УДК 539.376.001

ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ КРАЕВЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СО СТАРЕНИЕМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. Ю. Ермоленко

Самарский государственный аэрокосмический университет, 443086 Самара

Формулируется принцип соответствия краевых задач нелинейной неоднородной анизотропной теории вязкоупругости краевым задачам теории упругости. Соответствие устанавливается при помощи интегральных преобразований с заранее неизвестными ядрами. Определен класс вязкоупругих материалов, для которых интегральными преобразованиями возможно сведение к краевым задачам фиктивной упругости.

Рассматривается нелинейная статическая краевая задача неоднородной анизотропной вязкоупругости со старением [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\},$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n) \prod_{m=1}^{n} \varepsilon_{i_m j_m}(\tau_m)\, d\tau_m, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j = P_i(x,t), \quad x \in S_\sigma, \quad u_i(x,t) = u_i^0(x,t), \quad x \in S_u.$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$ — компоненты тензоров деформаций и напряжений; $R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_n)$ — ядра релаксации; $(ij) = i_1j_1i_2j_2\dots i_nj_n$; $u_i(x,t)$ — компоненты вектора перемещений; $P_i(x,t)$ — компоненты вектора напряжений на части поверхности тела S_σ с единичной нормалью n (n_i — ее компоненты); $u_i^0(x,t)$ — компоненты вектора перемещений на части поверхности S_u.

Введем линейные интегральные преобразования с ядром $\varphi_l(p,t)$:

$$f(t) = \int_{\Omega_p} f^*(p)\varphi_l(p,t)\, dp. \tag{2}$$

Здесь функции $f(t)$ и $f^*(p)$ — интегральные образ и прообраз соответственно. Пусть для интегральных преобразований (2) известны обратные интегральные преобразования

$$f^*(p) = \int_{\Omega_t} f(t)\varphi_l^+(p,t)\, dt \tag{3}$$

($\varphi_l^+(p,t)$ — резольвентные ядра).

Таким образом, формулы (2) и (3) позволяют для каждого прообраза $f^*(p)$ выбрать сколько угодно возможных интегральных образов $f(t)$ за счет выбора конкретного ядра $\varphi_l(p,t)$, а для каждого образа $f(t)$ найти сколько угодно интегральных прообразов. Здесь индекс l в обозначении ядер прямого и обратного интегральных преобразований позволяет отличить одно интегральное преобразование от другого. Используя формулы (2) и (3), можно получить

$$f(t) = \int\limits_{\Omega_p} \left[\int\limits_{\Omega_{t'}} f(t')\varphi_l^+(p,t')\,dt' \right] \varphi_l(p,t)\,dp. \tag{4}$$

Меняя порядок интегрирования в (4), имеем

$$f(t) = \int\limits_{\Omega_{t'}} f(t') \left[\int\limits_{\Omega_p} \varphi_l^+(p,t')\varphi_l(p,t)\,dp \right] dt'. \tag{5}$$

В последней формуле $\int\limits_{\Omega_p} \varphi_l^+(p,t')\varphi_l(p,t)\,dp = G(t',t)$ представляет собой в силу (5) ядро единичного интегрального преобразования

$$f(t) = \int\limits_{\Omega_{t'}} G(t',t)f(t')\,dt'.$$

Далее полагаем, что все интегральные преобразования взаимно однозначны и непрерывны, а также, что возможно изменение порядка интегрирования и вычисление многократных интегралов в произвольном порядке.

Все сказанное позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Краевая задача* (1) *в прообразах интегральных преобразований* (2) *имеет вид*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*(x,p)}{\partial x_j} + X_i^*(x,p) = 0, \quad \varepsilon_{ij}^*(x,p) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial u_i^*(x,p)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*(x,p)}{\partial x_i} \right\},$$

$$\sigma_{ij}^*(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{\Omega_{p_1}} \ldots \int\limits_{\Omega_{p_n}}}_{n} R_{(ij)}^*(x,p,p_1,\ldots,p_n) \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon_{i_\xi j_\xi}^*(x,p_\xi)\,dp_\xi,$$

$$\sigma_{ij}^*(x,p)n_j(x) = P_i^*(x,p), \quad x \in S_\sigma, \qquad u_i^*(x,p) = u_i^0(x,p), \quad x \in S_u.$$

Доказательство. Пусть компоненты вектора перемещений $u_i(x,t)$ представляют собой интегральные образы прообразов $u_i^*(x,p)$:

$$u_i(x,t) = \int\limits_{\Omega_p} u_i^*(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp. \tag{6}$$

