf{\Gamma}], \quad (4.16)$$

где  $G_0 = \rho_p \Phi_0 \frac{U_*}{\varkappa a_1} = \frac{\rho_p U_*^3}{\varkappa g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma} \frac{\rho_w}{\rho_p - \rho_w}$ ;  $U_* = \sqrt{\frac{T}{\rho_w}}$ .

Выражение (4.16) можно применять для конечных значений вектора уклона. Множитель  $a_1$ , определяемый по (4.7), обращается в бесконечность при  $|\mathbf{\Gamma}| = 1$ ,  $\Gamma_x \leq 0$ . Это условие определяет критический уклон, при котором происходит обрушение.

Получим разложения для коэффициентов  $A$ ,  $B$  с точностью до третьих степеней  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$ . Для этого подставим разложения (4.9) в (4.15). Ограничиваясь в этом равенстве линейными и квадратичными слагаемыми, получим

$$A \approx A_0 + A_2 \Gamma_y^2, \quad B \approx B_0 + B_1 \Gamma_x; \quad (4.17)$$

$$A_0 = \int_0^1 \frac{f\sqrt{1-f}}{z} dz, \quad A_2 = -\int_0^1 \frac{f^2(1/2+f)\sqrt{1-f}}{2z} dz, \quad (4.18)$$

$$B_0 = \int_0^1 \frac{f^2\sqrt{1-f}}{z} dz, \quad B_1 = -\int_0^1 \frac{f^2(1-f)^{3/2}}{z} dz.$$

**5. Анализ формулы расхода.** Коэффициенты в (4.17), определяющие вектор расхода, зависят от вида функции  $f(z)$ . Однако согласно определению (3.5) функция  $f(z)$  удовлетворяет ограничениям

$$0 \leq f \leq 1, \quad f(0) = 1, \quad f(a) = 0, \quad f'_z = -C/\Phi_0 < 0, \quad f''_z = -C'_z/\Phi_0 \geq 0. \quad (5.1)$$

Можно показать, что при таких ограничениях на  $f$  коэффициенты в формулах (4.18) изменяются незначительно. Действительно, рассмотрим функции вида  $f = (1 - z/a)^\beta$ . Нетрудно убедиться, что при  $\beta \geq 1$  указанные функции удовлетворяют ограничениям (5.1). При  $\beta = 1$  интегралы в (4.18) принимают значения

$$A_0 = 4/3, \quad A_2 = -76/105, \quad B_0 = 16/15, \quad B_1 = -16/105. \quad (5.2)$$

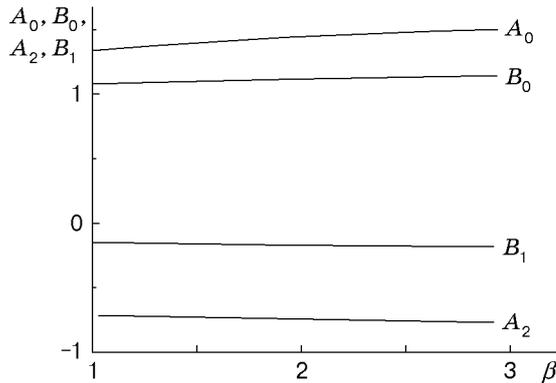


Рис. 3

В интервале  $\beta \in (1, 3)$  коэффициенты (5.2) изменяются не более чем на 10%, что видно на рис. 3. В [8] функция распределения найдена из решения уравнения турбулентной диффузии, вычисленные коэффициенты также мало отличаются от значений (5.2).

Таким образом, будем считать параметр  $\beta = 1$ , а функцию  $f$  линейной ( $f = 1 - z/a$ ). Тогда по формулам (4.3), (4.5), (4.8), (4.15) можно точно определить коэффициенты  $A$  и  $B$  в формуле расхода. Обозначим отклонения точных значений  $A$  и  $B$  от приближенных (4.17), (5.2) через  $\Delta A$  и  $\Delta B$ . При фиксированном значении  $\Gamma_y$  наибольшие значения  $|\Delta A|$  и  $|\Delta B|$  достигаются при  $\Gamma_x \approx 0$ . Зависимости наибольших значений  $\Delta A$  и  $\Delta B$  от  $\Gamma_y$  при  $\Gamma_x = 0$  представлены в табл. 1.

