ПМТФ, № 4, 1971

УДК 532.517

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛОСКОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ ЭЛЛИПСА

В. В. Пухначев

(Новосибирск)

Указанная в заглавии задача о малых возмущениях решается явно. Исследование поведения решения при $t \to \infty$ показывает его ограниченность в слабой, «потенциальной», метрике. Вместе с тем вектор возмущения свободной границы эллипса со временем растет неограниченно.

1. Постановка задачи. Известно, что уравнения плоского потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости допускают точное решение

$$u = \tau^{\cdot}\xi = \frac{\tau^{\cdot}}{\tau}, \qquad v = -\frac{\tau^{\cdot}}{\tau^2}\eta = -\frac{\tau^{\cdot}}{\tau}y \tag{1.1}$$

$$p = -{}^1/_2\, \tau\tau^{\cdot\cdot}(\zeta^2 + \eta^2 - 1)$$

Здесь ξ, η — лагранжевы, а x, y — эйлеровы координаты, t — время, точка в позиции штриха означает дифференцирование по t; функция $\tau(t)$ задается соотношением

$$\int\limits_1^{\tau} \sqrt{\rho^4 + 1}\, \frac{d\rho}{\rho^2} = kt \qquad (k = \mathrm{const} > 0) \tag{1.2}$$

Решение (1.1) допускает простую интерпретацию: при $t = 0$ в круге Ω $(\xi^2 + \eta^2 < 1)$ задано поле скоростей

$$u_0 = {}^1/_2 \sqrt{2}\, k\xi = {}^1/_2 \sqrt{2}\, kx, \qquad v_0 = -{}^1/_2 \sqrt{2} k\eta = -{}^1/_2 \sqrt{2}k$$

С ростом t круг Ω деформируется в эллипс Ω_t, большая полуось которого $\tau \to \infty$, а малая $\tau^{-1} \to 0$. Граница эллипса остается свободной при всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим другое решение уравнений плоского потенциального движения в той же области Ω плоскости лагранжевых координат, но с измененным начальным потенциалом

$$\varphi_0^*(\xi, \eta) = \varphi_0(\xi, \eta) + \Phi_0(\xi, \eta), \qquad \Delta\Phi_0 = 0$$

$$\varphi_0 = 2^{-3/2} k(\xi^2 - \eta^2)$$

Здесь φ_0 — значение потенциала основного течения (1.1) при $t = 0$, а Φ_0 — начальное возмущение потенциала. Предполагая начальное возмущение Φ_0 малым, можно изучать задачу об эволюции малых возмущений в линейной постановке. Уравнения малых возмущений потенциального движения со свободной границей были выведены Л. В. Овсянниковым [1]. В случае основного решения (1.1) они имеют вид

$$\frac{1}{\tau^2}\Phi_{\xi\xi}+\tau^2\Phi_{\eta\eta}=0 \qquad (\xi^2+\eta^2<1,\ t\geqslant 0) \tag{1.3}$$

$$\Phi_t=-\frac{2k^2\tau^4}{(\tau^4+1)^2}\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\tau^2}\xi\Phi_\xi+\tau^2\eta\Phi_\eta\right)dt \tag{1.4}$$

$$(\xi^2+\eta^2=1,\ t>0)$$

К этим уравнениям следует добавить начальное условие

$$\Phi(\xi,\eta,0)=\Phi_0(\xi,\eta),\qquad \Delta\Phi_0=0 \tag{1.5}$$

Ниже исследуется решение задачи (1.3)—(1.5) при $t\to\infty$; результаты позволят сделать выводы об устойчивости основного решения (1.1) по отношению к потенциальным возмущениям.

Отметим, что в настоящее время нет сколь-нибудь общего подхода к изучению устойчивости неустановившегося движения жидкости со свободной границей. Каждую подобную задачу об устойчивости приходится рассматривать индивидуально. До сих пор были исследованы лишь плоские задачи, в которых свободные границы — прямые или окружности [2,1] (см. также [3]). По аналогии с рассмотренными примерами движений Л. В. Овсянников высказал гипотезу, что движение, описываемое формулами (1.1), будет неустойчивым. Ниже решение задачи (1.3) — (1.5) строится в явном виде. Анализ асимптотики решения при $t\to\infty$ подтверждает эту гипотезу.

