

ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТУПОГО ТЕЛА

В. В. Лунев, И. Н. Мурзинов

(Москва)

При гиперзвуковых скоростях движения тел вследствие высокой температуры газа за ударной волной в некоторых случаях может возникнуть необходимость учета процессов излучения и поглощения газа на его течение. В работе рассмотрена задача о влиянии излучения на движение газа в окрестности критической точки тупого тела. Очевидно, что в этой области вследствие малых скоростей и высоких температур влияние излучения будет наиболее существенным.

В работе [1] указано, что влияние излучения будет при отсутствии перепоглощения определяться параметром

$$\beta = \beta_0 \frac{\delta}{k} \left(\beta_0 = \frac{8\pi\alpha_1}{V_\infty^3} B_0 R_0, \quad B_0 = \frac{\sigma}{\pi} T_0^4 \right)$$

характеризующим отношение энергии, излучаемой единицей массы газа за характерное время прохождения частицей расстояния δR_0 между ударной волной и телом со скоростью в kV_∞ , к полному удельному теплоемкостному газу. Здесь α_1 — средний по частотам коэффициент поглощения, σ — постоянная Стефана — Больцмана, R_0 — радиус миделя тела, k — отношение плотностей до и после прямого скачка, V_∞ — скорость набегающего потока, B_0 — интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре за прямым скачком уплотнения T_0 . Очевидно, что наличие внутреннего поглощения уменьшает влияние излучения на течение.

Так же как и в работе [1], будем пренебрегать радиационным давлением, лучистым взаимодействием газа в ударном слое с набегающим потоком и влиянием пограничного слоя, который будем считать достаточно тонким.

1. Пусть x, y — система криволинейных координат с центром в критической точке, в которой расстояние xR_0 отсчитывается вдоль, а yR_0 — нормально к поверхности. Обозначим через uV_∞ и vV_∞ проекции скорости на оси x и y ; через iV_∞^2 , $\rho\rho_\infty$, $\rho\rho_\infty V_\infty^2$ энтальпию, плотность и давление газа соответственно; через ρ_∞ плотность набегающего потока.

Тогда, принимая во внимание, что при гиперзвуковых скоростях величина k , а вместе с ней и отношение δ/R , где RR_0 — радиус кривизны поверхности тела, малы, систему уравнений движения излучающего газа в окрестности критической точки запишем в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial(\rho ux)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vx)}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} &= \beta_0 q & \left(q = \frac{q_1 R_0}{\beta_0 V_\infty^3} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь q_1 — приток тепла в единице массы газа за счет излучения. Заметим, что при $k \ll 1$ излучение газа не может заметно повлиять на величину давления в критической точке. Действительно, из уравнений

импульса и неразрывности для малого цилиндра радиуса r , соосного с телом, заключенного между телом и ударной волной, получим

$$r^2 p(0) = r^2 + 2r^2 \int_0^\delta \rho \frac{u}{r} v dy, \quad 2 \int_0^\delta \rho \frac{u}{r} dy = 1 \quad (1.2)$$

Так как $|v| \ll k$, то из (1.2) следует $(1 - p) \ll k$; поэтому при $k \ll 1$ все процессы в окрестности критической точки можно считать происходящими при постоянном давлении, и уравнение состояния брать в виде $\rho = \rho(i)$.

Система (1.1) должна быть решена при очевидных граничных условиях

$$i = \frac{1}{2}, \quad v = -k, \quad u = \frac{x}{R_1}, \quad p = 1 - k \quad \text{при } y = \delta, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $R_1 R_0$ — радиус кривизны скачка уплотнения при $x = 0$.