Тогда соотношения Коши позволяют получить

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{\Omega_p} u_i^*(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp + \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{\Omega_p} u_j^*(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp \right\}. \tag{7}$$

В формуле (7) дифференцирование и интегрирование выполняется по разным параметрам. Поэтому, меняя порядок выполнения этих операций, имеем

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \int\limits_{\Omega_p} \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i^*(x,p)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*(x,p)}{\partial x_i} \right] \right\} \varphi_l(p,t)\,dp. \tag{8}$$

Пусть в соотношениях (1) $\varepsilon_{ij}(x,t)$ представляет собой интегральный образ величины $\varepsilon_{ij}^*(x,p)$:

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \int\limits_{\Omega_p} \varepsilon_{ij}^*(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp. \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9) получим

$$\varepsilon^*_{ij}(x,p) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u^*_i(x,p)}{\partial x_j} + \frac{\partial u^*_j(x,p)}{\partial x_i}\right\}. \tag{10}$$

Считая ядра релаксации $R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_n)$ также интегральными образами величин $R^*_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_{n-1},p_1)$, имеем

$$R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_n) = \int\limits_{\Omega_{p_1}} R^*_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_{n-1},p_1)\varphi^+_l(p_1,\tau_n)\,dp_1. \tag{11}$$

В формуле (11) функция $R^*_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_{n-1},p_1)$, в свою очередь, может считаться интегральным образом функции $R^{**}_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_{n-2},p_2,p_1)$:

$$R^*_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_{n-1},p_1) = \int\limits_{\Omega_{p_2}} R^{**}_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_{n-2},p_2,p_1)\varphi^+_l(p_2,\tau_{n-1})\,dp_2.$$

Таким образом, учитывая сказанное, представим функцию $R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_n)$ в виде

$$R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\dots,\tau_n) = \underbrace{\int\limits_{\Omega_p}\dots\int\limits_{\Omega_{pn}}}_{n+1} R^{(*)}_{(ij)}(x,p,p_1,\dots,p_n)\varphi_{l_1}(p,t)\prod_{m=1}^{n}\varphi^+_l(p_m,\tau_m)\,dp_m\,dp. \tag{12}$$

Формула (12) позволяет преобразовать определяющее соотношение задачи (1) следующим образом:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int\limits_0^t\dots\int\limits_0^t}_{n}\left\{\underbrace{\int\limits_{\Omega_p}\dots\int\limits_{\Omega_{pn}}}_{n+1} R^{(*)}_{(ij)}(x,p,p_1,\dots,p_n)\varphi_{l_1}(p,t)\prod_{m=1}^{n}\varphi^+_l(p_m,\tau_m)\,dp_m\,dp\right\}\times$$
$$\times\prod_{\xi=1}^{n}\varepsilon_{i_\xi j_\xi}(\tau_\xi)\,d\tau_\xi.$$

Учитывая (12) и то, что интегральные преобразования с ядрами $\varphi_l(p,t)$ и $\varphi^+_l(p,t)$ взаимно обратны, получаем

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega_p}\left\{\underbrace{\int\limits_{\Omega_{p_1}}\dots\int\limits_{\Omega_{pn}}}_{n} R^{(*)}_{(ij)}(x,p,p_1,\dots,p_n)\prod_{\xi=1}^{n}\varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p_\xi)\,dp_\xi\right\}\varphi_l(p,t)\,dp. \tag{13}$$

Пусть $\sigma_{ij}(x,t)$ также есть интегральный образ прообраза $\sigma^*_{ij}(x,p)$:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int\limits_{\Omega_p}\sigma^*_{ij}(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp. \tag{14}$$

Тогда из (13) и (14) следует

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int\limits_{\Omega_{p_1}}\dots\int\limits_{\Omega_{pn}}}_{n} R^{(*)}_{(ij)}(x,p,p_1,\dots,p_n)\prod_{\xi=1}^{n}\varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p_\xi)\,dp_\xi.$$

Полагая, что $X_j(x,t)$, $P_i(x,t)$, $u^0_i(x,t)$ также являются интегральными образами величин $X^*_j(x,p)$, $P^*_i(x,p)$, $u^{*0}_i(x,p)$:

$$X_j(x,t) = \int\limits_{\Omega_p} X^*_j(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp, \quad P_i(x,t) = \int\limits_{\Omega_p} P^*_i(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp,$$

$$u_i^0(x,t)=\int\limits_{\Omega_p} u_i^{*0}(x,p)\varphi_l(p,t)\,dp,$$

получаем

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^*(x,p)}{\partial x_j}+X_i^*(x,p)=0,$$

$$\sigma_{ij}^*(x,p)n_j(x)=P_i^*(x,p),\quad x\in S_\sigma,\quad u_i^*(x,p)=u_i^{*0}(x,p),\quad x\in S_u.$$