2. Построение решения задачи. Перейдем в уравнениях (1.3), (1.4) к независимой переменной τ вместо t. Ввиду (1.2) соответствие между τ и t взаимно однозначно при $\tau\geqslant 1$ $(t\geqslant 0)$. Сделаем замену искомой функции

$$\Phi(\xi,\eta,t)=\tau\left(\frac{2}{\tau^4+1}\right)^{3/4}w(\xi,\eta,\tau)$$

и продифференцируем по τ преобразованное уравнение (1.4). В результате вместо (1.3), (1.4) получим

$$\frac{1}{\tau^2}w_{\xi\xi}+\tau^2 w_{\eta\eta}=0 \qquad (\xi^2+\eta^2<1,\ \tau\geqslant 1) \tag{2.1}$$

$$w_{\tau\tau}+\frac{2}{\tau^4+1}\left(\frac{1}{\tau^2}\xi w_\xi+\tau^2\eta w_\eta\right)+r(\tau)w=0 \tag{2.2}$$

$$(\xi^2+\eta^2=1,\ \tau>1)$$

Здесь

$$r(\tau)=-\frac{2\tau^8+7\tau^4+2}{\tau^2(\tau^4+1)^2}$$

Выпишем начальные условия для этих уравнений. Из определения следует, что

$$\Phi=w,\quad \Phi_\tau=w_\tau-{}^1/_2 w \quad \text{при} \quad \tau=1$$

Согласно (1.4), (1.5) имеем

$$\Phi=\Phi_0,\quad \Phi_\tau=0 \quad \text{при } \tau=1$$

Поэтому

$$w=2w_\tau=\Phi_0(\xi,\eta) \quad \text{при } \tau=1 \tag{2.3}$$

Функция Φ_0 — гармоническая в круге Ω, поэтому достаточно задать Φ_0 на окружности Γ $(\xi^2+\eta^2=1)$

$$\Phi_0|_\Gamma=\psi(\theta),\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}(\eta/\xi)$$

Периодическую функцию ψ будем считать заданной ее рядом Фурье

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\theta + g_n \sin\theta) + f_0$$

Не теряя общности, можно полагать $f_0 = 0$. В самом деле, если $f_n = g_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то единственное решение задачи (2.1) — (2.3) есть $\Phi = f_0 = \text{const}$.

Сформулируем теперь задачу (2.1)—(2.3) в терминах граничной функции z

$$z(\theta, \tau) = w(\xi, \eta, \tau)\,|_\Gamma$$

Ясно, что значение z позволяет однозначно определить w в круге Ω как решение задачи Дирихле для уравнения (2.1). Введем в рассмотрение оператор K, действующий по правилу: по функции $z(\theta, \tau)$ находится функция $w(\xi, \eta, \tau)$, удовлетворяющая уравнению (2.1) в круге Ω и условию $w|_\Gamma = z$, и затем вычисляется

$$K(\tau) z = \tau^{-2}\xi w_\xi + \tau^2 \eta w_\eta \quad \text{при } \xi^2 + \eta^2 = 1 \tag{2.4}$$

Задачу (2.1)—(2.3) можно рассматривать как задачу Коши для уравнения с нелокальным оператором K

$$z_{\tau\tau} + \frac{2}{\tau^4 + 1} K(\tau) z + r(\tau) z = 0 \tag{2.5}$$

$$z(\theta + 2\pi, \tau) = z(\theta, \tau) \tag{2.6}$$

$$z(\theta, 1) = 2z_\tau(\theta, 1) = \psi(\theta) \tag{2.7}$$

Уравнение (2.5) — это переписанное в новых обозначениях уравнение (2.2), а соотношения (2.7) — это начальные условия (2.3), записанные на границе Γ круга Ω.

Как отмечалось выше, без потери общности можно считать, что среднее значение $\psi(\theta)$ равно нулю. Покажем, что тогда при $\tau > 1$

$$\chi(\tau) \equiv \int_0^{2\pi} z(\theta, \tau)\, d\tau = 0 \tag{2.8}$$

На основании (2.7) получаем $\chi(1) = \chi_\tau(1) = 0$. Проинтегрируем уравнение (2.5) по θ от 0 до 2π. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} Kz d\theta = \int_\Gamma (\tau^{-2}\xi w_\xi + \tau^2\eta w_\eta)\, d\Gamma = \int_\Omega (\tau^{-2} w_{\xi\xi} + \tau^2 w_{\eta\eta})\, d\Omega = 0$$

находим для χ уравнение

$$\chi_{\tau\tau} + r(\tau)\chi = 0$$

Итак, функция χ есть решение однородной задачи Коши для линейного уравнения, что и дает (2.8).

Обозначим через $L_2'(0,2\pi)$ подпространство гильбертова пространства $L_2(0,2\pi)$, образованное функциями с нулевым средним значением. Из (2.8) следует, что если решение $z(\theta, \tau)$ задачи (2.5)—(2.7) при фиксированном $\tau > 1$ принадлежит $L_2(0, 2\pi)$, то оно принадлежит и $L_2'(0,2\pi)$.