Если принять, что интенсивность $B_0 J_{vw}$ излучаемых поверхностью тела лучей не зависит от направления, то лучистое поле в окрестности критической точки тела вследствие симметрии можно считать одномерным, рассчитанным по параметрам газа вдоль оси тела. Такая схема будет хорошо оправдана в случае большой оптической толщины ударного слоя, так как при этом лучистое поле определяется состоянием среды в небольшой окрестности точки, и в случае малой оптической толщины (прозрачный слой), когда величина q определяется исключительно местными параметрами. В этом случае величина q_1 выражается известной формулой (см. например, [2]).

$$q_1 = \int_0^\infty q_{1v} dv, \quad q_{1v} = \frac{\beta_0 U_\infty^3 q_v}{R_0} \quad (1.4)$$

$$q_v = \frac{\alpha_v}{4\alpha_1} \left[J_{vw} \bar{E}_2(\tau) + \int_0^\tau B_v E_1(\tau - \tau^*) d\tau^* + \int_\tau^{\tau_\delta} B_v E_1(\tau^* - \tau) d\tau^* - 2B_v \right]$$

$$B\alpha = \int_0^\infty \alpha_v B_v dv, \quad B = \int_0^\infty B_v dv = T^4, \quad \tau = R_0 \rho_\infty \int_0^y \rho \alpha_v dy$$

$$E_n(\xi) = \int_1^\infty e^{-s\xi} \frac{ds}{s^n}, \quad \tau_\delta = \tau(\delta), \quad \alpha_1 = \alpha(T_0)$$

Здесь TT_0 — температура; α_v и $B_0 B_v$ — массовый коэффициент поглощения и интенсивность излучения черного тела при частоте ν .

Величина J_{vw} определяется формулой

$$J_{vw} = \varepsilon B_\nu(T_w) + 2(1 - \varepsilon) \int_0^{\tau_\delta} B_\nu E_2(\tau_\delta - \tau) d\tau \quad (1.5)$$

Здесь первый член соответствует интенсивности собственного излучения поверхности, имеющей температуру T_w и степень черноты ε , второй — интенсивности отраженных лучей. Так как обычно $T_w^4 \ll T_0^4$, то членом $\varepsilon B_\nu(T_w)$ при подстановке (1.5) в (1.4) можно пренебречь.

Как следует из (1.4), в общем случае величина q выражается через довольно громоздкие квадратуры, и система (1.1) носит интегродифференциальный характер. В частном случае, когда слой газа между телом и ударной волной прозрачен, формула (1.4) существенно упрощается

$$q = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha_1} B \quad \text{при } \rho_\infty \delta \alpha_\nu R_0 \rho \ll 1 \quad (1.6)$$

и система (1.1) становится чисто дифференциальной.

2. Введем переменную Дородницына η и новую функцию v_0

$$\eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad v_0 = \frac{p_0}{\rho_0} (\rho_0 k = 1)$$

тогда система (1.1) примет вид,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} = -k \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho = \rho(i)$$

$$\frac{\partial(u_0 x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_0 x)}{\partial \eta} = 0, \quad u \frac{\partial i}{\partial x} + v_0 \frac{\partial i}{\partial \eta} = \beta_0 q \quad (2.1)$$

Следуя работе [3], будем искать решение системы (2.1) в виде

$$v_0 = -f(\eta), \quad u = \frac{1}{2} f'(\eta) x, \quad i = i(\eta)$$

В первом уравнении (2.1) при $k \ll 1$ величину градиента давления можно заменить ее значением на поверхности тела

$$\partial p / \partial x = -2bx \quad (b = \text{const})$$

где градиент играет основную роль в силу малости скоростей. Тогда система (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{1}{4} f'^2 - \frac{1}{2} f f'' = 2bk \frac{\rho_0}{\rho}, \quad f i' = -\beta_0 q, \quad \rho = \rho(i) \quad (2.2)$$

При этом граничные условия (1.3) примут вид

$$f(0) = 0, \quad f(\eta_8) = k, \quad i(\eta_8) = \frac{1}{2}, \quad f'(\eta_8) = \frac{2}{R_1} \quad (\eta_8 = \eta^*(\delta)) \quad (2.3)$$

Последнее условие (2.3) служит для определения связи между величинами R_1 , δ и b , которую можно установить путем численного решения системы (2.2)

Однако две другие зависимости, необходимые для полного решения задачи, строго говоря, невозможно установить путем анализа решения лишь в окрестности критической точки; для их определения необходимо привлечение дополнительных гипотез¹.

При фиксированных δ и b система (2.2) вместе с (1.4) может быть решена, например, методом итераций путем последовательной подстановки профиля температур в правые части.