Следовательно, краевая задача вязкоупругости (1) превращается в краевую задачу для образов:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^*(x,p)}{\partial x_j}+X_i^*(x,p)=0,\quad \varepsilon_{ij}^*(x,p)=\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial u_i^*(x,p)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*(x,p)}{\partial x_i}\Big\},$$

$$\sigma_{ij}^*(x,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int\limits_{\Omega_{p_1}}\ldots\int\limits_{\Omega_{pn}}}_{n} R_{(ij)}^{(*)}(x,p,p_1,\ldots,p_n)\prod_{\xi=1}^{n}\varepsilon_{i_\xi j_\xi}^*(x,p_\xi)\,dp_\xi,\tag{15}$$

$$\sigma_{ij}^*(x,p)n_j(x)=P_i^*(x,p),\quad x\in S_\sigma,\quad u_i^*(x,p)=u_i^{*0}(x,p),\quad x\in S_u.$$

Очевидно, что краевая задача (15) не обладает параметром времени, т. е. является упругой для образов. Таким образом, нам удалось, используя интегральные преобразования, свести рассматриваемый класс задач нелинейной анизотропной неоднородной теории вязкоупругости к соответствующему классу задач упругости.

Выбор пары $\varphi_l(p,t)$ и $\varphi_l^+(p,t)$ прямого и обратного интегральных преобразований в каждом конкретном случае определяется теми условиями, которым должны подчиняться искомые решения исходной задачи вязкоупругости: $\sigma_{ij}(x,t)$, $u_i(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$, а также классом описываемых вязкоупругих материалов, т. е. ядер релаксации $R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\ldots,\tau_n)$. Например, если вязкоупругое тело занимает конечный объем, $\sigma_{ij}(x,t)$, $u_i(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$ и $R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\ldots,\tau_n)$ предполагаются непрерывными по всем своим аргументам и рассматривается задача на конечном отрезке времени, то в качестве прямого и обратного интегральных преобразований можно взять преобразования Фурье. В случае же когда рассматривается поведение вязкоупругого материала на полубесконечной прямой ($t\in[0,+\infty)$), необходимо пользоваться прямым и обратным преобразованиями Лапласа.

При переходе от краевой задачи вязкоупругости (1) к соответствующей задаче упругости (15) может сложиться ситуация, что определяющее соотношение (15) существенно упрощается. Это может произойти, например, в случае, когда $R_{(ij)}^{(*)}(x,p,p_1,\ldots,p_n)$ удовлетворяет соотношению

$$R_{(ij)}^{(*)}(x,p,p_1,\ldots,p_n)=R_{(ij)}^{(*)}(x,p)\prod_{\nu=1}^{n}G(p,p_\nu).\tag{16}$$

Здесь $R_{(ij)}^{(*)}(x,p)$ — компоненты некоторых тензоров, функций параметров x и p, а $G(p,p_\nu)$ — ядра единичных интегральных преобразований. В этом случае интегральные преобразования с ядрами $\varphi_l(p,t)$ и $\varphi_l^+(p,t)$ будем называть оптимальными. При этом оказывается справедливой

Теорема 2. *Оптимальные преобразования сводят краевую задачу вязкоупругости (1) к краевой задаче нелинейной упругости для прообразов*

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^*(x,p)}{\partial x_j}+X_i^*(x,p)=0,\quad \varepsilon_{ij}^*(x,p)=\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial u_i^*(x,p)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*(x,p)}{\partial x_i}\Big\},$$

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(*)}_{(ij)}(x,p) \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p), \tag{17}$$

$$\sigma^*_{ij}(x,p)n_j(x) = P^*_i(x,p), \quad x \in S_\sigma, \quad u^*_i(x,p) = u^{*0}_i(x,p), \quad x \in S_u.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить справедливость определяющего соотношения краевой задачи (17). Действительно, подставляя (16) в (15), получаем

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{\Omega_{p_1}} \ldots \int\limits_{\Omega_{p_n}}}_{n} R^{(*)}_{(ij)}(x,p) \prod_{\nu=1}^{n} G(p,p_\nu) \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p_\xi)\, dp_\xi. \tag{18}$$

Производя интегрирование в (18), имеем

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(*)}_{(ij)}(x,p) \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p).$$

Установим класс вязкоупругих материалов (ядер релаксации), для которых имеет место соотношение (16), т. е. возможность сведения к задаче нелинейной упругости (17).

