

через седловые точки (4.3). Они представляют собой сепаратрисы уравнений (4.3), идущие из седла в седло. Пусть $c_2 > c_3$, тогда сепаратрисы соединяют седловые точки, лежащие на прямых $y = t_2 L/2$ (L — целое число). Соответствующая качественная картина линий тока представлена на рис. 6, где изображены вихревые цепочки, расположенные в шахматном порядке. Так как $c_2 \neq c_3$, то на плоскости течения есть линии тока, идущие между цепочками. Если же $c_2 = c_3$, то границы соседних цепочек становятся общими. Для получения качественной картины траекторий при $c_3 > c_2$ достаточно повернуть рис. 6 на 90° . Можно отметить сходство между приводимыми в этом пункте решениями и периодическими вторичными течениями, описанными в [15].

Автор признателен В. А. Владимирову за подробное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Simple rotational flows // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 82, pt 4.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
3. Stuart J. T. On finite-amplitude oscillations in laminar mixing layers // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 29, pt 3.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
5. Булаф Р. К., Кодри П. Дж. Солитоны.— М.: Мир, 1983.
6. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов.— М.: Мир, 1983.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.— М.: ГИФМЛ, 1963.
8. Маркушевич А. И. Замечательные синусы.— М.: Наука, 1974.
9. Хирш М. Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1979.
10. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта.— М.: Гостехиздат, 1950.
11. Арнольд В. И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Математика.— 1966.— № 5.
12. Бейтман Г. МГД-неустойчивости.— М.: Энергоиздат, 1982.
13. Мовсесянц Ю. Б. Солитоны в двумерной гидродинамической модели холодной плазмы // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91, вып. 2(8).
14. Яворский Н. И. Точные решения уравнения $\Delta u = \text{sh } u$ // Гидромеханика и теплообмен в одно- и двухфазных средах.— Новосибирск, 1979.
15. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Наука, 1981.

Поступила 6/Х 1987 г.

УДК 532.51

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ЖЕСТКОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. И. Колодежнов

(Воронеж)

В различных приложениях часто возникают задачи по расчету характеристик течений вязкой несжимаемой жидкости в тонких слоях, ограниченных жесткими поверхностями, одна из которых закреплена, а другая свободна и находится под действием заданной системы сил. Такого рода задачи возникают в гидродинамической теории смазки [1—3], контактной гидродинамике [4] и некоторых других приложениях. При этом, как правило, предполагают [1—3], что кинематика жесткой свободной поверхности известна заранее (задается закон движения свободной поверхности, либо рассматривается состояние ее равновесия). Такой подход не всегда позволяет учесть взаимовлияние друг на друга течения жидкости и динамики жесткой свободной поверхности, ограничивающей эту область течения.

В настоящей работе рассматривается подход к построению приближенного решения трехмерных нестационарных задач указанного типа. При этом проводится совместное рассмотрение задачи о течении жидкости в тонком слое с задачей о динамике жесткой свободной поверхности, ограничивающей этот слой. Возможности подхода иллюстрируются на примере двух задач.

1. Рассмотрим ламинарное неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в области, ограниченной двумя жесткими поверхностями, характерное расстояние между которыми мало по сравнению с

их продольными размерами. Будем считать, что одна из поверхностей, представляющая собой плоскость, неподвижна, а другая свободна и находится под действием заданной системы внешних сил.

Введем прямоугольную систему координат, расположив оси x и y в неподвижной плоскости, а z — перпендикулярно к ней. Пренебрегая тогда массовыми силами и принимая во внимание сделанное выше допущение относительно соотношения продольных и поперечных размеров рассматриваемой области, течение жидкости в ней опишем системой уравнений

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

с граничными условиями для скорости жидкости по поперечной координате

$$(1.3) \quad z = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{V};$$

$$(1.4) \quad z = h, \quad \mathbf{u} = \mathbf{W}$$

(\mathbf{V} , \mathbf{W} — значения вектора скорости \mathbf{u} на закрепленной и свободной поверхностях). Здесь предполагается, что свободная поверхность описывается в выбранной системе отсчета известной функцией своих аргументов вида

$$(1.5) \quad h = h(x, y, q_1, q_2, \dots),$$

где q_s ($s = 1, 2, \dots, S$) — обобщенные координаты жесткой свободной поверхности, S — число степеней свободы этой поверхности. Вектор \mathbf{W} , представляющий собой скорость той точки свободной поверхности, координаты которой равны $\{x, y\}$, также задается известной функцией своих аргументов

$$(1.6) \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(x, y, q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$$

(\dot{q}_s ($s = 1, 2, \dots, S$) — обобщенные скорости свободной поверхности).

