

Заметим, что при расчете поля w вертикальных скоростей отдельные моды всегда непрерывны, так как интегралы по разрезам входят при замыкании контура вверх ($\xi < 0$) и вниз ($\xi > 0$) с одинаковыми знаками (точки ветвления появляются парами, а подинтегральная функция нечетная по μ), и вышеприведенным критерием пользоваться нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B., Munk W. H. Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid // Phys. Fluids.— 1970.— V. 13, N 6.
2. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source // Geoph. Fluid Dyn.— 1971.— V. 2, N 1.
3. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане.— Севастополь, 1983.
4. Веденьков В. Е., Санников В. Ф. Некоторые особенности поля внутренних волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1987.— № 2.
5. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО.— 1984.— Т. 20, № 6.

г. Москва

Поступила 21/IX 1987 г.,
в окончательном варианте —
16/II 1988 г.

УДК 536.253

Г. С. Голицын, Ю. А. Гостинцев, А. Ф. Солодовник

ТУРБУЛЕНТНАЯ ПЛАВУЧАЯ СТРУЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ

Надежность прогнозов экологических последствий ряда природных и антропогенных катастроф (извержения вулканов, большие пожары, аварии АЭС, ядерные взрывы) в значительной степени зависит от точности предсказания первоначальной пространственной картины загрязнения атмосферы над индивидуальными источниками тепла и примеси [1]. Под первоначальным загрязнением подразумеваются максимальная высота выброса примеси и распределение ее концентрации в пространстве в моменты времени, близкие к окончанию осредненных вертикальных свободноконвективных перемещений облака или струи нагретых продуктов.

В зависимости от соотношения между временем действия $t_{\text{и}}$ источника тепла (примеси) и характерным временем тепловой релаксации атмосферы $t_N \sim 2\pi N^{-1}$ (N — частота Вейселя — Брента) можно выделить две предельные пространственные конфигурации свободно-конвективных движений [2]. Если $t_{\text{и}} \ll t_N$ (в пределе при мгновенном выделении энергии), то в атмосфере быстро формируется оторвавшееся от земли всплывающее облако — термик. При обратном соотношении времен (в пределе при постоянно действующем источнике) над очагом образуется конвективная колонка восходящего струйного движения продуктов. Для стандартного состояния атмосферы ($N = 0,0106 \text{ с}^{-1}$ в тропосферном слое) $t_N \approx 10$ мин. За это время облако или струя достигнут своей максимальной точки подъема и начнут деформироваться в основном в горизонтальном направлении. При этом термик будет совершать затухающие колебательные вертикальные движения около уровня теплового равновесия, а конвективная колонка (например, от очага пожара) — образовывать медленно расширяющуюся на высоте зависания конфигурацию струйного квазистационарного течения.

Перенос примеси в атмосфере мощными термиками исследован довольно подробно как аналитическими [2—5], так и численными [6, 7] методами, и предсказания теории в основном хорошо согласуются с экспериментальными данными. Ниже излагаются результаты изучения второго предельного случая свободноконвективных движений — двумерной осесимметричной турбулентной плавучей струи.

Основные уравнения. Система уравнений для осредненных параметров стационарной турбулентной свободноконвективной осесимметричной

струи в стратифицированной атмосфере в приближении пограничного слоя имеет вид [2, 4, 8]

$$(1) \quad \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sigma \Psi x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u \omega + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v \omega = \frac{\text{Pr}^{-1}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sigma \Psi x}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - u N^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v \vartheta = \frac{\text{Pr}^{-1}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sigma \Psi x}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{u N^2}{g \beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u \varepsilon_j + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v \varepsilon_j = \frac{\text{Sc}_j^{-1}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sigma \Psi x}{r} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial r} - u \frac{d \varepsilon_{ja}}{dx}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v = 0,$$

$$\omega = g \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} \approx g \left[\beta \vartheta + \frac{\mu_a}{\mu_b} \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \left(\frac{\mu_b}{\mu_j} - 1 \right) \right], \quad \frac{\mu_a}{\mu_b} =$$

$$= \left[1 + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\mu_b}{\mu_j} - 1 \right) \varepsilon_{ja} \right]^{-1}.$$

Здесь x , r и $u = r^{-1} \dot{\Psi}_r$, $v = -r^{-1} \dot{\Psi}_x$ — вертикальная, радиальная координаты и соответствующие составляющие осредненной скорости; $\dot{\Psi}$ — функция тока; $\vartheta = T - T_a$ и $\varepsilon_j = c_j - c_{ja}$ — избыточные значения температуры и массовой концентрации j -го компонента примеси (с молекулярным весом μ_j) в струе по отношению к их значениям в атмосфере; $\beta \approx 1/T_a$ — термический коэффициент расширения; ω — ускорение силы плавучести; Pr и Sc_j — турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта.

Поднимающаяся струя в общем случае состоит из $1 + p = 1 + k + m = 1 + l + n + m$ компонентов, где индекс 1 отвечает сухому воздуху, l — компонентам примеси, содержащейся как в источнике, так и в атмосфере, m — компонентам только источника, а n — примеси только в исходной атмосфере. Окружающая среда образована компонентами $1 + k = 1 + l + n$.

