

УДК 532.526

## ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Н. М. Терехова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках слабонелинейной теории устойчивости рассмотрено групповое взаимодействие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое. Возмущения представлены двумя пространственными пакетами бегущих волн неустойчивости (волновыми поездами) с кратными частотами. Изучена возможность перераспределения энергии в таких волновых системах при реализации трехволновых резонансных взаимодействий составляющих пакетов. Модель применена для тестирования динамики неустойчивых волн, возникающих при введении в сверхзвуковой пограничный слой контролируемых возмущений повышенной интенсивности. Установлено, что данный механизм не является основным для наблюдаемых закономерностей продольной динамики таких нелинейных волн.

**Ключевые слова:** сверхзвуковой пограничный слой, нелинейные возмущения, трехволновые резонансные взаимодействия.

**Введение.** В настоящее время активно изучаются механизмы процессов, сопутствующих ламинарно-турбулентному переходу в сверхзвуковых пограничных слоях. Это стало возможным после проведения экспериментальных исследований нелинейных стадий развития возмущений и построения на их основе теоретических моделей.

Важные результаты получены при исследовании нелинейной эволюции, процесса заполнения спектра и выделения несущих частот для конечных возмущений, которые уже не могут быть отнесены к линейным. Для сверхзвукового пограничного слоя установлено, что при невысоком уровне контролируемых возмущений [1, 2] реализуется субгармоническая неустойчивость, закономерности которой качественно и количественно описываются нелинейной моделью взаимодействия в резонансных триадах [3–6]. При этом в спектре возмущений преобладают трехмерные моды, а заполнение его представляет собой каскадный процесс выделения трехмерных субгармоник в параметрической области.

Однако при введении в сверхзвуковой пограничный слой на пластине при числе Маха  $M = 2$  контролируемых возмущений достаточно большой интенсивности [7] возникает ситуация, существенно отличная от описанной выше. Эволюция таких возмущений вниз по потоку названа авторами [7] “аномальной”. В экспериментах [7] установлено, что в начальном спектре возмущений фиксируются два волновых пакета с кратными частотами (частотой субгармоники  $f_1 = 10$  кГц и основной частотой  $f_2 = 20$  кГц), при этом доминирует пакет с частотой  $f_1$ . Волновые пакеты представляют собой волновые поезда [8] широкого спектра по трансверсальному волновому числу  $\beta$ , в которых присутствуют трехмерные волны, распространяющиеся под углами  $-90^\circ \leq \chi \leq 90^\circ$  к направлению основного потока ( $\chi = \arctg(\beta/\alpha^r)$ ;  $\alpha^r$  — продольное волновое число), причем наибольшую интенсивность имеет плоская составляющая с  $\beta = 0$ . Эти волновые поезда достаточно симметричны по  $\beta$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00828).

во всем исследуемом интервале. Вниз по потоку двумерный характер волновых спектров не меняется, хотя согласно линейной теории устойчивости инкременты трехмерных волн значительно превышают инкременты плоских волн. Наблюдается увеличение интенсивности как трехмерных, так и двумерных волн, особенно значительное для последних. Авторы [7] полагают, что описанные результаты эксперимента обусловлены нелинейностью продольной динамики пульсаций большой интенсивности.

В данной работе предпринята попытка выяснить, можно ли перечисленные выше особенности объяснить нелинейным взаимодействием собственных бегущих возмущений Толлмина — Шлихтинга в рамках взаимодействий в резонансных триадах на основе слабонелинейной теории устойчивости, которая применяется для объяснения динамики возмущений на ранних стадиях нелинейности.

**Основные формулы и методы решения.** Исходные положения нелинейной модели взаимодействия в резонансных триадах для сжимаемых пограничных слоев подробно изложены в [3, 4]. Следуя [3, 4], рассмотрим возмущенное поле скоростей  $u, v, w$ , плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$  и температуры  $T_0$  сжимаемого газа

$$\begin{aligned} u &= U(Y) + \varepsilon u', & v &= \varepsilon v', & w &= \varepsilon w', & \rho_0 &= \rho(Y) + \varepsilon \rho', \\ p_0 &= P + \varepsilon p', & T_0 &= T(Y) + \varepsilon \Theta', & p'/P &= \rho'/\rho + \Theta'/T \end{aligned} \quad (1)$$