Таким образом, векторная зависимость (4.16) с коэффициентами (4.17), (5.2) определяет вектор расхода  $\mathbf{G}$  достаточно точно при любых значениях вектора  $\mathbf{\Gamma}$  из области, изображенной на рис. 2. Если ось  $x$  направлена по вектору  $\mathbf{T}$ , то вектор  $\mathbf{G}$  имеет компоненты  $G_x = G_0 a_1 A$ ,  $G_y = -G_0 a_1 B \Gamma_y$  (рис. 4). Множитель  $a_1$  в зависимости от величины  $\mathbf{\Gamma}$  принимает любые положительные значения вплоть до бесконечности для критических значений  $\Gamma_x = -\sqrt{1 - \Gamma_y^2}$ .

**6. Сравнение с экспериментом.** При расчете процесса эрозии обычно применяют уравнение баланса твердых частиц на поверхности дна

$$\frac{\partial(\zeta \cos \gamma)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_p(1 - \varepsilon)} \left( \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.1)$$

Как правило, вектор расхода наносов вычисляют по эмпирической формуле по измерениям для одномерного течения на ровном дне (наиболее употребима формула Меер-Петера — Миллера [9]). Направление  $\mathbf{G}$  выбирается по направлению скорости течения. Используя такой способ расчета, невозможно объяснить процесс эрозии в канале постоянного сечения с откосом (вектор уклона направлен перпендикулярно оси канала). Действительно, если

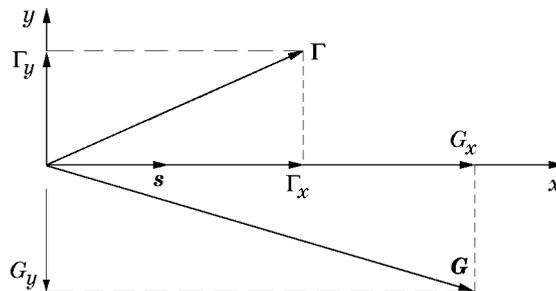


Рис. 4

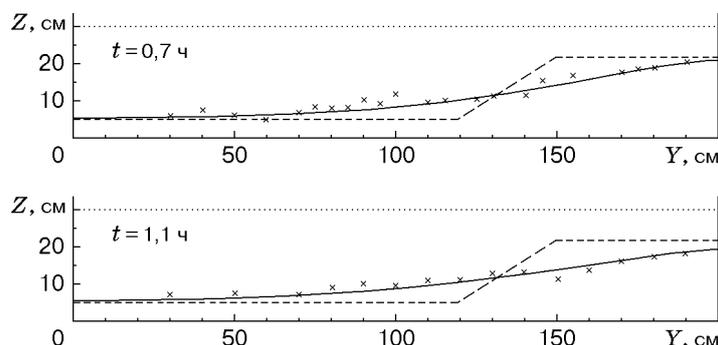


Рис. 5

ось  $x$  направлена по оси канала, то вектор  $\mathbf{G}$  имеет только одну компоненту  $G_x$ , не зависящую от  $x$ . Тогда из (6.1) получим  $\partial\zeta/\partial t = 0$ . Напротив, в соответствии с формулой (4.16) вектор  $\mathbf{G}$  имеет кроме  $G_x$  компоненту  $G_y = -G_0 B \operatorname{ctg} \varphi (\partial\zeta/\partial y)$ , определяющую процесс эрозии на откосе. Множитель  $G_0$  вычисляется по формуле (4.16), а динамическая скорость выражается через уклон дна по оси канала  $U_* = \sqrt{ghI}$ . На рис. 5 изображено сечение канала: штриховые линии — поверхность дна в начальный момент времени, пунктирные — свободная поверхность, сплошные — теоретические кривые, найденные из решения уравнения (6.1), крестики — экспериментальные значения отметки дна, замеренные через 0,7 и 1,1 ч. Расход воды  $Q = 0,187 \text{ м}^3/\text{с}$ . Аналогичное сопоставление при других значениях расхода также показало хорошее соответствие теории и эксперимента [7]\*.