Рассмотрим ряд свойств оператора K. Зафиксируем значение $\tau \geqslant 1$. Оператор K определен не на всем пространстве $L_2'(0,2\pi)$. Однако он определен на всех тригонометрических полиномах с нулевым свободным членом, т. е. на множестве, плотном в L_2' (0, 2π). Итак, неограниченный оператор K имеет плотную в L_2' (0, 2π) область определения D (K). Покажем, что он симметричен и положительно определен. Действительно, если $\bar z$, $z \in D$ (K), то

$$\int_0^{2\pi} \bar z K z d\theta = \int_\Gamma \bar w\,(\tau^{-2}\xi w_\xi + \tau^2 \eta w_\eta)\,d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma w\,(\tau^{-2}\xi \bar w_\xi + \tau^2 \eta \bar w_\eta)\,d\Gamma = \int_0^{2\pi} z K \bar z d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} z K z d\theta = \int_\Gamma w\,(\tau^{-2}\xi w_\xi + \tau^2 \eta w_\eta)\,d\Gamma = \int_\Omega (\tau^{-2} w_\xi^2 + \tau^2 w_\eta^2)\,d\Omega$$

что и требуется доказать. (При написании последних равенств воспользовались определением (2.4) оператора K и формулами Грина для решений w, $\bar w$ уравнения (2.1)). Из перечисленных свойств оператора K следует, что он допускает самосопряженное расширение [4], которое снова обозначим через K. Кроме того, обратный к K оператор вполне непрерывен. Это позволяет заключить, что оператор K имеет (при любом $\tau = \text{const} \geqslant 1$) полную в L_2' (0, 2π) систему собственных функций [4]. Оказывается, что их можно выписать явно.

Предложение 1. При любом натуральном n функции $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ являются собственными функциями оператора K. Им соответствуют собственные числа

$$\lambda_n = n\,\mathrm{th}\,ns\,(\tau), \quad \mu_n = n\,\mathrm{cth}\,ns\,(\tau), \quad s\,(\tau) = \mathrm{ar\,th}\,\tau^{-2}$$

Доказательство. Перейдем в (2.1), (2.4) к эллиптическим координатам p, q по формулам

$$\mathrm{ch}\,p \cos q = \frac{\tau^2\xi}{\sqrt{\tau^4-1}}, \qquad \mathrm{sh}\,p \sin q = \frac{\eta}{\sqrt{\tau^4-1}} \tag{2.9}$$

Круг Ω отображается посредством (2.9) на круг, задаваемый в полярных координатах p, q соотношениями

$$p < s = \mathrm{ar\,th}\tau^{-2}, \qquad 0 \leqslant q < 2\pi$$

Уравнение (2.1) переходит в уравнение

$$W_{pp} + W_{qq} = 0, \qquad W\,(p, q, \tau) = w\,(\xi, \eta, \tau)$$

Соотношение (2.4) принимает вид

$$Kz = \frac{\partial W}{\partial p} \quad \text{при } p = s \qquad (z = W\,|_{p=s}) \tag{2.10}$$

(имеется в виду, что правая часть здесь выражена через θ, τ).

Уравнение $W_{pp} + W_{qq} = 0$ имеет частные решения

$$\begin{aligned} W_{1n} &= (\mathrm{ch}\,ns)^{-1}\,\mathrm{ch} np \cos nq \\ W_2 &= (\mathrm{sh}\,ns)^{-1}\,\mathrm{sh}\,np\,\sin nq \end{aligned} \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

Этим решением соответствуют регулярные в круге Ω решения уравнения (2.1). При этом

$$W_{1n} = \cos nq, \quad W_{2n} = \sin nq \quad \text{при } p = s$$

$$\frac{\partial W_{1n}}{\partial p} = n\,\mathrm{th}\,ns \cos nq, \qquad \frac{\partial W_{2n}}{\partial p} = n\,\mathrm{cth}\,ns \sin nq$$

Полагая $z_{1n} = \cos n\,\theta$, $z_{2n} = \sin n\theta$ и учитывая, что $q = \theta = \operatorname{arc\,tg} \eta / \xi$ при $p = s$, получаем из последних равенств и (2.10), что

$$Kz_{1n} = \lambda_n z_{1n}, \quad Kz_{2n} = \mu_n z_{2n}.$$

Предложение 1 доказано.

Весьма важным является то обстоятельство, что собственные функции оператора K не зависят от τ. Это дает возможность разделить переменные в уравнении (2.5). Будем искать решение этого уравнения в виде ряда по собственным функциям

$$z(\theta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n a_n(\tau) \cos n\theta + g_n b_n(\tau) \sin n\theta] \tag{2.12}$$

Здесь f_n, g_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье начальной функции $\psi(\theta)$, а $a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$ — функции, подлежащие определению.