в безразмерной системе координат (толщина  $\delta = \sqrt{\mu_e x / (U_e \rho_e)}$  — характерный линейный размер;  $\mu$  — динамическая вязкость; индекс  $e$  соответствует параметрам в свободном потоке; величины со штрихами и без штрихов — пульсационные и средние компоненты соответствующих величин; масштабный параметр  $\varepsilon \ll 1$ ). Обезразмеривание проведено параметрами потока на внешней границе, числа Рейнольдса и Маха, рассчитанные по этим параметрам:  $Re = \sqrt{x \rho_e U_e / \mu_e}$ ,  $M = U_e / a_e$  ( $a$  — скорость звука). Безразмерные значения продольной координаты  $X$  совпадают со значением  $Re$ . Метод получения распределений  $U, T$  в ламинарном течении описан в [9],  $\rho = 1/T$ .

Решение строится методом разложения по малому параметру  $\varepsilon$  и двухмасштабному разложению координаты  $x$ . Помимо “быстрого” масштаба  $X$  вводится “медленный” масштаб  $\xi = \varepsilon X$ , характеризующий различие скоростей изменения фазы и амплитуды возмущений. Возможность введения “медленного” масштаба обусловлена большим различием указанных скоростей.

Будем искать решения для волн вида

$$u' = A(\xi) u(Y) \exp(i\theta), \quad \theta = \int \alpha dX + \int \beta dZ - \omega t, \quad (2)$$

где  $u'$  — продольная компонента скорости;  $A$  — медленно меняющаяся по продольной координате амплитуда;  $u(Y)$  — собственная амплитудная функция;  $\alpha = \alpha^r + i\alpha^i$ ;  $\alpha^i < 0$  — инкремент; частота  $\omega = 2\pi f$  — вещественная величина.

Подставляя (1), (2) в полную систему уравнений движения и сохранения для сжимаемого газа [9], в рамках слабонелинейной теории получим исходную систему для возмущений

$$\begin{aligned} [\rho(Gu + U_Y v) + i\alpha p / (\gamma M^2) - (\mu / Re) u_{YY}] \exp(i\theta) &= F_u, \\ [\rho Gw + i\beta p / (\gamma M^2) - (\mu / Re) w_{YY}] \exp(i\theta) &= F_w, \\ [\rho Gv + p_Y / (\gamma M^2)] \exp(i\theta) = F_v, & [G\varrho + \rho_Y v + \rho(i\alpha u + v_Y + i\beta w)] \exp(i\theta) = F_p, \\ [\rho(G\Theta + T_Y v) + (\gamma - 1)(i\alpha u + v_Y + i\beta w) - \mu\gamma / (\sigma Re) \Theta_{YY}] \exp(i\theta) &= F_\Theta, \\ \varrho = \rho(p/P - \Theta/T), & G = i(-\omega + \alpha U). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\gamma = C_P/C_V$  — показатель адиабаты;  $\sigma = C_P\mu_e/K$  — число Прандтля;  $K$  — теплопроводность. При  $F = 0$  уравнения (3) есть линейризованная система для трехмерных возмущений [9].

Нелинейные члены в (3) имеют следующий вид:

$$F_u = \rho(u'u'_X + v'u'_Y + w'u'_Z) + \varrho'(u'_t + Uu'_X + U_Y v'),$$

$$F_v = \rho(u'v'_X + v'v'_Y + w'v'_Z) + \varrho'(v'_t + Uv'_X),$$

$$F_w = \rho(u'w'_X + v'w'_Y + w'w'_Z) + \varrho'(w'_t + Uw'_X),$$

$$F_p = \varrho'(u'_X + v'_Y + w'_Z) + u'\varrho'_X + v'\varrho'_Y + w'\varrho'_Z,$$

$$F_\Theta = \varrho'(\Theta'_t + U\Theta'_X + T_Y v') + \rho(u'\Theta'_X + v'\Theta'_Y + w'\Theta'_Z) + 2\gamma(\gamma - 1)M^2 p'(u'_X + v'_Y + w'_Z).$$

Нелинейные эффекты определяют квадратичные по амплитуде слагаемые в нелинейных членах.