**7. Учет относительной скорости частиц.** В модели предполагалось, что скорости твердых частиц и жидкости одинаковы (односкоростная модель). Поэтому полученная формула расхода (4.16) не определяет известного из эксперимента значения скорости трогания частиц (наименьшего значения динамической скорости, при котором начинается движение частиц в придонном слое).

Следуя [8], влияние относительной скорости можно учесть при рассмотрении баланса сил, действующих на единицу объема твердых частиц. При этом ускорение частиц в тонком слое  $0 \leq z \leq a$  можно не учитывать:

$$\mathbf{F}_w + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g = 0. \tag{7.1}$$

Здесь  $\mathbf{F}_w$  — сила сопротивления, действующая на частицы со стороны воды;  $\mathbf{F}_p$  — сила трения между частицами;  $\mathbf{F}_g$  — сила тяжести.

Для частиц диаметром более 0,2 мм сила сопротивления пропорциональна квадрату относительной скорости  $\mathbf{v}_r$  частиц. Коэффициент сопротивления можно найти из условия равенства силы тяжести и сопротивления для падающей тяжелой частицы:

$$\mathbf{F}_w = -(\rho_p - \rho_w)gC \frac{\mathbf{v}_r |\mathbf{v}_r|}{W^2}, \tag{7.2}$$

где  $W$  — скорость осаждения тяжелой частицы в жидкости.

Сила трения между частицами определяется из реологического соотношения (3.4) для напряжения твердой фазы:

$$\mathbf{F}_p = \frac{\partial(\tau_p \mathbf{e})}{\partial z} = -(\rho_p - \rho_w)gC \frac{\partial(\mathbf{e}f)}{\partial f} \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma. \tag{7.3}$$

Сила тяжести в проекции на касательную к поверхности дна плоскость представляется в виде

$$\mathbf{F}_p = -(\rho_p - \rho_w)gC \Gamma \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma. \tag{7.4}$$

\*Эксперименты выполнены А. Н. Милитеевым и Н. Л. Мойжес в гидравлической лаборатории Института транспортного строительства (Москва).

Из (7.1)–(7.4) для относительной скорости частиц получим соотношение

$$\frac{\mathbf{v}_r|\mathbf{v}_r|}{W^2} = -\frac{\mathbf{e}_1}{a_1} \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma, \quad \mathbf{e}_1 = a_1 \left[ \Gamma + \frac{\partial(\mathbf{e}f)}{\partial f} \right]. \quad (7.5)$$

При учете относительной скорости расход  $\mathbf{G}$  изменится на величину

$$\Delta \mathbf{G} = \rho_p \int_0^a C \mathbf{v}_r dz = -\rho_p \Phi_0 \int_0^a \mathbf{v}_r df(z), \quad (7.6)$$

где  $\mathbf{v}_r$  находится из (7.5):

$$\mathbf{v}_r = -W \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{a_1}} \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{|\mathbf{e}_1|}}.$$

Подставляя это выражение в (7.6), получим

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{J} \rho_p \Phi_0 W \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{a_1}}, \quad \mathbf{J} = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{|\mathbf{e}_1|}} df. \quad (7.7)$$

Следует отметить, что вектор  $\mathbf{J}$  не зависит от функции распределения частиц в слое  $f(z)$ . Его можно вычислить, разлагая подынтегральную функцию с точностью до членов порядка  $\Gamma^3$ :

$$\frac{e_{1x}}{\sqrt{|\mathbf{e}_1|}} = 1 + f \left( 1 - \frac{7}{4} f \right) \Gamma_y^2, \quad \frac{e_{1y}}{\sqrt{|\mathbf{e}_1|}} = (1 - 2f) \Gamma_y - (1 - f)(1 - 3f) \Gamma_x \Gamma_y. \quad (7.8)$$

После подстановки (7.8) в (7.7) получим разложения для векторов  $\mathbf{J}$  и  $\Delta \mathbf{G}$  с точностью до членов третьего порядка по  $\Gamma_x, \Gamma_y$ :

$$\mathbf{J} \approx (1 - \Gamma_y^2/12) \mathbf{s}. \quad (7.9)$$

Точное значение интеграла (7.6) практически не отличается от приближенного (7.9), о чем можно судить по результатам, представленным в табл. 2 ( $\Gamma_x = 0$ ). Здесь  $\Delta J_x, \Delta J_y = J_y$  — разность между точными и приближенными значениями компонент вектора  $\mathbf{J}$ . При увеличении  $\Gamma_x$  ошибка быстро уменьшается.