Для получения простых приближенных результатов сделаем следующие допущения. Примем, что величина $k_v = R_0 \rho_{\infty} \rho_0 \alpha_v = k_1$, входящая в функции E_1 и E_2 в формуле (1.4), не зависит от частоты ν и температуры. Тогда $\tau = k_1 \eta$. Будем ограничиваться случаями, когда влияние излучения невелико и ударный слой достаточно прозрачен, т. е. величины β и $k_1 \delta$ невелики. Функция $E_1(\xi)$ имеет логарифмическую особенность при $\xi = 0$, и основное влияние на величины интегралов в формуле (1.4) будут оказывать значения B_v именно в окрестности этой особенности. Следовательно, учитывая, что при небольших k_1 роль интегралов в (1.4) будет также невелика, можно величины B_v вынести из-под знака интегралов. Кроме того, для простоты, ограничимся случаем $\varepsilon = 1$. При этих допущениях формула (1.4) примет вид

$$q = -\frac{\alpha B}{4\alpha_1} \{E_2(k_1 \eta) + E_2[k_1(\eta_8 - \eta)]\} \quad (2.4)$$

Так как $E_2(0) = 1$, то при $k_1 \rightarrow 0$ эта формула совпадает с точной формулой (1.6).

¹ Второе уравнение количества движения, которое здесь не использовано, не будет замыкающим, так как содержит новую неизвестную функцию.

Заметим, что $J_w \rightarrow \varepsilon B(T_w) \ll 1$ при $k_1 \delta \rightarrow 0$, и решение перестает зависеть от величины ε .

При $k_1 \delta \lesssim 0.2$ в формуле (2.4) стоящую в скобках сумму функций E_2 можно считать постоянной, равной величине $2E_2(1/2 k_1 \eta_8)$. Вследствие этого формула (2.4) примет вид

$$q = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha_1} B E_2 \left(\frac{1}{2} k_1 \eta_8 \right) \quad (2.5)$$

Таким образом, с принятыми допущениями система (2.2) становится чисто дифференциальной.

Система (2.2) вместе с (2.5) имеет особую точку при $y = 0$, и при $\alpha = \alpha_1$ для совершенного газа с постоянной теплоемкостью имеет асимптотическое решение

$$T = \text{const} (-\ln f)^{-0.4}, \quad y = \text{const} f (-\ln f)^{0.2} \quad \text{при } y \rightarrow 0$$

Из этих формул следует, что $T \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. Заметим, что эти формулы получены при условии, что влиянием излучения поверхности тела можно пренебречь, т. е. при $T_w^4 \ll T_0^4$, и более строго нужно полагать $T \rightarrow T_w$ при $y \rightarrow 0$. Однако величина T убывает столь медленно, что резкое убывание ее будет проявляться лишь в очень близкой окрестности поверхности тела, где уже нельзя пренебречь влиянием вязкости и теплопроводности на движение газа и полученное решение уже не будет иметь физического смысла.

В первом уравнении системы (2.2) правая часть имеет порядок k и играет роль лишь при малых y , поэтому если ограничиться случаем, когда влияние излучения невелико (параметр β_0 мал) и исключить из рассмотрения близкую окрестность особой точки, то в первом приближении в этом уравнении можно положить $\rho_0/\rho \approx 1$. Численные расчеты показали, что даже при значительном изменении профиля температур вследствие излучения правая часть первого уравнения (2.2) мало влияет на профиль скорости.

Тогда решение первого уравнения системы (2.2) будет иметь вид [3]

$$f(\eta) = (k - 2\eta_8 \sqrt{2bk}) \left(\frac{\eta}{\eta_8} \right)^2 + 2\sqrt{2bk}\eta$$

а решение второго уравнения этой системы с учетом (2.5) сведется к квадратурам

$$\int_T^{T_0} \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{di}{T^4} = \frac{\beta_0}{4\sqrt{2bk}} E_2 \left(\frac{1}{2} k_1 \eta_8 \right) \ln \left(\frac{1}{\eta_1} \frac{1+a\eta_1}{1+a} \right) \quad (2.6)$$

$$\left(a = -1 + \frac{k}{2\eta_8 \sqrt{2bk}}, \quad \eta_1 = \eta/\eta_8 \right)$$

Для произвольных тупых тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком, неизлучающего идеального газа, справедливы приближенные формулы

$$\frac{\delta}{kR_1} \approx \frac{1}{1 + \sqrt{2k}}, \quad b \approx \frac{1}{R_1^2} \left(1 + \frac{R_1}{3R} \right) \quad (2.7)$$

При $R_1 \lesssim R$ отсюда следует, что $a \approx (1 - \sqrt{2k}) / 2\sqrt{2k}$, т. е. величина a определяется в основном уплотнением газа.