При выводе (1) использована гипотеза Буссинеска

$$\langle v', u' \rangle = -E \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \langle v' \vartheta' \rangle = -\text{Pr}^{-1} E \frac{\partial \vartheta}{\partial r},$$

$$\langle v' \varepsilon_j' \rangle = -\text{Sc}_j^{-1} E \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial r}, \quad \langle v' \omega' \rangle = -\text{Pr}^{-1} E \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

где для турбулентной кинематической вязкости E принята оправдавшая себя ранее [4, 8] полуэмпирическая гипотеза замыкания

$$E = \frac{\sigma \Psi x}{r^2} = \frac{\sigma x}{r^2} \int u r dr$$

(σ — безразмерный коэффициент турбулентности, определяемый экспериментально).

Второе уравнение в (1) для ускорения силы плавучести получено после умножения третьего уравнения на $(g\beta)$, каждого из j четвертых уравнений на $g\varepsilon_j(\mu_a/\mu_j - 1)$ и их суммирования при условии $\text{Sc}_j = \text{Sc} = \text{Pr}$.

Величина квадрата частоты Вейселя — Брента

$$(2) \quad N^2 = -g \left(\frac{d \ln \rho_a}{dx} + \frac{g}{c_s^2} \right) = \frac{g}{T_a} \left(\frac{dT_a}{dx} + \frac{g}{c_p} \right) \approx g \beta \left(\frac{dT_a}{dx} + \frac{g}{c_p} \right)$$

характеризует стратификацию окружающей среды. В (2) значение $g/c_p \approx 0,0098$ град/м характеризует адиабатический, а dT_a/dx — фактический градиент температуры. При $N^2 > 0$ атмосфера стратифицирована устойчиво (в модели Международной стандартной атмосферы (МСА) для тропосферы до высоты ≈ 11 км принято $dT_a/dx = -0,0065$ град/м = const, $\beta = 1/288$ град $^{-1}$ и $N = 1,06 \cdot 10^{-2}$ с $^{-1}$; в стратосфере $N \approx 0,022$ с $^{-1}$ = const до высоты ~ 40 км).

Из (1) видно, что динамическая задача о свободноконвективной струе в стратифицированной атмосфере в принятых допущениях может

решаться автономно на основании только уравнений неразрывности, движения и плавучести без детализации распределения температуры и концентраций.

Автомоделная плавучая струя. Для безразлично стратифицированной атмосферы ($N = 0$) или для относительно небольших высот подъема, когда последним членом в уравнениях энергии и плавучести можно пренебречь, имеет место автомоделный режим движения, определяемый только сохраняющимися интегралами системы (1):

$$(3) \quad \int_0^{\infty} u \omega r dr = \int_0^{\infty} u g \frac{\Lambda_0}{\bar{\rho}_a} r dr = \Pi_0, \quad \int_0^{\infty} u \vartheta r dr = Q_0.$$

Поток j -го компонента газа в струе при неизменности молекулярного состава атмосферы ($d\varepsilon_{ka}/dx = 0$) также сохраняется

$$(4) \quad \int_0^{\infty} u \varepsilon_j r dr = P_{j0}.$$

Автомоделное решение (1), (3), (4) с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial r} = v = \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad u = \omega = \vartheta = \varepsilon_j \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

ищется среди функций

$$(5) \quad \begin{aligned} \Psi &= (\Pi_0 \sigma^2)^{1/3} x^{5/3} \varphi(\eta), \quad u = (\Pi_0 / \sigma)^{1/3} x^{-1/3} \varphi_3(\eta), \\ v &= (\Pi_0 \sqrt{\sigma})^{1/3} x^{-1/3} \varphi_1(\eta), \quad \omega = (\Pi_0 / \sigma)^{2/3} x^{-5/3} f(\eta), \\ \vartheta &= Q_0 (\Pi_0 \sigma^2)^{-1/3} x^{-5/3} f(\eta), \quad \varepsilon_j = P_{j0} (\Pi_0 \sigma^2)^{-1/3} x^{-5/3} f(\eta), \\ E &= (\Pi_0 \sigma^2)^{1/3} x^{2/3} \varphi(\eta) / \eta^2, \quad \eta = r / (x \sqrt{\sigma}), \quad \varphi_1 = \varphi' - 5/3 \varphi / \eta, \\ &\quad \varphi_3 = \varphi' / \eta. \end{aligned}$$

При $Sc_j = Sc = Pr$ имеется подобие автомоделных профилей избыточной концентрации, температуры и ускорения силы плавучести (дефицита плотности в струе).

Для двух случаев ($Pr = Sc_j = 0,6$ и $2,0$) есть аналитические решения автомоделной системы уравнений [8]: при $Pr = Sc = 0,6$

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt[3]{3} (1 - \exp(-\eta^2/2)), \quad \varphi_1 = \sqrt[3]{3} \left[\eta \exp(-\eta^2/2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{3\eta} (1 - \exp(-\eta^2/2)) \right], \\ \varphi_3 &= \sqrt[3]{3} \exp(-\eta^2/2), \quad f = 2/\sqrt[3]{3} \exp(-\eta^2/2); \end{aligned}$$

при $Pr = Sc = 2$

$$\begin{aligned} \varphi &= 3 \sqrt[3]{0,03} \left(1 - \exp\left(-\frac{5}{6} \eta^2\right) \right), \quad \varphi_3 = \\ &= 5 \sqrt[3]{0,03} \exp\left(-\frac{5}{6} \eta^2\right), \quad f = \frac{1}{\sqrt[3]{0,03}} \exp\left(-\frac{5}{6} \eta^2\right). \end{aligned}$$

В области значений $Pr = Sc$ от 0,2 до 2 результаты, полученные численным решением, можно аппроксимировать функциями

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi &= A/m_0 \exp(-m_0 \eta^2), \quad f = C \exp(-(5/6)Pr \eta^2), \\ A &= 0,7443 Pr^{0,0618}, \quad C = 1,9821 Pr^{0,6993}, \quad m_0 = 1,4752 \times \\ &\quad \times Pr^{0,7611} - (5/6)Pr. \end{aligned}$$

При $Pr = Sc = 2$ эффективный динамический пограничный слой в свободновосходящей турбулентной струе толще теплового и концентрационного, при $Pr = Sc = 0,6$ имеет место полное подобие профилей, а при $Pr = Sc < 0,6$ профиль вертикальной скорости уже такового для тепла и концентрации.