Решение (2.12) будет удовлетворять условию (2.6), если положить

$$a_n(1) = b_n(1) = 2a_n'(1) = 2b_n'(1) = 1 \tag{2.13}$$

(штрих означает дифференцирование по τ). Подстановка (2.12) в уравнение (2.5) приводит на основании предложения 1 к распадающейся системе обыкновенных уравнений для функций

$$\begin{gathered} a_n'' + \left[\frac{2n \operatorname{th} ns(\tau)}{\tau^4 + 1} + r(\tau)\right] a_n = 0 \\ b_n'' + \left[\frac{2n \operatorname{cth} ns(\tau)}{\tau^4 + 1} + r(\tau)\right] b_n = 0 \end{gathered} \tag{2.14}$$

Таким образом, отыскание решения нелокальной задачи Коши (2.5)—(2.7) сведено к решению задач Коши (2.13), (2.14) для обыкновенных уравнений. Знание функции z без труда позволяет выписать решение задачи (2.1)—(2.3), а значит, и искомую функцию $\Phi(\xi, \eta, \tau)$. В самом деле, w есть решение задачи Дирихле для уравнения (2.1) с условием $w_\Gamma = z$.

Величина τ входит в (2.1) как параметр, поэтому для определения w достаточно решить данную задачу с $z = z_{1n} = \cos n\,\theta$ и $z = z_{2n} = \sin n\,\theta$ (натуральное и n фиксировано). Но, как это явствует из доказательства предложения 1, решение такой задачи дается формулой (2.11). Сформулируем окончательный результат. Решение задачи (1.3)—(1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi = \tau \left(\frac{2}{\tau^4 + 1}\right)^{3/4} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[& f_n a_n(\tau) \frac{\operatorname{ch} np(\xi, \eta, \tau)}{\operatorname{ch} ns(\tau)} \cos nq(\xi, \eta, \tau) + \\ & + g_n b_n(\tau) \frac{\operatorname{sh} np(\xi, \eta, \tau)}{\operatorname{sh} ns(\tau)} \sin nq(\xi, \eta, \tau) \Big] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь функции p, q $(0 \leqslant p \leqslant s,\ 0 \leqslant q < 2\pi)$ находятся из уравнений (2.9), $s = \operatorname{ar\,th} \tau^{-2}$, τ связано с t посредством (1.2). Функции $a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$ есть решения уравнений (2.14) с условиями (2.13).

Отметим, что построенное решение задачи (1.3) — (1.5) единственное. Теорема единственности для более общих задач о малых возмущениях неустановившихся движений идеальной жидкости со свободной границей доказана в [1,3].

3. Асимптотическое поведение решения. Для получения асимптотики решения задачи (1.3)—(1.5) при больших t необходимо знать поведение решений задач Коши (2.13), (2.14) при $\tau \to \infty$, так как $\tau = kt[1 + O(t^{-4})]$ для больших t согласно (1.2).

Пусть n фиксировано. Рассмотрим уравнения (2.14) при больших τ. Учитывая, что

$$s = \tau^{-2} + O(\tau^{-6}), \quad r = -2\tau^{-2} + O(\tau^{-6}) \text{ при } \tau \to \infty$$

имеем

$$a_n'' + [-2\tau^{-2} + O(\tau^{-6})]\, a_n = 0, \quad b_n'' + O(\tau^{-6})\, b_n = 0 \quad \text{при } \tau \to \infty$$

Отсюда находим асимптотическое представление двух линейно-независимых решений каждого из уравнений (2.14) при $\tau \to \infty$

$$\begin{aligned} a_{n1} &= \tau^2 [1 + O(\tau^{-4})], & a_{n2} &= \tau^{-1} [1 + O(\tau^{-4})] \\ a_{n1}' &= 2\tau [1 + O(\tau^{-4})], & a_{n2}' &= -\tau^{-2} [1 + O(\tau^{-4})] \\ b_{n1} &= \tau [1 + O(\tau^{-4})], & b_{n2} &= 1 + O(\tau^{-4}) \\ b_{n1}' &= 1 + O(\tau^{-4}), & b_{n2}' &= O(\tau^{-5}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если ограничиться рассмотрением отдельной гармоники (это означает, что все коэффициенты f_n, g_n в (2.12) равны нулю, кроме одного), то последних формул достаточно, чтобы доказать ограниченность решения Φ задачи (1.3)—(1.5) при $t \to \infty$.