Краевые условия для возмущений имеют вид

$$u = v = \Theta = 0, \quad Y = 0, \quad Y = \infty.$$

В первом порядке по  $\varepsilon$  однородная система (3) является основной для нахождения собственных значений  $\alpha$  при заданных значениях частоты  $\omega$  и числа Рейнольдса  $Re$ , а также для построения амплитудных функций линейных волн вида (2) при нормировке  $|v|_{kn} = 1$ , где  $v_{kn}$  — значение  $v$  в конечной координате интегрирования  $Y_{kn} = 15$  (толщина пограничного слоя соответствует  $Y = 7$ ). В слабонелинейной теории указанные параметры линейных волн считаются искомыми, нелинейность оказывает влияние только на амплитуду  $A$ .

Прежде всего проанализируем нелинейное развитие возмущений, удовлетворяющих условиям фазового синхронизма, для которых  $\theta_j = \theta_l + \theta_k$ . Как правило,  $j \neq l \neq k$ , но могут быть триплеты с  $l = k$ . Для таких трехволновых систем амплитудные уравнения можно получить, используя стандартную процедуру осреднения и условия разрешимости [4]:

$$\frac{dA_j}{d\xi} = -\alpha_j^i A_j + \sum_{l,k}^N S_{l,k} A_l A_k \exp(-i\Delta_{j,l,k}), \quad (4)$$

$$\frac{dA_l}{d\xi} = -\alpha_l^i A_l + \sum_{j,k}^N S_{j,k} A_j A_k^* \exp(i\Delta_{j,l,k}), \quad \frac{dA_k}{d\xi} = -\alpha_k^i A_k + \sum_{j,l}^N S_{j,l} A_j A_l^* \exp(i\Delta_{j,l,k}).$$

Коэффициенты  $S$ , выраженные через нелинейные члены  $F$  системы (3), характеризуют силовое поле, создаваемое взаимодействующими волнами. Члены с  $\Delta$  учитывают возможную расстройку волновой связи в триплетах по  $\alpha^r$ :  $\Delta_{j,l,k} = \text{Real} \left( \int (\alpha_j - \alpha_l - \alpha_k) dX \right)$ .

Запишем комплексные амплитуды  $A$  в тригонометрическом виде

$$A = a \exp(i\psi), \quad a = |A|, \quad \psi = \arg A$$

и будем решать уравнения (4) относительно  $a$  и  $\psi$ . Начальные условия для амплитуд задаются в соответствии с экспериментальными распределениями массовых скоростей волн (интенсивностей  $I$ ) в начальном сечении  $X_0$ . Связь между амплитудами колебаний  $a$  и интенсивностями  $I$  можно выразить через расчетные значения пульсаций массовой скорости волн  $m = \rho u + \varrho U$ :

$$I_j(X_0) = a_j(X_0) m_j(Y_{\max}) \exp(-\alpha_j^i X_0).$$

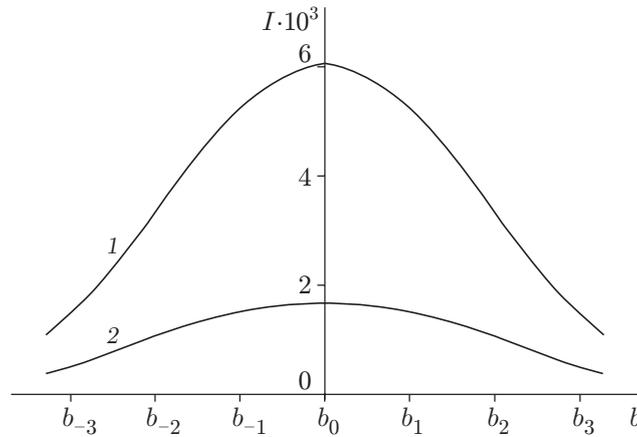


Рис. 1. Схема разбиения волновых поездов на дискретные компоненты рассматриваемых азимутальных волновых параметров  $b$  для безразмерных частотных параметров  $F_1$  (1) и  $F_2$  (2)

Значение  $Y = Y_{\max}$  соответствует поперечной координате, в которой величина  $m$  наиболее интенсивной двумерной волны с частотой субгармоники максимальна. При рассмотренных значениях  $Re$  эта координата оставалась постоянной:  $Y_{\max} = 4,35$ . Начальные фазы задавались произвольными, в основном варианте  $\psi_j(X_0) = 0$ .