Зависимости (6) позволяют определить значение Pr и коэффициента турбулентности σ по экспериментально найденным профилям осредненной температуры и вертикальной скорости в осесимметричной плавучей струе. Так, в [9] для автомодельного участка свободноконвективной струи на основании обработки опытных данных предложены полуэмпирические выражения

$$(7) \quad u \approx 4,7(2\pi\Pi_0/x)^{1/3} \exp(-96r^2/x^2), \quad g\beta\vartheta \approx 11x^{-5/3}(2\pi\Pi_0)^{2/3} \times \\ \times \exp(-71 r^2/x^2).$$

Сравнивая (7) с (5) и (6), найдем значения параметров $Pr = 0,46$ и $\sigma \approx 6,6 \cdot 10^{-3}$, согласующих теорию с профилями (7).

Следует отметить, что в [3] высказывалось сомнение о правильности представления экспериментов [9] зависимостями (7), которые предлагалось заменить на

$$(8) \quad u = k_1(2\pi\Pi_0/x)^{1/3} \exp(-80r^2/x^2), \\ g\beta\vartheta = k_2x^{-5/3}(2\pi\Pi_0)^{2/3} \exp(-80 r^2/x^2).$$

Профилям (8) соответствуют значения $Pr = 0,6$, $\sigma = 6,25 \cdot 10^{-3}$. В [10] для автомодельного участка плавучей струи даются аппроксимирующие эксперимент выражения

$$(9) \quad \frac{u_m}{u_0} = 3,5 Fr^{-1/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^{1/3} \left(\frac{x}{D_0}\right)^{-1/3}, \quad \frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a} = 8,22 Fr^{1/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^{-1/3} \left(\frac{x}{D_0}\right)^{-5/3},$$

где $Fr = \rho_0 u_0^2 / [g D_0 (\rho_a - \rho_0)]$ — число Фруда; u_m , T_m — скорость и температура на оси струи; индексом 0 отмечены значения начальных параметров струи на выходе из источника с диаметром D_0 . Сравнение (8), (9) с теоретическими результатами настоящей работы показывает, что с точностью $\pm 12\%$ обе серии экспериментальных данных удается согласовать при $Pr = 0,61$, $\sigma = 0,0088$ зависимостями

$$(10) \quad \frac{u_m}{u_0} = 3,6 Fr^{-1/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^{1/3} \left(\frac{x}{D_0}\right)^{-1/3}, \quad \frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a} = 8,7 Fr^{1/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^{-1/3} \left(\frac{x}{D_0}\right)^{-5/3}, \\ u = 3,9(2\pi\Pi_0/x)^{1/3} \exp(-70r^2/x^2), \quad g\beta\vartheta = 10,2 x^{-5/3} \times \\ \times (2\pi\Pi_0)^{2/3} \exp(-70r^2/x^2).$$

Вблизи от источника плавучие струи обладают начальным динамическим импульсом, а распределения скоростей и избыточной температуры на этом участке описываются закономерностями вынужденно-конвективных течений [11]

$$\frac{u_m}{u_0} \approx 6,6 \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{D_0}\right)^{-1}, \quad \frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a} \approx 5,1 \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^{-1/2} \left(\frac{x}{D_0}\right)^{-1}.$$

Сравнивая эти выражения с (10), можно записать условие реализации автомодельных распределений, присущих плавучей струе:

$$(11) \quad x/D_0 \geq 2,0 Fr^{1/2}(\rho_0/\rho_a)^{1/4}.]$$

Плавучая струя в устойчивой атмосфере. Для стратифицированной атмосферы интегралы (10) в потоках плавучести и тепла по высоте струи не сохраняются и автомодельный режим во всей области распространения невозможен. При устойчивой стратификации вертикальное движение тормозится, струя быстро расширяется и вблизи уровня нулевой плавучести подъем газа практически прекращается. Неустойчивая стратификация атмосферы способствует ускорению течения [4].

Формально наличие стратифицированной окружающей среды связано с появлением в исходной системе уравнений для динамической задачи дополнительного определяющего параметра N с размерностью $1/c$ (интеграл потока плавучести Π_0 с размерностью m^4/c^3 в этом случае имеет смысл начального условия).

Так как из указанных размерных параметров нельзя составить ни одного безразмерного комплекса, то введем характерные размерности

$$(12) \quad X_* = [\Pi_0/(\sigma N^3)]^{1/4}, \quad R_* = X_* \sqrt{\sigma}, \quad \Psi_* = X_*^3 \sigma N, \\ U_* = X_* N, \quad V_* = X_* N \sqrt{\sigma}, \quad \Omega_* = X_* N^2.$$

Будем искать решение (1) для динамической задачи в виде

$$(13) \quad \Psi = \Psi_* \Phi(\eta, \zeta), \quad \omega = \Omega_* F(\eta, \zeta), \quad \eta = r/R_*, \quad \zeta = x/X_*.$$

Подставляя (13) в (1), получим

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\Phi}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \zeta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \eta \zeta^5 F = 0, \\ \text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\Phi}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \zeta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} F \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} F \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$$

с граничными условиями по η

$$\Phi = (\Phi'/\eta)' = F' = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad \Phi'/\eta = F \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty.$$

Знак минус во втором уравнении из (13) отвечает устойчивой, а плюс — неустойчивой стратификации атмосферы. Величина N в (12) для второго варианта взята по модулю.