Несмотря на то что вторая поверхность, ограничивающая область течения, предполагается неподвижной, в общем случае $\mathbf{V} \neq 0$, поскольку на этой поверхности, например, может иметь место подвод (либо отсос) жидкости [5]. Говоря о начальных и граничных по продольным координатам условиях для (1.1), (1.2), отметим лишь, что их вид определяется для каждой конкретной задачи в отдельности.

Наличие в граничном условии (1.4) с учетом (1.5), (1.6) обобщенных координат и скоростей свободной поверхности, представляющих собой неизвестные функции времени, обуславливает необходимость добавления к (1.1), (1.2) соответствующей системы уравнений, описывающей динамику свободной поверхности. Роль такой замыкающей системы уравнений играют, очевидно, уравнения Лагранжа второго рода

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, S).$$

Здесь T — кинетическая энергия свободной поверхности; Q_s — обобщенные силы системы. Заметим, что при определении Q_s необходимо учитывать не только внешние заданные силы, но и напряжения в жидкости, возникающие на границе со свободной жесткой поверхностью.

Решение задачи для продольных составляющих скорости будем искать в виде

$$(1.8) \quad u_x = \sum_{j=0}^{\infty} z^j u_{xj}, \quad u_y = \sum_{j=0}^{\infty} z^j u_{yj},$$

где u_{xj} , u_{yj} — неизвестные пока функции времени и продольных координат. С учетом (1.8) из (1.2), привлекая граничное условие (1.3) для u_z , получим

$$(1.9) \quad u_z = V_z - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j+1}}{(j+1)} \left(\frac{\partial u_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yj}}{\partial y} \right).$$

Подставляя (1.8), (1.9) в (1.1), делая преобразования и переиндексацию, находим

$$(1.10) \quad \frac{\partial u_{\xi j}}{\partial t} + (j+1) V_z u_{\xi, j+1} - (j+1)(j+2) \frac{\mu}{\rho} u_{\xi, j+2} + \frac{\delta_{j0}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \\ + \sum_{i=0}^j \left\{ u_{xi} \frac{\partial u_{\xi, j-i}}{\partial x} + u_{yi} \frac{\partial u_{\xi, j-i}}{\partial y} - \frac{i u_{\xi i}}{(j-i+1)} \left(\frac{\partial u_{x, j-i}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y, j-i}}{\partial y} \right) \right\} = 0 \\ (j = 0, 1, \dots).$$

Здесь и далее для краткости записи ξ принимает значения x и y соответственно для первого и второго уравнений из (1.1); δ_{j0} — символ Кронекера.

Особенностью полученной системы (1.10) является то, что при построении приближенного решения, ограничиваясь в ней для каждого ξ первыми J уравнениями, всегда будем приходить к подсистеме $2J$ уравнений, содержащей $2J + 5$ неизвестных функций:

$$(1.11) \quad p, u_{xj}, u_{yj}, (j = 0, 1, \dots, J+1).$$

Первые четыре недостающих уравнения вытекают из граничных условий (1.3), (1.4) для продольных составляющих скорости и с учетом (1.8) имеют вид

$$(1.12) \quad u_{x0} = V_x, \quad u_{y0} = V_y, \quad W_x = \sum_{j=0}^{J+1} h^j u_{xj}, \quad W_y = \sum_{j=0}^{J+1} h^j u_{yj}.$$

Последнее недостающее уравнение может быть получено из граничного условия (1.4) для u_z и с учетом (1.9) представлено в форме

$$(1.13) \quad W_z = V_z - \sum_{j=0}^{J+1} \frac{h^{j+1}}{(j+1)} \left(\frac{\partial u_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yj}}{\partial y} \right).$$

Таким образом, окончательное построение приближенного решения этих задач сводится к совместному решению системы $2J + S + 5$ уравнений, которая состоит из (1.7), (1.12), (1.13) и $2J$ первых уравнений (по J уравнений для каждого из двух ξ) системы (1.10). Решение такой системы необходимо проводить как с учетом начальных условий для обобщенных координат и скоростей свободной поверхности, так и начальных и граничных по продольным координатам условий для функций (1.11). Последние условия должны быть получены из соответствующих исходных начальных и граничных условий для u_x и u_y с учетом (1.8). Проведем приближенное решение некоторых задач указанного типа.