Действительно, в этом случае из (3.1) следует, что $z(\theta, \tau) = O(t^2)$ при $\tau \to \infty$ равномерно относительно θ. Поскольку

$$\Phi|_\Gamma = \tau \left(\frac{2}{\tau^4 + 1}\right)^{3/4} z(\theta, \tau) \tag{3.2}$$

то отсюда вытекает ограниченность Φ_Γ при $t \to \infty$. В силу принципа максимума для уравнения (1.3) функция Φ будет ограниченной при $t \to \infty$ для любых ξ, $\eta \in \Omega$.

Пусть теперь начальная функция $\psi(\theta)$ — произвольный элемент $L_2'(0, 2\pi)$. Оказывается, что и в этом случае решение задачи (1.3)—(1.5) ограничено в следующем смысле:

$$\int_\Gamma \Phi|_\Gamma^2 d\Gamma \leqslant C_0 \|\psi\|_{L_2}^2 \qquad (t \geqslant 0) \tag{3.3}$$

$$\|\psi\|_{L_2} = \left(\int_0^{2\pi} \psi^2(\theta)\, d\theta\right)^{1/2} = \left[\pi \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^2 + g_n^2)\right]^{1/2}$$

Здесь C_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ обозначают положительные постоянные. Доказательство оценки (3.2) базируется на следующем предложении.

Предложение 2. Решение каждого из уравнений (2.14) с начальными условиями (2.13) удовлетворяет неравенствам

$$|a_n(\tau)| \leqslant C_1 \max(\tau, \tau^2/\sqrt{n}), \quad |b_n(\tau)| \leqslant C_2 \tau \tag{3.4}$$

$$|a_n'(\tau)| \leqslant C_1 \max(\sqrt{n}/\tau, \tau/\sqrt{n}), \quad |b_n'(\tau)| \leqslant C_2 \max(\sqrt{n}/\tau, 1) \tag{3.5}$$

$$(\tau \geqslant 1, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Доказательство этого предложения изложено в п.4.

Неравенство (3.3) является простым следствием (3.2) и оценок (3.4). Полученный результат об ограниченности $\|\Phi|_\Gamma\|_{L_2}$ при $t \to \infty$ можно трактовать как устойчивость по линейному приближению основного решения в потенциальной метрике.

Следует отметить, что в частном случае, когда все $f_n = 0$, из (3.2), (3.4) вытекает, что $\| \Phi |_\Gamma \|_{L_2} = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Если, сверх того, $g_n = 0$ при нечетных n, то решение Φ, определяемое формулой (2.15), будет четной функцией ξ и нечетной функцией η.

Четное по ξ решение описывает движение с непроницаемой стенкой $\xi = 0$, поэтому такое движение асимптотически устойчиво в потенциальной метрике относительно нечетных по η возмущений.

Неравенства (3.5) вместе с (3.2), (2.12) позволяют доказать, что верна следующая оценка для производной Φ_t:

$$\int\limits_\Gamma \Phi_t^2 |_\Gamma \, d\Gamma \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n (f_n^2 + g_n^2) \tag{3.6}$$

при условии, что ряд в правой части сходится. Требование его сходимости равносильно принадлежности начальной функции $\psi(\theta)$ пространству Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}(0, 2\pi)$.

Повышая гладкость $\psi(\theta)$, можно получать оценки производных Φ более высокого порядка. В частности, если $\psi \in W_2^1(0, 2\pi)$, где W_2^1 — пространство Соболева [4], то $\Phi_{tt} \mid_\Gamma$, $\Phi_\xi |_\Gamma$, $\Phi_\eta \mid_\Gamma$, при фиксированном t принадлежат $L_2(0,2\pi)$, причем их нормы в L_2 ограничены для всех $t > 0$. Если же $\psi \in W_2^2(0,2\pi)$, то функции $z_{\tau\tau}$, Kz, входящие в уравнение (2.5), непрерывны по θ, τ и это уравнение удовлетворяется в классическом смысле.

С физической точки зрения представляет интерес получение оценок поля скоростей, возникающего при возмущении основного течения (1.1). Согласно [1] проекции U, V возмущения вектора скорости вычисляются по формулам

$$U = \frac{\partial}{\partial t}\left(\tau \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^2}\Phi_\xi dt\right), \quad V = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^t \tau^2 \Phi_\eta dt\right) \tag{3.7}$$

Ограничимся для простоты рассмотрением одной гармоники. В дальнейшем будем обозначать иднексом c решение, соответствующее начальной функции $\psi = f_n \cos n\theta$, и индексом s — решение, соответствующее $\psi = g_n \sin n\theta$. Анализ асимптотики U, V при $t \to \infty$ исходит из формул (3.7), (2.15), (3.1). Этот анализ требует больших выкладок и здесь не приводится. Он показывает, что при $x, y \in \Omega_t$ и $t \to \infty$ величины U_s, U_c растут линейно по t вблизи концов большой оси эллипса Ω_t, V_s ограничена, а $V_c \to \infty$.