Анализ (14) показывает, что при малых ζ с точностью до членов порядка $\sim O(\zeta^{8/3})$ существует автомодельное решение, которое в принятых переменных имеет вид

$$\Phi_0 = M_0(1 - \exp(-m_0 \eta^2)) \zeta^{5/3}, \quad F_0 = N_0 \exp(-k_0 \eta^2) \zeta^{-5/3}.$$

Значения числовых коэффициентов M_0 , m_0 , N_0 и k_0 известным образом зависят от Pr (см. предыдущий раздел).

Приближенное решение (14) для устойчивой стратификации атмосферы искалось с помощью метода интегральных соотношений в виде двойных рядов

$$(15) \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} M_n [1 - \exp(-m_n \eta^2)] \zeta^{(8n+5)/3}, \quad m_n = \frac{m_0}{1+n}, \\ F = \sum_{n=0}^{\infty} N_n \exp(-k_n \eta^2) \zeta^{(8n-5)/3}, \quad k_n = \frac{k_0}{1+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющих граничным условиям по η .

Интегрирование (14) по η от 0 до ∞ с учетом граничных условий дает интегральные уравнения

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^{-2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 d\eta = \zeta^2 \int_0^{\infty} F \eta d\eta, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^{\infty} F \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\eta = -\Phi(\infty).$$

Подстановка (15) в (16) позволяет при известных для выбранного Pr значениях M_0 , m_0 , N_0 , k_0 и заданных m_n и k_n после группирования членов с одинаковыми степенями при ζ найти неизвестные коэффициенты M_n и N_n . Четыре первых их значения приведены в табл. 1.

В безразмерных переменных (13) профили вертикальной и радиальной скоростей запишем как

$$(17) \quad \Phi_3 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n m_n \exp(-m_n \eta^2) \zeta^{(8n-1)/3}, \\ \Phi_1 = -\frac{1}{\eta \zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{8n+5}{3} \right) M_n (1 - \exp(-m_n \eta^2)) \zeta^{(8n+2)/3} - \right. \\ \left. - 2M_n m_n \eta^2 \exp(-m_n \eta^2) \zeta^{(8n-1)/3} \right].$$

Зависимости для относительных величин осевой скорости и плотности в

Т а б л и ц а 1

Pr=0,35	Pr=0,6	Pr=1
$M_0 = 1,788;$ $m_0 = 0,3924$	1,44225; 0,5	1,204; 0,61
$M_1 = -0,3698;$ $m_1 = 0,1962$	-0,23401; 0,25	-0,1578; 0,305
$M_2 = -0,0410;$ $m_2 = 0,1308$	-0,02004; 0,1667	-0,0134; 0,1525
$M_3 = -0,0094;$ $m_3 = 0,0981$	-0,00349; 0,125	-0,0018; 0,1017
$N_0 = 0,9745;$ $k_0 = 0,2913$	1,38672; 0,5	1,965; 0,8333
$N_1 = -0,4023;$ $k_1 = 0,1456$	-0,45000; 0,25	-0,5151; 0,4167
$N_2 = -0,0025;$ $k_2 = 0,0971$	-0,00169; 0,1667	-0,0008; 0,2083
$N_3 = -0,0007;$ $k_3 = 0,0728$	-0,00032; 0,125	-0,00016; 0,1389
$\zeta_m = 1,89;$ $\zeta_m/\zeta_B = 1,24$	2,074; 1,24	2,284; 1,28
$\zeta_B = 1,52;$ $\zeta_H/\zeta_B = 0,74$	1,671; 0,74	1,78; 0,74
$\zeta_H = 1,13;$ $\zeta_1/\zeta_B = 0,91$	1,242; 0,91	1,32; 0,92
$\zeta_1 = 1,38;$ $\zeta_2/\zeta_B = 0,84$	1,515; 0,84	1,646; 0,83
$\zeta_2 = 1,28;$ $(\zeta_B - \zeta_H)/\zeta_2 = 0,3$	1,409; 0,3	1,485; 0,31

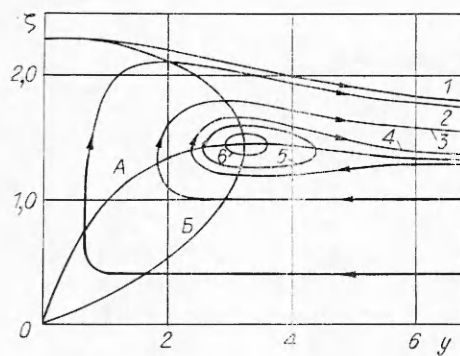
струе можно представить также в параметрической форме

$$(18) \quad \frac{u}{u_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n m_n \text{Fr}_1^{(2n-1)/3} \text{Sh}^{2n} \widehat{x}^{(sn-1)/3} \exp(-m_n \xi^2 / \widehat{x}^2),$$

$$\frac{\rho - \rho_a}{\rho_0 - \rho_a} = (8\sigma)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} N_n \text{Fr}_1^{(2n+1)/3} \text{Sh}^{2n} \widehat{x}^{(sn-5)/3} \exp(-k_n \xi^2 / \widehat{x}^2),$$

где $\text{Fr}_1 = \rho_a u_0^2 8\sigma / [g(\rho_a - \rho_0) D_0]$ и $\text{Sh} = ND_0 / u_0$ — модифицированные числа Фруда и Струхалия; $\widehat{x} = x/D_0$; $\xi = r/(D_0 \sqrt{\sigma})$; u_0 и ρ_0 — скорость и плотность в источнике.