2. Рассмотрим течение жидкости в области между двумя параллельными пластинами длины $2L$ и ширины $2D$, одна из которых неподвижна, а другая свободна и находится под действием постоянной и нормальной к этой пластине силы G . При такой постановке задачи подвижная пластина представляет собой систему с одной степенью свободы, в качестве обобщенной координаты которой выберем расстояние h до неподвижной пластины. Решение задачи о сдавливании пленки жидкости между параллель-

ными жесткими пластинами для случая, когда G уравновешивается суммарным давлением в пленке, проведено в [4].

Введем прямоугольную систему координат ($|x| \leq D$, $|y| \leq L$). Граничные условия (1.3), (1.4) принимают вид

$$(2.1) \quad z = 0: u_x = u_y = u_z = 0; \quad z = h: u_x = u_y = 0, \quad u_z = dh/dt,$$

а система (1.7) сводится к дифференциальному уравнению

$$(2.2) \quad m \frac{d^2 h}{dt^2} = -\bar{G} + 4 \int_0^D \int_0^L (p - p_c) dx dy,$$

где m — масса подвижной пластины; p_c — постоянное давление в окружающей среде. При записи (2.2) дополнительно предполагали, что доминирующий вклад в напряжения жидкости на границе со свободной пластиной вносит лишь статическое давление.

Рассмотрим приближенное решение задачи, когда в (1.10) допустимо ограничиться лишь по одному первому уравнению для каждого из двух ξ . Заметим, что в рамках такого приближения ($J = 1$) нестационарность поля скоростей и давления «проявляется» лишь через зависимость от времени обобщенной координаты h . При этом определение поля давления в исследуемой области сводится с учетом (1.12), (1.13), (2.1) к решению частного случая уравнения Рейнольдса

$$(2.3) \quad \Delta p = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

(Δ — оператор Лапласа). В качестве граничного условия для давления брали $p = p_c$ на внешнем контуре пластины.

Решение (2.3) искали в виде

$$(2.4) \quad p = p_c + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \cos \frac{\varepsilon_n x}{D} \cos \frac{\varepsilon_k y}{L}, \quad \varepsilon_l = \frac{\pi}{2} (2l - 1) \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Здесь коэффициенты разложения с учетом условия ортогональности базисных функций определяются следующим образом:

$$(2.5) \quad C_{nk} = - \frac{48\mu (-1)^{n+k}}{h^3 \varepsilon_n \varepsilon_k} \left(\frac{\varepsilon_n^2}{D^2} + \frac{\varepsilon_k^2}{L^2} \right)^{-1} \frac{dh}{dt}, \quad n, k = 1, 2, \dots$$

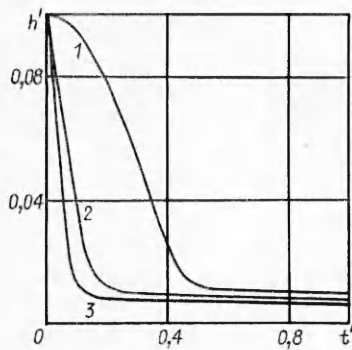
Распределение скоростей жидкости под пластиной в рамках рассматриваемого приближения может быть получено из (1.8)—(1.10) с учетом (2.4), (2.5).

Подставляя (2.4) с учетом (2.5) в (2.2), после соответствующих преобразований приходим к уравнению, описывающему динамику свободной пластины

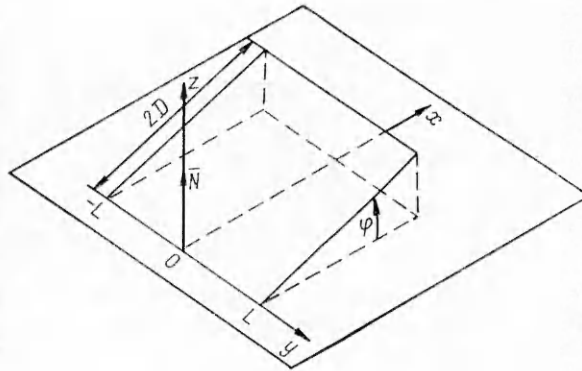
$$(2.6) \quad \frac{d^2 h'}{d(t')^2} = -1 - \frac{A}{(h')^3} \frac{dh'}{dt'}, \quad A = \frac{192\mu D^3}{mGL^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^2 \varepsilon_k^2} \left(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_k^2 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \right)^{-1}.$$

В (2.6) дифференцирование безразмерной обобщенной координаты $h' = h/L$ проводится по безразмерному времени $t' = t \sqrt{G/(Lm)}$.