Формулы (2.7) получаются так. Если при $\eta = y$ положить

$$v = -f_0(y) - x^2 f_2(y), \quad p = p_0(y) + x^2 p_2(y)$$

то функции f_2 и p_2 будут при $k \ll 1$ связаны между собой уравнением

$$p_2' = \frac{1}{4Rk} f_0'^2 - \frac{1}{k} f_0 f_2', \quad f_2(\delta) = \frac{2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right), \quad p_2(\delta) = \frac{1}{R_1 R} - \frac{2}{R_1^2}$$

Интегрируя это уравнение в пределах $[0, \delta]$ и задавая под интегралом приближенный профиль функции f_2 в виде $f_2 = \text{const } f_0$, получим для величины $b = -p_2(0)$ вторую формулу (2.7).

Удовлетворяя граничному условию $f_0'(\delta) = 2/R_1$, можно получить формулу

$$\delta/kR_1 = (1 + R_1 \sqrt{2bk})^{-1}$$

Величина $R_1 \sqrt{b}$ входит здесь в малый член порядка $k^{1/2}$, поэтому на основании второй формулы (2.7) при $R_1 \leq R$ можно в этой формуле положить $bR_1^2 \approx 1$, в результате чего получим первую формулу (2.7).

Рассмотрим простой случай, когда между телом и ударной волной можно принять

$$\alpha = \alpha_1, \quad \frac{di}{dT} = C_{p0} = \frac{T_0}{V_\infty^2} C_p$$

Тогда решение (2.6) примет вид

$$T = \left[1 + m \ln \left(\frac{1 + a\eta_1}{\eta_1} \frac{1 + a}{1 + a} \right) \right]^{-1/s} \quad (2.8)$$

$$\left(m = \frac{3}{4} \frac{\beta_0}{C_{p0} \sqrt{2bk}} E_2 \left(\frac{1}{2} k_1 \eta_\delta \right) = \frac{6\alpha_1 \sigma T_0^3 R_0}{V_\infty C_p \sqrt{2bk}} E_2 \left(\frac{1}{2} k_1 \eta_\delta \right) \right)$$

Как уже было указано выше, система (2.2) не является замкнутой, и для определения величин R_1 , δ и b необходимы два дополнительных соотношения.

Для определения b в общем случае можно использовать тот же прием, что при выводе формулы (2.7); для тел, форма которых близка к сферической, при малых k можно принять $R_1 \approx R$ и таким образом замкнуть задачу.

Однако при практическом использовании формул (2.6) и (2.8) можно, если влияние излучения не очень велико, пренебречь изменением величин δ и b и брать их из решений для неизлучающего газа. Зависимость $\eta(y)$ может быть вычислена по известному профилю температур; в первом приближении можно положить $\eta \approx y$.

Так как величина a не зависит от формы и размеров тела, то практически единственным параметром, характеризующим влияние излучения, будет параметр m ; это влияние растет с увеличением m . На фигуре показаны профили температур, вычисленные по (2.8) при $a = 1$, что соответствует значению $k \approx 0.065$.

Заметим, что влияние излучения растет с увеличением коэффициента массового поглощения α_1 и убывает с увеличением оптической толщины ударного слоя $k_1 \delta$.

Кроме того, влияние излучения будет расти с увеличением размеров тела. С увеличением радиуса кривизны тела (при сохранении радиуса миделя) для тел сегментальной формы влияние излучения будет также расти, так как при этом будет убывать величина b .

Поступила 18 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Обтекание клина гиперзвуковым потоком излучающего газа. ПМТФ, 1960, № 2.
2. Прокофьев В. А. Осреднение по направлениям уравнения переноса лучистой энергии. Вест. МГУ, Механика, 1958, № 2.
3. Лигт-и, Гейгер Р. Критическая точка тупоносного тела в гиперзвуковом потоке. ИИЛ, Механика, 1957, № 5.