На рис. 1 в координатах $\zeta, y = r/(X_* \sqrt{\sigma})$ приведено рассчитанное на основании (15), (17) для $\text{Pr} = 1$ поле течения турбулентной свободно-конвективной струи в устойчиво стратифицированной атмосфере. Линии 1—6



Р и с. 1

1—6 отвечают значениям безразмерной функции тока $\Phi = 0; 0,26; 1,04; 1,27; 1,32; 1,37$. На линиях A и B равны нулю соответственно радиальная и вертикальная составляющие скорости. Видно, что свободновосходящая струя достигает своей наибольшей точки подъема $\zeta_m \approx 2,284$ на оси. Здесь газ переохлажден и тяжелее окружающей среды (точка нулевой плавучести на оси находится в $\zeta_1 = 1,646$), поэтому он, растекаясь в горизонтальном направлении, опускается. В стационарных условиях при $\xi \rightarrow \infty$ в отсутствие вертикальной диффузии вся присоединенная к плавучей струе вблизи основания масса воздуха радиально удаляется от оси внутри горизонтального слоя между $\zeta_B \approx 1,78$ (асимптотическая координата линии $\Psi = 0$ при $\xi \rightarrow \infty$) и $\zeta_H \approx 1,32$ (асимптотическая координата линии $v = 0$ при $\xi \rightarrow \infty$). Уровень $\zeta_2 = 1,485$ — нулевое значение интеграла потока плавучести $\int_0^{\infty} u \omega r dr = 0$. Вблизи пересечения кривых A

($v = 0$) и B ($u = 0$) имеет место замкнутая область вихревого движения.

Рассчитанные значения координат ζ_i характерных точек зависшей струи приведены в табл. 1. Несмотря на различие в абсолютных величинах, относительное их местонахождение практически не зависит от Pr . Для $Pr = 0,6$ при найденном из экспериментов на автомоделном участке среднем значении $\sigma = 0,0088$ следуют зависимости

$$(19) \quad x_m \approx 6,77 \Gamma^{1/4}, \quad x_n \approx 5,45 \Gamma^{1/4}, \quad x_2 \approx 4,6 \Gamma^{1/4}, \\ x_n \approx 4,05 \Gamma^{1/4}, \quad \Gamma = \Pi_0/N^3.$$

Формула для x_m из (19) хорошо описывает данные небольших модельных экспериментов [10] по максимальной высоте подъема свободноконвективных струй в устойчиво стратифицированной среде.

Оценим условия, ограничивающие применимость (15), (19). Поскольку эти выражения получены в предположении о реализации автомоделного режима течения в плавучей струе при малых высотах, то в соответствии с (11) они справедливы при выполнении неравенства

$$(20) \quad \left(\frac{\Pi_0}{\sigma N^3 D_0^4} \right)^{1/4} \gg 2,0 Fr^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right)^{1/4}, \quad \text{или} \quad u_0 N < 0,1g \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{для } Pr = 0,6).$$

Условие (20) не является критичным для сильно нагретых конвективных струй продуктов от пожаров или вулканов (в МСА даже для звуковой начальной скорости истечения $u_0 = 300$ м/с неравенство (20) выполняется при $T_0 - T_{a*} \approx 1000$ К). Если (20) не выполнено, движение в струе будет сохранять вынужденно-конвективный характер вплоть до зависания, а максимальная точка ее подъема в устойчиво стратифицированной атмосфере — определяться величиной начального динамического импульса [11]

$$x_m \approx 6 (I_0/N^2)^{1/4}, \quad I_0 = \int_0^\infty ur^2 dr = 1/8 u_0^2 D_0^2.$$

Помимо (20) существует ограничение на возможность использования уравнений вертикального пограничного слоя, которое для $Pr = 0,6$ можно записать в приближенном виде

$$\frac{x_n}{D_0} = 4,05 \left(\frac{\Pi_0}{\sigma N^3 D_0^4} \right)^{1/4} > 1, \quad D_0 < 4 (\Pi_0/N^3)^{1/4}.$$

Используя связь интеграла потока плавучести Π_0 и тепловой мощности источника $\dot{Q}_0 = 2\pi(p_a T_a)_* c_p \Pi_0/g = 2\pi\gamma p_* \Pi_0/[g(\gamma - 1)]$ при известных $\gamma = 1,4$, $p_* = 1,013 \cdot 10^5$ Па и $N = 0,0106$ с⁻¹, запишем вышеприведенное неравенство в форме

$$(21) \quad D_0 < D_* = 0,18 \left(Q_0 \frac{p_* N^3}{p_n N^3} \right)^{1/4},$$

где D_0 в км, Q_0 в МВт, p_* и p_n — стандартное давление в Па на уровне моря и фактическое давление на уровне источника.