**Результаты и обсуждение.** В экспериментах [7] измерения проводились в диапазоне  $x = 60 \div 110$  мм, что соответствовало значениям числа Рейнольдса  $624 \leq Re \leq 846$ . Температура торможения была постоянной и составляла 310 К,  $\gamma = 1,4$ ,  $\sigma = 0,72$ . Безразмерные частоты вводились через частотный параметр  $F$  ( $\omega = F Re$ ), так что  $F_1 = 19,2 \cdot 10^{-6}$ ,  $F_2 = 2F_1$ . Для тех же параметров проведены расчеты.

Рассматривалось групповое взаимодействие волновых поездов, полученных в [7]. При этом интегрирование в (2) заменялось суммированием, так что реальные волновые поезда по трансверсальным волновым числам  $\beta$  заменялись набором  $N$  дискретных волновых мод. В данной работе принято  $N = 7$ . Для каждой волновой моды безразмерные волновые числа  $b = 10^{-3}\beta/Re$  оставались постоянными. На рис. 1 показана схема разбиения волновых поездов ( $b = 0$  соответствовали наиболее энергонесущим двумерным составляющим).

На рис. 2 приведены инкременты  $-\alpha^i$  линейных волн с частотными параметрами субгармоники  $F_1$  и основной частоты  $F_2$  в рассмотренном интервале чисел Рейнольдса для исследованных значений  $b$ . Начальное положение двумерной составляющей субгармоники — область вблизи нижней ветви нейтральной кривой, ее линейный инкремент увеличивается с увеличением значений  $Re$ , не достигая максимума в конечном сечении измерений. Как правило, инкременты трехмерных составляющих значительно превышают инкременты этой моды. Наибольшие инкременты имеет трехмерная мода при  $b_1 = 0,077$ .

При начальном значении  $Re$  инкремент основной волны с параметром  $F_2$  (рис. 2, б) близок к максимуму линейного инкремента в области неустойчивости, вниз по течению его значения приближаются к верхней ветви нейтральной кривой. Так же как на рис. 2, а, инкременты трехмерных мод превышают инкременты плоской составляющей. Закономерность нарушается только для трехмерной моды с большим азимутальным параметром  $b_3 = 0,231$  — наклонных волн, составляющих с плоскостью потока угол  $\chi \approx 85^\circ$ ; интенсивность этих волн невысокая.

Для семи составляющих волновых поездов условия фазового синхронизма позволяют сформировать 20 триплетов (верхними индексами 1, 2 обозначены фазы мод с частотными

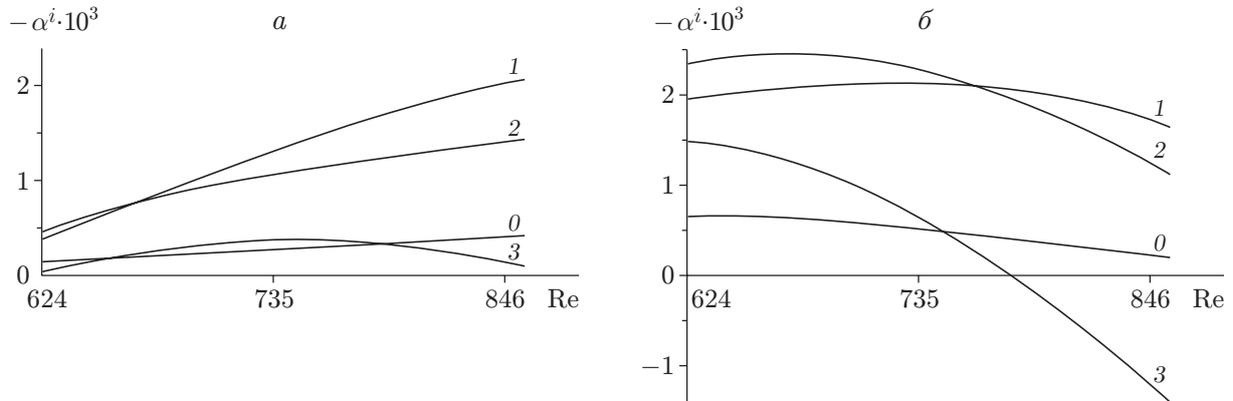


Рис. 2. Линейные инкременты  $-\alpha^i(\text{Re})$  рассматриваемых мод с частотными параметрами  $F_1$  (а) и  $F_2$  (б):