Теорема 3. *Для того чтобы интегральными преобразованиями с ядрами $\varphi_l(p,t)$ и $\varphi^+_l(p,t)$ краевая задача* (1) *сводилась к краевой задаче* (17), *необходимо и достаточно, чтобы ядра релаксации представлялись в виде*

$$R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\ldots,\tau_n) = \int\limits_{\Omega_p} R^{(*)}_{(ij)}(x,p)\varphi_{l_1}(p,t) \prod_{\nu=1}^{n} \varphi^+_l(p,\tau_\nu)\, dp. \tag{19}$$

Необходимость. Пусть краевая задача (1) сводится интегральными преобразованиями к задаче (17). Поскольку дифференцирование по координатам и интегрирование по времени перестановочно, то достаточно доказать это только для определяющих соотношений

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(*)}_{(ij)}(x,p) \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p). \tag{20}$$

Учитывая, что $\varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p) = \int\limits_{\Omega_{\tau_\xi}} \varepsilon_{i_\xi j_\xi}(x,\tau_\xi)\varphi^+_l(p,\tau_\xi)\, d\tau_\xi$, из (20) получаем

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{\Omega_{\tau_\xi}} \ldots \int\limits_{\Omega_{\tau_\xi}}}_{n} \left\{ R^{(*)}_{(ij)}(x,p) \prod_{\nu=1}^{n} \varphi^+_l(p,\tau_\nu) \right\} \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon_{i_\xi j_\xi}(x,\tau_\xi)\, d\tau_\xi. \tag{21}$$

Умножая (21) на $\varphi_{l_1}(p,t)$ и интегрируя по p, получаем

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int\limits_{\Omega_p} \sigma^*_{ij}(x,p)\varphi_{l_1}(p,t)\, dp = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int\limits_{\Omega_{\tau_\xi}} \ldots \int\limits_{\Omega_{\tau_\xi}}}_{n} \left[\int\limits_{\Omega_p} R^{(*)}_{(ij)}(x,p)\varphi_{l_1}(p,t) \prod_{\nu=1}^{n} \varphi^+_l(p,\tau_\nu)\, dp \right] \times$$
$$\times \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon_{i_\xi j_\xi}(x,\tau_\xi)\, d\tau_\xi.$$

Содержимое скобок есть ядро интегрального оператора определяющих соотношений

$$R_{(ij)}(x,t,\tau_1,\ldots,\tau_n) = \int\limits_{\Omega_p} R^{(*)}_{(ij)}(x,p)\varphi_l(p,t) \prod_{\xi=1}^{n} \varphi^+_l(p,\tau_\xi)\, dp.$$

Достаточность. Как и прежде, очевидно, достаточно доказать сводимость определяющего соотношения задачи (1) к определяющему соотношению задачи (17). Действительно, подставляя (19) в (1), получаем

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{\Omega_{\tau_\xi}} \dots \int_{\Omega_{\tau_\xi}}}_{n} \Big[R^{(*)}_{(ij)}(x,p)\varphi_{l_1}(p,t) \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_l^{+}(p,\tau_\nu)\,dp\Big] \prod_{\xi=1}^{n} \varepsilon_{i_\xi j_\xi}(x,\tau_\xi)\,d\tau_\xi.$$

Проводя интегрирование по всем τ_ξ и учитывая, что $\int\limits_{\Omega_{\tau_\xi}} \varepsilon_{i_\xi j_\xi}(x,\tau_\xi)\,\varphi_l^{+}(p,\tau_\xi)\,d\tau_\xi = \varepsilon^*_{i_\xi j_\xi}(x,p)$, приходим к равенству

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(*)}_{(ij)}(x,p) \prod_{\nu=1}^{n} \varepsilon^*_{i_\nu j_\nu}(x,p).$$

Существуют и другие [2–4] преобразования, сводящие практически общие соотношения вида (1) для кусочно-вырожденных ядер к задаче нелинейной упругости.