Нарушение условия (21) означает необходимость учета второго уравнения движения (по координате r) в исходной системе. В предельном случае ($D_0 \rightarrow \infty$) источник можно рассматривать как непрерывно распределенный по площади. Характер автомоделного течения над ним будет определяться плотностью потока плавучести $\dot{\Pi} \sim \Pi_0/D_0^2$, а высота зависания нагретых продуктов — комплексом $(\dot{\Pi}/N^3)^{1/2}$ [4].

Выброс примеси в стратифицированную атмосферу. На небольших удалениях от источника постоянной мощности при выполнении (11) сохраняется поток вещества (4) и реализуется автомоделный закон (5) распределения примеси, который при $Pr = Sc_j = 0,6$ в переменных (13), где в

качестве характерной концентрации следует положить $\varepsilon_{j*} = P_{j0}/(X_*^3 \sigma N)$, имеет вид

$$(22) \quad K_j = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{j*}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \exp(-\eta^2/2) \zeta^{-5/3}.$$

При переходе к переменным (18) выражение (22) принимает форму

$$\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{ja}}{\varepsilon_{j0} - \varepsilon_{ja}} = \frac{Fr_1^{1/3}}{4\sqrt[3]{3}\sigma} \widehat{x}^{-5/3} \exp(-\xi^2/(2\zeta^2)).$$

На высотах, сравнимых с \bar{X}_* , условие сохранения вертикального потока вещества нарушается и должно быть заменено интегральным условием баланса примеси в атмосфере

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varepsilon_j r dr dx = P_{j0} t, \quad P_{j0} = \int_0^\infty u \varepsilon_j r dr,$$

которое в переменных K_j , $y = r/(X_* \sqrt{\sigma})$, $\zeta = x/X_*$, $\tau = tN$ запишем как

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K_j y dy d\zeta = \tau.$$

Таким образом, вблизи от постоянно действующего источника в плавающей струе реализуется стационарный автомодельный закон (22) распределения примеси, а на высотах, сравнимых с X_* , характер переноса существенно нестационарный и в принятых безразмерных переменных описывается уравнением

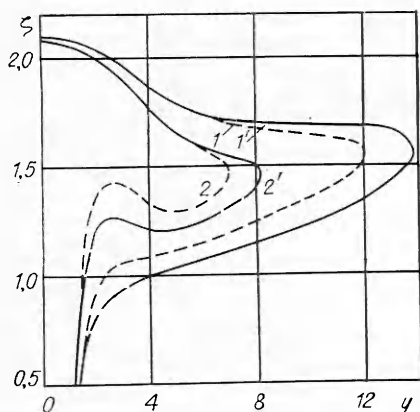
$$(23) \quad \frac{\partial K_j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{K_j}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_j \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \\ = Sc_j^{-1} \left[\alpha \frac{\partial^2 K_j}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \left(\beta + \frac{\zeta \Phi}{y^2} \right) \frac{\partial K_j}{\partial y} \right) \right].$$

Здесь $\alpha = E_1/(NX_*^2)$, $\beta = E_2/(NX_*^2 \sigma)$ — безразмерные коэффициенты квазиламинарного переноса в вертикальном и горизонтальном направлении (принято, что по радиальной координате кинематическая вязкость равна сумме $E_r = E_2 + \sigma \Psi x/r^2$, а по вертикальной — $E_x = E_1$, E_2 и E_1 — константы).

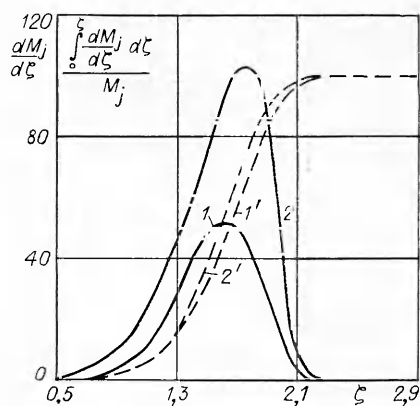
Для $Pr = Sc_j = 0,6$ уравнение (23) решалось численно с помощью модифицированной схемы с разностями против потока при заданной из (15) функции Φ и $\beta = 0,001$, $\alpha = 0,01$. В качестве начального условия при $\tau = 0$ задавалось $K_j = 0$, а граничные условия имели вид $\partial K_j / \partial y = 0$ при $y = 20$, $y = 0$ и $\partial K_j / \partial y = 0$ при $\zeta = 3$. На нижней полуплоскости при $\zeta = 0,5$ для K_j задавалось автомодельное распределение (22).

Физически такая постановка задачи соответствует диффузии примеси в заданном стационарном поле скоростей от постоянно действующего источника. Ясно, что для рассматриваемой проблемы такая задача носит приближенный характер, так как источник диффузии включается после установления поля скоростей и фактически не учитывается вынос примеси за времена $\tau < \tau_* \approx 2\pi$. С увеличением времени счета ($\tau \gg \tau_*$) вносимая при этом ошибка уменьшается.