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены зависимости h' от t' , полученные при $A = 0,132 \cdot 10^{-3}$ численным решением (2.6) с начальными условиями: $t' = 0$, $h' = 0,1$, $dh'/dt' = 0$; $-0,5$; -1 (линии 1—3). Видно, что процесс сдавливания пленки под действием постоянной силы протекает условно в два этапа. На первом этапе, когда «несущая способность» пленки, определяемая двойным интегралом в (2.2), мала по сравнению с G , свободная пластина достаточно быстро приближается к неподвижной пластине, практически не испытывая сопротивления пленки. Начальная стадия этого этапа протекает, по-видимому, в режиме, близ-



Р и с. 1



Р и с. 2

ком к режиму свободного падения. На втором этапе, когда «несущая способность» пленки становится сравнимой с G , имеем $d^2h'/d(t')^2 \rightarrow 0$.

Отметим, что изучение осесимметричной задачи о сдавливании пленки жидкости между дисками радиуса R изложенным выше подходом в цилиндрической системе координат сводится в первом приближении к решению уравнения, совпадающего по форме записи с (2.6). При этом безразмерные параметры уравнения (2.6) определяются в виде

$$h' = \frac{h}{R}, \quad t' = t \sqrt{\frac{G}{Rm}}, \quad A = \frac{3\pi\mu}{2} \sqrt{\frac{R^3}{mG}}.$$

3. Рассмотрим в поле сил тяжести процесс выдавливания вязкой несжимаемой жидкости из-под тонкой прямоугольной однородной погруженной в эту жидкость пластины массой m , которая свободно опирается на некоторую неподвижную плоскость так, что между плоскостью и пластиной образуется клиновидная область. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 2. Несмотря на то что пластина свободно опирается на плоскость, предполагаем, что в ходе выдавливания жидкости из клиновидной области перемещение (скольжение) пластины относительно плоскости вдоль оси x не происходит. Будем считать, что максимальное расстояние между пластиной и неподвижной плоскостью достаточно мало по сравнению с размерами пластины и течение жидкости в клиновидной области можно описывать системой (1.1), (1.2) с учетом всех сделанных ранее допущений. В качестве граничных условий для скорости жидкости по поперечной координате примем (1.3), (1.4), учитывая, что для изучаемой задачи

$$(3.1) \quad h(x, t) = x \operatorname{tg} \varphi, \quad V_x = V_y = V_z \equiv 0,$$

$$W_x(x, t) = -x \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad W_y \equiv 0, \quad W_z(x, t) = x \frac{d\varphi}{dt}$$

(φ — обобщенная координата пластины, представляющая собой угол между пластиной и неподвижной плоскостью). Дополнительно к (1.3), (1.4) запишем граничные и начальные условия

$$(3.2) \quad x = 2D \cos \varphi, \quad p = p_c,$$

$$y = +L, \quad p = p_c;$$

$$(3.3) \quad x = 0, \quad p \neq \infty,$$

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad d\varphi/dt = \omega_0,$$

где $2D$, $2L$ — размеры пластины соответственно в направлениях осей x и y ; p_c — давление жидкости в окружающем пластину пространстве; φ_0 , ω_0 — начальные значения угла раствора клиновидной области течения и угловой скорости пластины.

Рассмотрим наиболее простой частный случай, когда при построении приближенного решения в (1.10) допустимо ограничиться лишь по одному

первому уравнению для каждого из двух ξ . Тогда поле давления в клиновидной области может быть найдено из уравнения Рейнольдса

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\mu W_z,$$

решение которого искали в форме

$$(3.5) \quad p = p_c + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{\varepsilon_n y}{L}, \quad \varepsilon_n = \frac{\pi}{2} (2n - 1)$$

(C_n — неизвестные пока коэффициенты разложения, представляющие собой функции координаты x и времени t).