Проиллюстрируем предложенную методику на решении конкретной задачи — задачи о напряженно-деформированном состоянии бесконечной полосы из стареющего материала, сжимаемой двумя распределенными силами. Толщина полосы $2b$, силы на ее поверхности распределены по известным законам:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_i} = 0, \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_i}\Big\},$$

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = (1+\nu)\Big[(I-L)\,\frac{\sigma_{ij}(x,t)}{E_1}\Big] - \nu\delta_{ij}(I-L)\Big(\frac{\sigma_{mm}(x,t)}{E_1}\Big) + {}$$
$$+ \beta(I-L)\Big[\frac{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\delta_{ij}}{E_2} + \frac{2\sigma_{\alpha\alpha}(x,t)\sigma_{ij}(x,t)}{E_2}\Big], \qquad (22)$$

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x) = P_i(x,t) = \begin{cases} f_1(y), & x \in S_1, \\ f_2(y), & x \in S_2. \end{cases}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; E_1 — модуль Юнга; E_2 — модуль квадратично-нелинейной упругости; β — постоянная материала. Оператор $(I-L)$ выражается формулой

$$(I-L)\,\frac{\sigma_{ij}}{E_1} = \frac{\sigma_{ij}(x,t)}{E_1(t)} - \int_0^t \frac{\sigma_{ij}(x,\tau)}{E_2(\tau)}\,K'(t,t-\tau)\,d\tau. \qquad (23)$$

Для оператора $(I-L)$ существует обратный [5]. Запишем (23) в виде

$$(I-L)\,\frac{\sigma_{ij}}{E_1} = \int_0^\infty \Big\{G(t,\tau)\,\frac{\sigma_{ij}(x,\tau)}{E_1(\tau)} - \frac{\sigma_{ij}(x,\tau)}{E_1(\tau)}\,K'(t,t-\tau)\Big\}\,d\tau. \qquad (24)$$

Здесь $G(t,\tau)$ — ядро единичного интегрального преобразования, а ядро $K'(t,t-\tau)$ предполагается равным нулю для моментов τ больше t. Перепишем (24) иначе:

$$(I-L)\,\frac{\sigma_{ij}}{E_1} = \int_0^\infty \frac{\sigma_{ij}(x,\tau)}{E_1(\tau)}\Big[G(t,\tau) - K'(t,t-\tau)\Big]\,d\tau.$$

Обозначим $G(t,\tau) - K'(t,t-\tau) = \varphi_l(t,\tau)$.

Таким образом, согласно [5], для ядра $\varphi_l(t,\tau)$ известно обратное преобразование. Обозначим его $\varphi_l^{+}(t,\tau)$. Итак, для определяющего соотношения краевой задачи (22) имеем

$$\varepsilon_{ij}(x,t)=\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{(1+\nu)\sigma_{ij}}{E_1}-\nu\delta_{ij}\,\frac{\sigma_{mm}}{E_1}+\beta\,\frac{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\delta_{ij}}{E_2}+\frac{2\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{ij}}{E_2}\right]\{G(t,\tau)-K'(t,t-\tau)\}\,d\tau.$$

Используя соотношения (6), (9)–(11), для задачи [22] получаем

$$\frac{\partial\sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_j}=0,\qquad \varepsilon^*_{ij}(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u^*_i(x,t)}{\partial x_j}+\frac{\partial u^*_j(x,t)}{\partial x_i}\right\},$$

$$\varepsilon^*_{ij}(x,t)=\frac{1+\nu}{E_1(\tau)}\,\sigma_{ij}(x,t)-\nu\delta_{ij}\,\frac{\sigma_{mm}}{E_1}+\beta\,\frac{\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\delta_{ij}}{E_2}+\frac{2\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{ij}}{E_2},\tag{25}$$

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x)=P_i(x,t)=\begin{cases} f_1(y), & x\in S_1,\\ f_2(y), & x\in S_2.\end{cases}$$

Краевая задача (25) является нелинейной упругой задачей. Любопытно, что в этом случае преобразовались только деформации. Напряжения остались не преобразованными. Поэтому напряжения упругой задачи (25) дают напряжения вязкоупругой задачи. Пользуясь определяющими соотношениями, остается определить тензор деформаций и по нему восстановить вектор перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Илюшин А. А., Победря Б. Е.** Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
2. **Колокольчиков В. В.** Метод последовательных приближений для нелинейной вязкоупругости, основанный на нелинейном принципе соответствия и методе аппроксимаций // Механика полимеров. 1978. № 3. С. 417–424.
3. **Колокольчиков В. В.** О сходимости метода последовательных приближений с интегральными преобразованиями для задач нелинейной вязкоупругости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 2. С. 325–329.
4. **Колокольчиков В. В.** Смешанные сверточно-суперпозиционные ряды при решении интегральных уравнений нестабильной вязкоупругости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 4. С. 829–831.
5. **Арутюнян Н. Х.** Теория ползучести неоднородно стареющих сред. М., 1981 (Препр. / АН СССР. ИПМ).

Поступила в редакцию 10 /XII 1996 г.