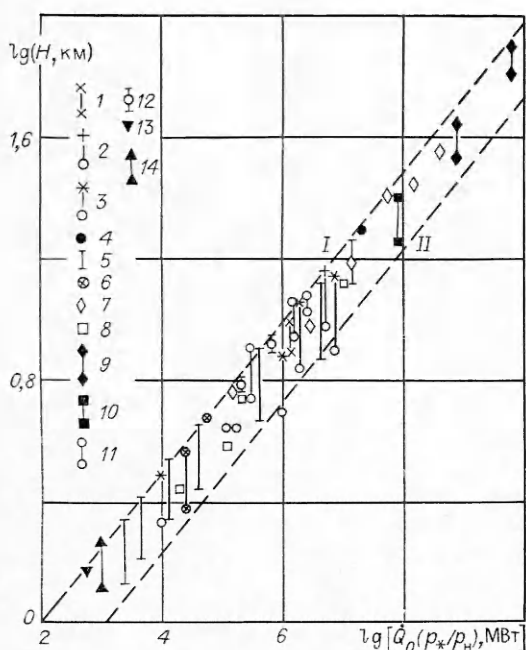
Результаты расчета проиллюстрированы на рис. 2 и 3. На рис. 2 в координатах ζ , y представлена деформация изолиний концентрации во времени. Кривые 1 и 1' отвечают $K_j = 0,275$ для $\tau = 38,18$ и $76,36$ (1 и 2 ч реального времени), кривые 2 и 2' — $K_j = 0,55$ для тех же моментов времени. На рис. 3 даны зависимости безразмерной линейной плотности распределения примеси $dM_j/d\zeta \left(M_j = X_* N_0 \int_0^\infty K_j y dy / P_{j0} \right)$ от высоты ζ для 1 и 2 ч реального времени (линии 1 и 2). Соответствующие распределения от-



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

носительной полной массы вынесенного вещества в процентах при тех же временах представлены на рис. 3 линиями 1' и 2'. Видно, что через 2 ч в области до нижней кромки $\zeta_{\text{н}} = 1,24$ зависшей колонки продуктов содержится $\sim 15\%$ выносимой примеси, между верхней $\zeta_{\text{в}} = 1,67$ и нижней кромкой находится $\sim 50\%$ вещества, а между максимальной точкой подъема $\zeta_{\text{м}} \approx 2,1$ струи и нижней кромкой — около 80% примеси.

Таким образом, преобладающая доля выносимой в стратифицированную атмосферу свободноконвективной струей примеси при временах порядка нескольких часов находится в горизонтальном слое между уровнями $\zeta_{\text{м}}$ и $\zeta_{\text{н}}$.

Мощная плавучая струя в реальной атмосфере. Сравнение

с экспериментом. При достаточной тепловой мощности турбулентной плавучей струи состояние пограничного слоя атмосферы (~ 1 км) слабо влияет на максимальную высоту подъема продуктов. В этом случае можно в пределах тропосферы приближенно считать $N = 0,0106 \text{ с}^{-1} = \text{const}$ и использовать формулы (19) для сравнения с известными экспериментальными и расчетными данными по параметрам зависшей конвективной колонки продуктов над очагами горения и вулканами, действующими в режиме непрерывного извержения.

Полезно привести следующие из (19) размерные соотношения, связывающие в МСА вертикальные координаты характерных точек зависшей струи с тепловой мощностью источника:

$$(24) \quad x_{\text{м}} \approx 0,29 \left(\dot{Q}_0 \frac{p_* N_0^2}{p_{\text{н}} N^2} \right)^{1/4}, \quad x_{\text{в}} \approx 0,24 \left(\dot{Q}_0 \frac{p_* N_0^2}{p_{\text{н}} N^2} \right)^{1/4}, \quad x_{\text{н}} \approx 0,17 \left(\dot{Q}_0 \frac{p_* N_0^2}{p_{\text{н}} N^2} \right)^{1/4}$$

(x в км, N_0 и N — коэффициенты Вайсяля—Брента в стандартной и реальной атмосфере).

На рис. 4 в логарифмических координатах представлены результаты экспериментов и теории. Прямые I и II — максимальная $x_{\text{м}}$ и минималь-