С помощью формул (4.16), (4.17), (5.2) и (7.7), (7.9) можно найти компоненты вектора расхода  $\mathbf{G} + \Delta \mathbf{G}$  для конечных значений вектора уклона  $\Gamma$ :

$$G_x + \Delta G_x = G_0 a_1 A (1 - U_{*T}/U_*), \quad G_y + \Delta G_y = -G_0 a_1 B \Gamma_y, \quad (7.10)$$

$$U_{*T} = \varkappa W \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{a_1}} \frac{J}{A}, \quad J \approx 1 - \frac{\Gamma_y^2}{12}.$$

Величина  $U_{*T}$  определяет скорость трогания частиц. Расход в направлении вектора  $\mathbf{T}$  отсутствует, если  $U_{*T} \leq U_*$ . Отношение  $J/A \approx (3/4)(1 + 0,5\Gamma_y^2) \approx 3/4$  слабо зависит от

Таблица 2

$\Gamma_y$	$\Delta J_x$	$\Delta J_y$
0,2	0	-0,0010
0,4	-0,0008	-0,0085
0,6	-0,0055	-0,0314
0,8	-0,0302	-0,0914

вектора уклона. Отсюда, подставляя в (7.10) значения  $\varkappa \approx 0,4$ ,  $A = 4/3$ ,  $\sqrt{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma} \approx 0,7$ , получим приближенную формулу, удобную для инженерных расчетов:

$$U_{*T} = 0,2W/\sqrt{a_1}. \quad (7.11)$$

Зависимость скорости трогания частиц от уклона дна учитывается в (7.11) множителем  $a_1$ .

*Физический смысл скорости трогания частиц.* Формулу трогания частиц можно получить из условия для критической толщины слоя. Если толщина слоя  $a$  меньше диаметра частиц  $d$ , то твердые частицы в слое двигаться не будут. В этом случае сила кулоновского трения между частицами превышает приложенную внешнюю силу  $\mathbf{T}$ , описание движения методами механики сплошной среды (3.1)–(3.4) неприменимо. Условие начала трогания частиц  $a > d$  запишем с учетом равенства (4.3):

$$a \approx a_1 U_*^2 / ((s-1)g\bar{C} \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma) > d, \quad s = \rho_p / \rho_w, \quad (7.12)$$

где  $\bar{C}$  — средняя концентрация частиц в слое. Используя для скорости осаждения частиц формулу  $W^2 = (s-1)gd$  [9] (баланс сил сопротивления и тяжести), условие (7.12) можно представить в виде

$$U_*^2 > U_{*T}^2, \quad U_{*T} = W \sqrt{\bar{C} \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma} / \sqrt{a_1}. \quad (7.13)$$

Формула (7.13) совпадает с (7.10) и (7.11) при  $\bar{C} = (J\varkappa/A)^2 \approx 0,09$ .

**8. Сравнение формул расхода и скорости трогания частиц с эмпирическими зависимостями.** Одна из наиболее точных эмпирических формул расхода приведена в [9]:

$$G = (8\rho_p/(s-1)) \sqrt{g}(U_*^2/g - 0,047d)^{3/2}. \quad (8.1)$$

Используя для скорости осаждения частиц формулу  $W^2 = (s-1)gd$  [9] и для скорости трогания — формулу (7.10), можно (8.1) преобразовать к виду

$$G = 8\rho_p U_*^3 / ((s-1)g)(1 - (U_{*T}/U_*)^2)^{3/2}.$$

Для практики представляет интерес диапазон  $U_{*T}/U_* < 0,9$ , в котором расходы, вычисленные по формулам (8.1) и (7.10), отличаются не более чем на 20% при  $\Gamma = 0$ .