Приведенные выше результаты свидетельствуют в пользу устойчивости по линейному приближению основного течения, если за меру устойчивости брать норму в L_2 возмущения потенциала или его производных. Однако если судить об устойчивости по отклонению свободной границы от ее невозмущенного состояния, то движение (1.1) следует признать неустойчивым. Наиболее удобно характеризовать вектор возмущения границы эллипса Ω_t его нормальной к Γ_t компонентой R (определение и геометрический смысл см. в [1,3]). Для основного решения (1.1) величина дается равенством

$$R = -\frac{(\tau^4+1)^2}{2k^2\tau^2(\cos^2\theta + \tau^4\sin^2\theta)}\Phi_t|_\Gamma \tag{3.8}$$

Пользуясь (3.2), и (2.12), можно получить из (3.8) представление для R в виде ряда Фурье с коэффициентами, выраженными в терминах $a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$. По-прежнему ограничиваясь рассмотрением отдельных гармоник, находим:

для c-решения

$$R_c = -\frac{f_n(\tau^4+1)^{3/2}\cos n\theta}{2k(\cos^2\theta+\tau^4\sin^2\theta)}\frac{d}{d\tau}\left[\tau\left(\frac{2}{\tau^4+1}\right)^{3/4}a_n(\tau)\right] \qquad (3.9)$$

для s-решения

$$R_s = -\frac{g_n(\tau^4+1)^{3/2}\sin n\theta}{2k(\cos^2\theta+\tau^4\sin^2\theta)}\frac{d}{d\tau}\left[\tau\left(\frac{2}{\tau^4+1}\right)^{1/4}b_n(\tau)\right] \qquad (3.10)$$

Так как в этих соотношениях n фиксировано, то для получения асимптотик R_c, R_s при $t\to\infty$ достаточно воспользоваться формулами (3.1); в результате получим при $t\to\infty$

$$R_c = \frac{\tau^2\cos n\theta}{\cos^2\theta+\tau^4\sin^2\theta}[f_n\beta_n+O(\tau^{-1})] \quad (\beta_n = \mathrm{const}) \qquad (3.11)$$

$$R_s = \frac{\tau^4\sin n\theta}{\cos^2\theta+\tau^4\sin^2\theta}[g_n\gamma_n+O(\tau^{-1})] \quad (\gamma_n = \mathrm{const})$$

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Из (3.11) видно, что вне зон $|\theta| < \varepsilon$, $|\pi-\theta| < \varepsilon$ справедливы оценки $R_c = O(t^{-2})$, $R_s = O(1)$ при $t\to\infty$ (напомним, что $\tau \sim kt$ для больших t). Таким образом, неустойчивость свободной границы проявляется вблизи точек $\theta = 0$, $\theta = \pi$ окружности Γ на плоскости лагранжевых координат.

Рассмотрим поведение R_c, R_s при $t\to\infty$, $\theta\to 0$. (Анализ случая $\theta\to\pi$ проводится аналогично.) Согласно (3.11), если $t\,|\theta| = \mathrm{const}$ при $t\to\infty$, то величина R_c все еще остается ограниченной. Если $t^{1+\sigma}\,|\theta| = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ при $t\to\infty$, то $R_c \sim t^{2\delta}$.

Максимальный рост $R_c \sim t^2$ наблюдается в области $t^2\,|\theta| < \mathrm{const}$. При этом R_c сохраняет знак вблизи $\theta = 0$.

По-иному развивается неустойчивость свободной границы для s-решения. В этом случае при условии $t^\delta\,|\theta| = \mathrm{const}$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 2)$, когда $t\to\infty$, имеем $R_s \sim t^\delta$. Наибольший рост $R_s \sim t^2$ происходит, когда θ и t связаны соотношением $t^2\,|\theta| \sim 1$ при $t\to\infty$, причем R_s меняет знак в окрестности $\theta = 0$; R_s ограничено, если $|\theta| = O(t^{-4})$, $R_s = 0$ для $\theta = 0$.

Интересно оценить размер зон неустойчивости свободной границы в эйлеровых координатах. Граница эллипса Γ_t имеет уравнение $\tau^{-2}x^2 + \tau^2y^2 = 1$. Точке $(\xi = 1,\ \eta = 0)$ соответствует на плоскости xy точка $(x = \tau,\ y = 0)$.