Таблица 2

Обозначения рис. 4	Источник	Явление	Мощность, МВт (размер очага, высота колонки)	Примечание
1	[12]	Модель пожара в Гамбурге, 1943 г.	$1,4 \cdot 10^6$ ($x_m = 8-10$ км)	Осредненная модель конвективной струи
2	[13]	Модель городского пожара	$4,0 \cdot 10^6$ ($R_0 = 4$ км, $x_m \approx 15$ км)	Трехмерный счет. Частично неустойчивая стратификация, $p_*/p_H \approx 1,2$. Учет ветра и конденсации паров воды. Верхняя точка — кромка струи, нижняя — положение максимума dM_j/dx
3	[14]	Модели пожаров: Лонг Бич, 1958 г. Гамбург, 1943 г. Модельный город	$1,0 \cdot 10^4$ ($R_0 = 0,5$ км, $x_m = 3,2$ км) $1,7 \cdot 10^6$ ($R_0 = 2$ км, $x_m = 12$ км) $1,1 \cdot 10^6$ ($R_0 = 5$ км, $x_m = 8$ км)	Двумерный счет. Без ветра и конденсации Трехмерный счет с ветром и конденсацией. Нижняя точка — максимум dM_j/dx
4	[15]	Модельный очаг	$2,0 \cdot 10^7$ ($R_0 = 5$ км, $x_m \approx 21$ км)	Трехмерный счет в МСА без ветра и конденсации
5	[16]	Плавучая струя	$2,6 \cdot 10^8 - 1,4 \cdot 10^7$ ($R_0 = 0,09 - 2,8$ км)	Осредненная модель. Численный счет. Верхняя точка — $N = 0,0097$ с ⁻¹ , нижняя — $N = 0,018$ с ⁻¹
6	[17]	Полевой эксперимент	$5,0 \cdot 10^4$ (квадрат 20 га, $x_m = 5$ км) $3,0 \cdot 10^4$ (12 га, $x_m = 3,8 - 2,8$ км)	Верхняя точка — слабо-неустойчивая стратификация, нижняя — устойчивая
7	[18]	Вулканы:		Δx_m — высота подъема струи над вершиной кратера, H — уровень вершины [25]
		Сьерро Negro, 5.02.1972 г.	$1,1 \cdot 10^5$ ($\Delta x_m = 6$ км)	$H = 4470$ м, $p_*/p_H = 1,74$
		Агунг, 16.05.1963 г.	$2,0 \cdot 10^6$ ($\Delta x_m = 10$ км)	$H = 3150$ м, $p_*/p_H = 1,47$
		Фуэго, 14.09. 1971 г.		$H = 3740$ м, $p_*/p_H = 1,59$
		Гекла, 05.05. 1970 г.	$1,2 \cdot 10^7$ ($\Delta x_m = 16$ км)	
		Гекла, 29.03. 1947 г.	$5,7 \cdot 10^7$ ($\Delta x_m = 27$ км)	$H = 1500$ м, $p_*/p_H = 1,2$
		Безымянный, 03.03. 1956 г.	$2,8 \cdot 10^8$ ($\Delta x_m = 36$ км)	$H = 2800$ м, $p_*/p_H = 1,41$
		Санта Мария, 24.10.1902 г.	$1,1 \cdot 10^8$ ($\Delta x_m = 28$ км)	$H = 2500$ м, $p_*/p_H = 1,35$
8	[19]	Гекла, 05.05.1970 г.	$8,5 \cdot 10^6$ ($\Delta x_m = 13,5$ км)	
9	[20]	Безымянный, 30.03.1956 г. Кракатау, 27.08.1883 г.	$5,9 \cdot 10^8$ ($\Delta x_m = 35-44$ км) $5,6 \cdot 10^9$ ($\Delta x_m = 70-80$ км)	$H = 813$ м, $p_*/p_H = 1,11$

Обозначения рис. 4	Источник	Явление	Мощность, МВт (размер очага, высота колонки)	Примечание	
10	[23]	Сент-Хеленс, 18.05.1980 г.	$6,0 \cdot 10^7$ ($\Delta x_m = 18-25$ км)	$H = 2975$ м, $p_*/p_H = 1,43$. Оценка мощности по энергии акустико-гравитационных волн	
8	[19]	Пожары: Лонг Бич, 1958 г.	$2,0 \cdot 10^4$ ($x_m = 2,9$ км)	Для разных моментов времени	
11	[21]	Дарвин Ривер, 1971 г. Air Force Bomb. Range Tillamook County, 1933 Mack Lake Fire, 1980 Sierra Nat. Forest, 1961 Гамбург, 1943 г.	$\left\{ \begin{array}{l} 2,1 \cdot 10^5 (x_m = 5,8 \text{ км}) \\ 1,1 \cdot 10^5 (x_m = 4 \text{ км}) \end{array} \right\}$ $1,2 \cdot 10^5 (x_m = 4,6 \text{ км})$ $2,2 \cdot 10^6 (x_m = 11-12 \text{ км})$ $1,6 \cdot 10^5 (x_m = 4,6 \text{ км})$ $2,2 \cdot 10^5 (x_m = 6-9 \text{ км})$ $1,7 \cdot 10^6 (x_m = 9-12 \text{ км})$		
12	[22]	Sundance Fire, 1967	$\left\{ \begin{array}{l} 5,0 \cdot 10^5 (x_m = 9,2 \text{ км}) \\ 1,5 \cdot 10^5 (x_m = 6 \text{ км}) \end{array} \right\}$		$H = 1500$ м, $p_*/p_H = 1,2$. Естественный пожар в горах. Разные моменты времени
13	—	Пожар Чернобыльской АЭС	550 ($x_m = 1,5$ км)		
14	[24]	Полевой эксперимент	10^3 ($x_m = 1,3-2$ км)	Верхняя точка — слабоустойчивая стратификация, нижняя — устойчивая	

ная x_H высоты зависшего облака, посчитанные по (24). Условные обозначения, ссылки на источник используемых на рис. 4 данных и характеристики исследуемых очагов выделения энергии приведены в табл. 2. Видно, что результаты изложенной двумерной аналитической модели удовлетворительно совпадают (по характерным параметрам подъема конвективной струи) как с предсказанием более общих трехмерных моделей, реализованных численно, так и с экспериментом. При нарушении условия (21) (как это имело, например, место для части данных [14]) нагретые продукты поднимаются на меньшую, чем это следует из (24), высоту.

Согласно (24), при выполнении (21) постоянно действующий во времени источник тепла с мощностью \dot{Q}_0 , большей $2 \cdot 10^6$ МВт, обеспечивает выход верхней кромки свободноконвективной струи за пределы тропосферы (~ 11 км) в нормально стратифицированной атмосфере.

Представленные результаты могут использоваться как для анализа пространственно-временной картины загрязнения атмосферы мощными свободноконвективными длительно действующими источниками, так и для оценки мощности энерговыделения в очаге по замеренным высотам подъема продуктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Будыко М. И., Голицын Г. С., Израэль Ю. А. Глобальные климатические катастрофы. — М.: Гидрометеоздат, 1966.
2. Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф. и др. Турбулентный термик в стратифицированной атмосфере // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1986. — № 6.
3. Morton B. R., Taylor G. I., Turner J. S. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources // Proc. Roy. Soc. — 1956. — V. 234 A, N 1196.