Рассмотрим формулу для скорости трогания (7.11) для наиболее важных случаев.

*Однородное течение над горизонтальным дном* ( $\Gamma = 0$ ). Из (4.7) и (7.11) получим известную эмпирическую зависимость [9]

$$a_1 = 1, \quad U_{*T0} = 0,2W.$$

*Течение в канале с откосом.* Уклон дна и вектор  $\mathbf{\Gamma}$  перпендикулярны оси канала  $x$  и касательному напряжению на дне. Из (4.7) и (7.11) получим

$$\Gamma_x = 0, \quad a_1 = 1/\sqrt{1 - \Gamma_y^2}, \quad U_{*T} = U_{*T0}(1 - \Gamma_y^2)^{1/4}.$$

Эта формула получена и экспериментально проверена в [10].

*Течение с большим уклоном, параллельным оси канала.* Уклон дна и вектор  $\mathbf{\Gamma}$  параллельны скорости и напряжению  $\mathbf{T}$ . Из (4.7) и (7.11) получим

$$\Gamma_y = 0, \quad \Gamma_x = -\operatorname{tg} \gamma / \operatorname{tg} \varphi, \quad a_1 = 1/(1 + \Gamma_x), \quad U_{*T} = U_{*T0} \sqrt{1 + \Gamma_x}.$$

Результаты расчета по приведенной формуле хорошо согласуются с результатами эксперимента [11] для  $U_{*T}$  при значениях угла  $\gamma = 0, 12, 18, 22^\circ$ .

**Выводы.** Окончательный результат для вектора расхода не содержит ни одного эмпирического параметра и может применяться для поверхности дна с любым конечным

уклоном вплоть до обрушения. Для одномерного течения над горизонтальным дном основной результат совпадает с известными эмпирическими формулами [9].

Из найденной формулы расхода наносов следует условие начала процесса эрозии дна (начала трогания частиц), которое обобщает известные случаи: условие Шильдса [9] для горизонтального дна, условие для начала трогания частиц в канале с поперечным уклоном дна (откосом) [10], опыты для большого уклона дна вдоль оси канала [11].

Принципиальное отличие полученной теоретической формулы от известных эмпирических формул состоит в том, что вектор расхода наносов содержит поперечную к направлению течения составляющую, пропорциональную поперечной составляющей вектора уклона дна, а эмпирические зависимости учитывают только продольную составляющую вектора. Процесс эрозии в каналах с уклоном дна поперек оси канала не может быть описан с помощью известных эмпирических зависимостей, не учитывающих поперечную составляющую вектора расхода наносов, в то время как с помощью полученной формулы расхода наносов с учетом поперечной составляющей достигнуто полное согласие теории с экспериментами по эрозии дна в таких каналах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Колмогоров А. Н.** О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных частиц наносов М. А. Великанова // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1954. № 3. С. 41–45.
2. **Баренблатт Г. И.** О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, № 1. С. 61–88.
3. **Bagnold R. A.** The flow of cohesionless grains in fluids // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 249. P. 235–297.
4. **Kobayashi N.** Fluid and sediment interaction over a plan bed // J. Hydraul. Engng. 1985. V. 111, N 6.
5. **Wilson K. C.** Analysis of bed-load motion at high shear stress // J. Hydraul. Engng. 1987. V. 113, N 1. P. 97–103.
6. **Nnadi F. N., Wilson K. C.** Motion of contact-load at high shear stress // J. Hydraul. Engng. 1992. V. 118, N 12. P. 1670–1684.
7. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–76.
8. **Петров А. Г., Петров П. Г.** Перенос взвешенных частиц турбулентным потоком над размываемым дном // ПМТФ. 1992. № 4. С. 61–69.
9. **Гришанин К. В.** Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1979.
10. **Lane E. W., Carlson E. J.** Some factors affecting the stability of channel sconstructed in coarse granul material // Proc. of the Minnesota Intern. hydraul. convention. 1953.
11. **Fernandez L. R., van Beek R.** Erosion and transport of bed-load sediment // J. Hydraul. Res. 1976. V. 14, N 2. P. 127–144.

*Поступила в редакцию 16/II 1999 г.*