Оценим расстояние Δx по оси x от конца большой полуоси эллипса $x = \tau$, $y = 0$ до точек на Γ_t, где $\theta \sim t^{-1}$.
Учитывая, что

$$\theta = \mathrm{arc\,tg}\,(\eta/\xi) = \mathrm{arc\,tg}\,(\tau^2 y/x)$$

находим

$$\Delta x = O(t^{-1}) \text{ при } t\to\infty \qquad (3.12)$$

Итак, в случае c-решения неустойчивость свободной границы локализуется вблизи концов большой оси. Размер зон неустойчивости оценивается соотношением (3.12). Этот вывод, в частности, применим к задаче об устойчивости движения (1.1) с непроницаемой стенкой $\eta = 0$. При $t\to\infty$ жидкость прижимается к стенке, и это стабилизирует свободную границу вне указанных зон неустойчивости. Подобный эффект стабилизации был обнаружен в [1,3] при исследовании более простой задачи об устойчивости жидкого бруса под штампом.

Рассматривая s-решение, заключаем, что на расстоянии $\Delta x = O(t^{1-2\delta})$, $0 \leqslant \delta \leqslant 2$ от концов большой оси эллипса величина растет по закону $R_s \sim t^\delta$. В этом случае область неустойчивости свободной границы на плоскости xy неограниченно растет со временем. (Заметим, однако, что область максимальной неустойчивости, где $R_s \sim t^2$, уменьшается пропорционально t^{-3}). Этот результат тем более интересен, что для s-решений выше было доказано их стремление к нулю при $t \to \infty$ в потенциальной метрике.

4. **Доказательство предложения 2.** Справедливость (3.4), (3.5) при любом фиксированном n по существу вытекает из (3.1). Чтобы доказать равномерность этих оценок относительно n, следует изучить поведение решений задач Коши (2.13), (2.14) при $n \to \infty$.

Рассмотрим первое из уравнений (2.14). Коэффициент при a_n в этом уравнении есть сумма двух слагаемых. Из них при $n \to \infty$ и $\tau \ll \sqrt{n}$ главным будет первое слагаемое, а при $\tau \gg \sqrt{n}$ — второе.

Поэтому сначала рассматривается решение задачи Коши для a_n на интервале $[1, \alpha\sqrt{n}]$; затем решение продолжается на интервал $[\alpha\sqrt{n}, \infty)$. Выбором постоянной $\alpha > 0$ распорядимся ниже.

При рассмотрении решения для больших n и $1 \leqslant \tau \leqslant \alpha\sqrt{n}$ используются рассуждения, которые применяются для изучения асимптотики собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (см., например, [5]). Обозначим

$$Q = 2(\tau^4 + 1)^{-1} \operatorname{th} ns(\tau) \tag{4.1}$$

и введем новые переменные при помощи подстановки

$$\sigma = \int_1^\tau [Q(\zeta)]^{1/2} d\zeta, \qquad \omega = [Q(\tau)]^{1/4} a_n \tag{4.2}$$

Эта подстановка преобразует интервал $1 \leqslant \tau \leqslant \alpha\sqrt{n}$ в интервал $0 \leqslant \sigma \leqslant l_n$, а уравнение (2.14) для a_n — в уравнение

$$d^2\omega / d\sigma^2 + n\omega = \rho(\sigma)\,\omega \tag{4.3}$$

$$\rho(\sigma) = \frac{Q''}{4Q^2} - \frac{5Q'^2}{16Q^3} - \frac{r}{Q} \tag{4.4}$$

Правая часть (4.4) рассматривается как функция σ. Функция $\rho(\sigma)$ непрерывна на интервале $[0, l_n]$ и вследствие (4.1), (4.2) допускает оценку $|\rho| \leqslant C_4\tau^2$ при любом натуральном n. Здесь $\tau(\sigma)$ — функция, определенная первым из равенств (4.1). На основании (4.1), (4.2) имеем

$$\tau(l_n) = \alpha\sqrt{n}, \qquad \tau^{-2} d\sigma / d\tau \geqslant 1 \quad \text{для } 0 \leqslant \sigma \leqslant l_n$$

Поэтому

$$\tau \leqslant \alpha\sqrt{n}\,[1 + \alpha\sqrt{n}\,(l_n - \sigma)]^{-1}$$

Это приводит к явной оценке $|\rho|$ в зависимости от σ

$$|\rho| \leqslant C_4\alpha^2 n\,[1 + \alpha\sqrt{n}\,(l_n - \sigma)]^{-2} \tag{4.5}$$

Обратимся к уравнению (4.3). Условия (2.14) порождают начальные условия для этого уравнения

$$\omega(0) = 1, \qquad \omega'(0) = 0$$

Решение (4.3) с этими начальными условиями удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра [5]

$$\omega(\sigma) = \cos n^{1/2}\sigma + n^{-1/2} \int_0^\sigma \sin n^{1/2}(\sigma - \zeta)\,\rho(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta \tag{4.6}$$