0 — двумерная составляющая ( $b_0 = 0$ ); 1–3 — трехмерные составляющие (1 —  $b_1 = 0,077$ ; 2 —  $b_2 = 0,154$ ; 3 —  $b_3 = 0,231$ )

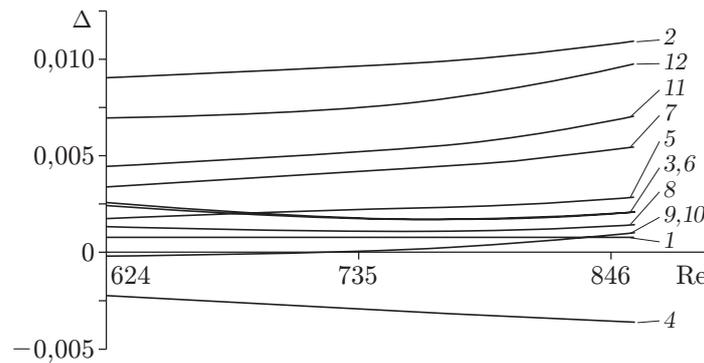


Рис. 3. Расстройка по волновым числам в триплетах (5)

параметрами  $F_1, F_2$ , нижние индексы соответствуют индексам параметра  $b$ ):

$$\begin{aligned}
 \theta_0^2 &= \theta_0^1 + \theta_0^1, & \theta_0^2 &= \theta_1^1 + \theta_{-1}^1, & \theta_0^2 &= \theta_2^1 + \theta_{-2}^1, & \theta_0^2 &= \theta_3^1 + \theta_{-3}^1, \\
 \theta_1^2 &= \theta_0^1 + \theta_1^1, & \theta_1^2 &= \theta_2^1 + \theta_{-1}^1, & \theta_1^2 &= \theta_3^1 + \theta_{-2}^1, \\
 \theta_2^2 &= \theta_0^1 + \theta_2^1, & \theta_2^2 &= \theta_3^1 + \theta_{-1}^1, & \theta_2^2 &= \theta_1^1 + \theta_1^1, \\
 \theta_3^2 &= \theta_0^1 + \theta_3^1, & \theta_3^2 &= \theta_2^1 + \theta_1^1, \\
 \theta_{-1}^2 &= \theta_0^1 + \theta_{-1}^1, & \theta_{-1}^2 &= \theta_1^1 + \theta_{-2}^1, & \theta_{-1}^2 &= \theta_2^1 + \theta_{-3}^1, \\
 \theta_{-2}^2 &= \theta_0^1 + \theta_{-2}^1, & \theta_{-2}^2 &= \theta_1^1 + \theta_{-3}^1, & \theta_{-2}^2 &= \theta_{-1}^1 + \theta_{-1}^1, \\
 \theta_{-3}^2 &= \theta_0^1 + \theta_{-3}^1, & \theta_{-3}^2 &= \theta_{-2}^1 + \theta_{-1}^1.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

С учетом симметрии волновых поездов можно ограничиться рассмотрением триплетов только для положительных значений  $b$ , при этом их число уменьшается до 12.

На рис. 3 показаны волновые расстройки  $\Delta(\text{Re})$  для характерных триплетов. По сравнению со значениями  $\alpha^r$  эти расстройки невелики, и поэтому данные триплеты могут оказать влияние на значения соответствующих амплитуд, определяемых по (4).

В рамках рассматриваемой модели проанализируем полученные нелинейные интенсивности  $I$  волновых мод с параметром  $F_1$  (рис. 4, а). Штриховые линии соответствуют расчету по линейной модели:  $I_{lin}(X) = a(X_0)m(Y_{max}) \exp(-\alpha^i X)$ .