Подставляя (3.5) в (3.4) и принимая во внимание условие ортогональности базисных функций, приходим после преобразований с учетом (3.4) к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно C_n :

$$(3.6) \quad x^2 \frac{d^2 C_n}{dx^2} + 3x \frac{dC_n}{dx} - \left(\frac{\varepsilon_n x}{L} \right)^2 C_n = \frac{24\mu}{\varepsilon_n \operatorname{tg}^3 \varphi} (-1)^{n+1} \frac{d\varphi}{dt}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что зависимость C_n , а следовательно, поля скоростей и давления от времени проявляется в рамках рассматриваемого приближения ($J = 1$) через зависимость от времени обобщенных координаты и скорости пластины. Общее решение (3.6) имеет вид

$$(3.7) \quad C_n = \frac{24\mu}{\varepsilon_n^3 \operatorname{tg}^3 \varphi} \left(\frac{L}{x} \right)^2 (-1)^n \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{x} \left[c_{1n} I_1 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L} \right) + c_{2n} K_1 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L} \right) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

(c_{1n} , c_{2n} — неизвестные константы интегрирования). Здесь и далее I_l , K_l — модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда порядка l .

Учитывая граничные условия (3.2), (3.3), принимая во внимание поведение функций I_1 и K_1 при $\varepsilon_n x/L \ll 1$ [6], а также априорно допуская для всех $|y| \leq L$ сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} \varepsilon_n \cos \frac{\varepsilon_n y}{L} \neq \infty$, можно показать, что константы интегрирования в (3.7) находятся в форме

$$(3.8) \quad c_{1n} = \frac{24\mu L E_n (-1)^{n+1}}{\varepsilon_n^2 \operatorname{tg}^3 \varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad c_{2n} = \frac{c_{1n}}{E_n}$$

$$E_n = [\alpha_n^{-1} - K_1(\alpha_n)] I_1^{-1}(\alpha_n), \quad \alpha_n = \frac{2D\varepsilon_n \cos \varphi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Окончательное определение в рамках рассматриваемого приближения поля давления, а следовательно, с учетом (1.8)—(1.10) и поля скоростей в клиновидной области сводится к нахождению зависимости обобщенной координаты φ от времени из системы (1.7), которая преобразуется к дифференциальному уравнению

$$(3.9) \quad J_y \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Dmg \cos \varphi + 2 \int_0^L \int_0^{2D \cos \varphi} (p - p_c) \frac{x dx dy}{\cos^2 \varphi},$$

где g — ускорение свободного падения; $J_y = 4mD^2/3$ — момент инерции пластины относительно оси y . При выводе (3.9) дополнительно предполагали, что силовое воздействие жидкости на пластину сводится лишь к статическому давлению. Подставляя теперь в (3.9) выражение (3.5) с учетом (3.7), (3.8), после преобразований приходим к уравнению для определения $\varphi = \varphi(t)$:

$$(3.10) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\cos \varphi - \frac{A_1(\varphi)}{\operatorname{tg}^3 \varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

($t' = t\sqrt{mgD/J_y}$ — безразмерное время). В (3.10) для краткости записи принято

$$(3.11) \quad A_1(\varphi) = -\frac{B}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{L}{D}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^4} \left[\ln \frac{2}{\gamma \alpha_n} - K_0(\alpha_n) + E_n(I_0(\alpha_n) - 1) \right],$$

$$B = \frac{72\mu}{m} \sqrt{\frac{D^3}{3g}}$$

($\gamma = 1,781\dots$ — постоянная Эйлера).

Поскольку, как было оговорено выше, рассматриваются течения в области, поперечные размеры которой малы по сравнению с ее продольными размерами, можно считать $\varphi \ll 1$, полагая

$$(3.12) \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1.$$

С учетом последнего замечания уравнение (3.10) представим в форме

$$(3.13) \quad \frac{d^2 \varphi}{d(t')^2} = -1 - \frac{A}{\varphi^3} \frac{d\varphi}{dt'}, \quad A = A_1(0).$$

Отметим, что структурно по форме записи уравнение (3.13) совпадает с (2.6). То же самое можно сказать и относительно решения этих уравнений при одинаковых начальных условиях и равных значениях параметра A . Поэтому характер изменения φ с течением безразмерного времени t' может быть проиллюстрирован зависимостями на рис. 1.