Применяя метод последовательных приближений, получаем решение уравнения (4.6) в виде $\omega = \lim \omega_k$, $k \to \infty$, где $\omega_0 = \cos n^{1/2}\sigma$, а при $k \geqslant 1$ функция ω_k определяется равенством (4.6), в правой части которого ω заменено на ω_{k-1}. Используя (4.5), находим следующую оценку ядра уравнения (4.6):

$$\left| n^{-1/2} \int_0^\sigma \rho(\zeta) \sin n^{1/2}(\sigma - \zeta)\,d\zeta \right| < 2C_4\alpha$$

Выберем α меньшим, чем $1/2\,C_4$, и зафиксируем его. Тогда последовательные приближения будут равномерно сходиться к решению $\omega(\sigma)$ уравнения (4.6) для всех $\sigma \in$

$\in[0, l_n]$ и достаточно больших n, причем функция ω равномерно ограничена при $0 \leqslant \sigma \leqslant l_n$, $n \to \infty$.

В сочетании с (4.2) это приводит к оценке $|a_n| \leqslant c_5\tau$ для $1 \leqslant \tau \leqslant \alpha \sqrt{n}$. Оценка для a_n' получается путем дифференцирования (4.2) и уравнения (4.6). Она имеет вид

$$|a_n'| \leqslant C_5 n^{1/2}\tau^{-1}$$

Рассмотрим теперь первое уравнение (2.14) на интервале $[\alpha, \sqrt{n}, \infty)$. Сделаем в этом уравнении замену переменных $a_n = \sqrt{n}\, A_n$, $\tau = \sqrt{n}\,\zeta$ и выделим в коэффициенте полученного уравнения для A_n главный член. Будем иметь

$$\frac{d^2A_n}{d\zeta^2} + \left[-\frac{2}{\zeta^2} + \frac{2}{\zeta^4}\operatorname{th}\frac{1}{\zeta^2} + O(n^{-2}\zeta^{-6})\right]A_n = 0 \quad \text{при } \zeta \geqslant \alpha, \quad n \to \infty \tag{4.7}$$

Для этого уравнения поставим задачу Коши

$$A_n = n^{-1/2} a_n(\alpha n^{1/2}), \qquad dA_n / d\zeta = a_n'(\alpha n^{1/2}) \quad \text{при } \zeta = \alpha$$

Из полученных ранее оценок a_n, a_n' для $1 \leqslant \tau \leqslant \alpha\sqrt{n}$ заключаем, что $A_n(\alpha)$, $dA_n(\alpha) / d\zeta$ равномерно ограничены по n при $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что решение задачи Коши для (4.7) оценивается так:

$$|A_n| \leqslant C_6\zeta^2, \quad |dA_n / d\zeta| \leqslant C_6\zeta \quad \text{при } \zeta \geqslant \alpha$$

Переходя здесь к переменным a_n, τ, получаем

$$|a_n| \leqslant C_6\tau^2 / \sqrt{n}, \quad |a_n'| \leqslant C_6\tau / \sqrt{n} \quad \text{при } \tau \geqslant \alpha\sqrt{n}$$

Неравенства (3.4), (3.5) для a_n доказаны.

Поведение решений второго из уравнений (2.14) с начальными условиями (2.13) при больших n исследуется аналогично. Отличие состоит лишь в том, что на последнем этапе для $B_n = n^{-1/2} b_n$ вместо (4.7) получается уравнение

$$\frac{d^2B_n}{d\zeta^2} + \left[-\frac{2}{\zeta^2} + \frac{2}{\zeta^4}\operatorname{cth}\frac{1}{\zeta^2} + O(n^{-2}\zeta^{-6})\right]B_n = 0$$

и для него задача Коши с ограниченными при $n \to \infty$ значениями $B_n(\alpha)$, $dB_n(\alpha) / d\zeta$. Для B_n справедливы неравенства

$$|B_n| \leqslant C_7\zeta, \quad |dB_n / d\zeta| \leqslant C_7 \quad \text{при } \zeta \geqslant \alpha$$

Вследствие этого получим оценки

$$|b_n| \leqslant C_7\tau, \quad |b_n'| \leqslant C_7 \quad \text{при } \tau \geqslant \alpha\sqrt{n}$$

Это завершает доказательство предложения 2.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и Р. М. Гарипова за обсуждение работы.

Поступила 9 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. Сб. «Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей». Новосибирск, «Наука», 1967.
2. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце. ПМТФ, 1964, № 2.
3. Ovsyannikov L. V. On the disturbances of an unsteady motion of liquid with free boundary. Fluid Dynamics Trans., vol. 4. Warszawa, Panstwowe wydawn. naukowe, 1969.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 5. М., Физматгиз, 1959.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.