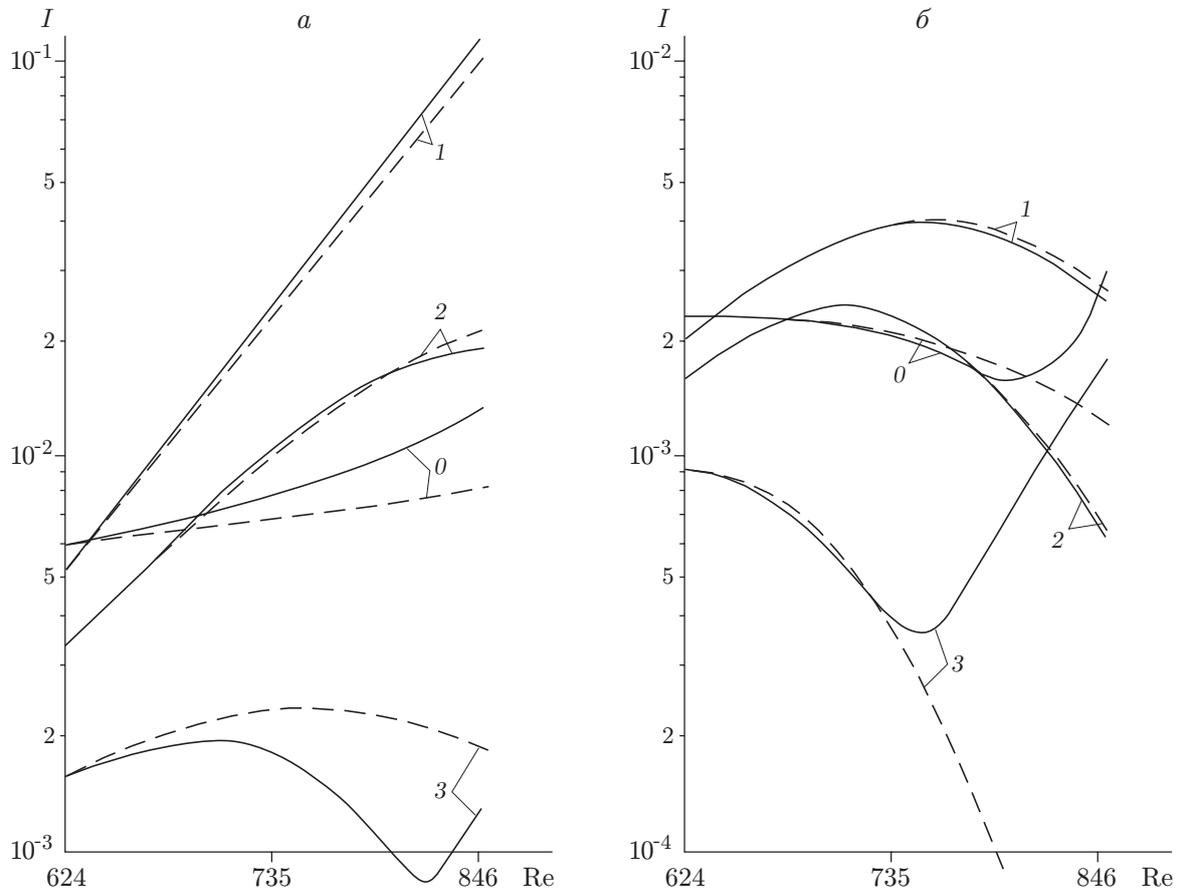


Рис. 4. Динамика интенсивностей рассматриваемых мод с частотными параметрами  $F_1$  (а) и  $F_2$  (б):

0 — двумерная составляющая ( $b_0 = 0$ ); 1-3 — трехмерные составляющие (1 —  $b_1 = 0,077$ ; 2 —  $b_2 = 0,154$ ; 3 —  $b_3 = 0,231$ ); сплошные кривые — нелинейная модель, штриховые — линейная модель

Учет нелинейности приводит к увеличению интенсивности плоской волны с частотой субгармоники, при  $Re = 846$  значение  $I$  в 1,5 раза больше рассчитанного по линейной модели. Для наиболее интенсивной трехмерной составляющей с  $b_1 = 0,077$  результаты расчетов интенсивности по нелинейной модели показывают, что ее значение в 1,2 раза превышает значение, рассчитанное по линейной модели. В то же время мода с  $b_2 = 0,154$  развивается практически по линейному закону. Из рис. 4,а следует, что интенсивность трехмерной моды с  $b_3 = 0,231$  на большей части исследованного интервала уменьшается. При этом ее значения существенно меньше рассчитанных по линейной модели.

Таким образом, при групповом взаимодействии перераспределение энергии прямо пропорционально углам наклона волновых мод к плоскости основного потока, при этом наибольшую долю энергии получает плоская волна. Этот процесс может приводить к сужению волнового пучка по трансверсальным волновым числам на частоте субгармоники, что соответствует реально наблюдаемому процессу. В то же время доля энергии, получаемая плоской волной, невелика, и нелинейное взаимодействие в резонансных триплетах не может быть причиной реально наблюдаемого роста преимущественно этой компоненты.

Нелинейная динамика составляющих основной волны с параметром  $F_2$  из-за существенно меньших начальных интенсивностей значительно слабее влияет на процесс взаимодействия волн (рис. 4,б). В этом случае для двумерной моды наблюдается существенное

увеличение  $I$  при  $Re > 800$ , так что при  $Re = 846$  интенсивность двумерной составляющей становится больше интенсивности трехмерной, что соответствует данным [7]. Из рис. 4,б следует, что трехмерные моды с  $b_1 = 0,077$  и  $b_2 = 0,154$  развиваются практически по линейному закону в соответствии с зависимостями  $\alpha^i(Re)$  (см. рис. 2,б).

Следует отметить, что ряд особенностей, полученных при анализе взаимодействий волновых поездов в режиме трехволновых резонансных систем, качественно соответствует наблюдаемой продольной динамике волновых пакетов. Тем не менее рассмотренное нелинейное взаимодействие не является основным в процессе перераспределения энергии в волновых поездах большой интенсивности. Очевидно, что физические процессы, сопутствующие эволюции таких возмущений вниз по потоку, более сложны и для их адекватного теоретического описания необходимо объединение резонансной и комбинационной моделей взаимодействия второго порядка малости [10], а также исследование влияния возмущений иного типа, в частности стационарных [11], существование которых отмечено в [7], на динамику волнового пакета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ermolaev Y. G., Kosinov A. D., Semionov N. V.** Experimental investigation of laminar-turbulent transition process in supersonic boundary layer using controlled disturbances // Nonlinear instability and transition in 3D boundary layer: Proc. of the IUTAM symp., Manchester, 1995. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 17–26.
2. **Ермолаев Ю. Г., Косинов А. Д., Семенов Н. В.** Экспериментальное исследование нелинейного развития волн неустойчивости на плоской пластине при числе Маха  $M = 3$  // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 107–114.
3. **Гапонов С. А., Maslennikova I. I.** Subharmonic instability of supersonic boundary layer // Proc. of the Intern. conf. method aerophys. res., Novosibirsk, Sept. 2–6, 1996. Novosibirsk: Inst. of theor. and appl. mech., 1996. Pt 2. P. 102–107.
4. **Гапонов С. А., Масленникова И. И.** Субгармоническая неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4, № 1. С. 3–12.
5. **Гапонов С. А., Масленникова И. И.** Резонансное взаимодействие волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое при  $M = 2$  // Тр. V Междунар. семинара по устойчивости гомогенных и гетерогенных жидкостей, Новосибирск, 22–24 апр. 1989 г. Новосибирск: Новосиб. архит.-строит. ун-т, 1989. Ч. 2. С. 170–175.
6. **Kosinov A. D., Tumin A. M.** Resonant interaction of wave train in supersonic boundary layer // Nonlinear instability and transition in 3D boundary layer: Proc. of the IUTAM symp., Manchester, 1995. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 379–388.
7. **Косинов А. Д., Ермолаев Ю. Г., Семенов Н. В.** Об “аномальных” нелинейных волновых явлениях в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 91–98.
8. **Качанов Ю. С., Оболенцева Т. Г.** Развитие трехмерных возмущений в пограничном слое Блазиуса. 1. Волновые поезда // Теплофизика и аэромеханика. 1996. Т. 3, № 3. С. 239–258.
9. **Гапонов С. А., Маслов А. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
10. **Терехова Н. М.** Комбинационное взаимодействие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 41–48.
11. **Гапонов С. А., Терехова Н. М.** Стационарные возмущения в сверхзвуковом пограничном слое // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 4. С. 35–42.