Определив в ходе численного решения (3.13) зависимость обобщенной координаты от времени, приходим с учетом (1.10), (1.12), (1.13), (3.5), (3.7), (3.8) к формулам, определяющим поле давления и скоростей в клиновидной области течения:

$$(3.14) \quad p = p_c + \frac{24\mu}{\varphi^3} \frac{d\varphi}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n} \left(\frac{x}{L}\right) \cos \left(\frac{\varepsilon_n y}{L}\right),$$

$$u_x = -z \frac{d\varphi}{dt} + \frac{12(z^2 - xz\varphi)}{\varphi^3 L} \frac{d\varphi}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} F_{2n} \left(\frac{x}{L}\right) \cos \left(\frac{\varepsilon_n y}{L}\right),$$

$$u_y = -\frac{12(z^2 - xz\varphi)}{\varphi^3 L} \frac{d\varphi}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n F_{1n} \left(\frac{x}{L}\right) \sin \left(\frac{\varepsilon_n y}{L}\right),$$

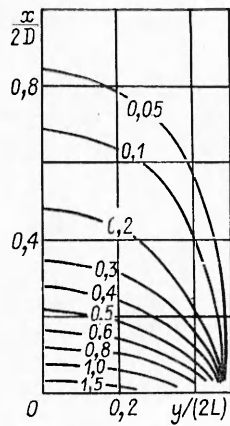
$$u_z = \frac{(3x\varphi z^2 - 2z^3)}{x^2 \varphi^3} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{12(z^3 - x\varphi z^2)}{x\varphi^3 L} \frac{d\varphi}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} F_{2n} \left(\frac{x}{L}\right) \cos \left(\frac{\varepsilon_n y}{L}\right).$$

Здесь $F_{1n} \left(\frac{x}{L}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\varepsilon_n^2} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_n} \left(\frac{L}{x}\right)^2 + \left(\frac{L}{x}\right) \left[E_n I_1 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L}\right) + K_1 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L}\right) \right] \right\};$

$$F_{2n} \left(\frac{x}{L}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\varepsilon_n^2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_n} \left(\frac{L}{x}\right)^3 - 2 \left(\frac{L}{x}\right)^2 K_1 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L}\right) - \varepsilon_n \left(\frac{L}{x}\right) K_0 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L}\right) + \right.$$

$$\left. + E_n \left[\varepsilon_n \left(\frac{L}{x}\right) I_0 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L}\right) - 2 \left(\frac{L}{x}\right)^2 I_1 \left(\frac{\varepsilon_n x}{L}\right) \right] \right\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из (3.14) вытекает, что зависимость от времени поля избыточного давления ($p - p_c$) определяется сомножителем $\varphi^{-3} d\varphi/dt$, который в свою очередь с учетом (3.13) линейным образом связан с угловым ускорением пластины. Для примера на рис. 3 представлены линии равного безразмерного избыточного давления $4(p - p_c)LD/(mg)$ в клиновидной области, построенные с учетом (3.13), (3.14) для $D/L = 1$ в случае, когда угловое ускорение пластины $d^2\varphi/d(t')^2 = -0,9$. На рис. 4 показано поле безразмерной скорости в сечении $y = 0$ клиновидной области, построенное с учетом (3.14) для $D/L = 1$ и $\varphi = 0,262$. В качестве масштаба скорости в данный момент времени принимали значение $-2Dd\varphi/dt$, соответствующее линей-



Р и с. 3

ной скорости наиболее удаленных от оси вращения точек пластины.

Рассмотрим вопрос о рамках применимости полученных соотношений (3.14), для чего воспользуемся с учетом (3.11) теоремой о движении центра масс пластины в проекции на ось z :

$$(3.15) \quad mD \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) = -mg + N + F$$

(N — реакция плоскости, на которую опирается пластина). В (3.15) с учетом (3.14) для краткости записи принято

$$F = 2 \int_0^L \int_0^{2D} (p - p_c) dx dy = \frac{48\mu L^2 B_1}{\varphi^3} \frac{d\varphi}{dt}$$

Здесь B_1 после преобразований и оценок [6,7] имеет вид

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^3} \left\{ \alpha_n^{-1} - K_1(\alpha_n) - \alpha_n K_0(\alpha_n) - \frac{\pi\alpha_n}{2} [K_0(\alpha_n) \mathbf{L}_1(\alpha_n) - K_1(\alpha_n) \mathbf{L}_0(\alpha_n)] + \right. \\ \left. + E_n \left[\alpha_n I_0(\alpha_n) - I_1(\alpha_n) + \frac{\pi\alpha_n}{2} [I_0(\alpha_n) \mathbf{L}_1(\alpha_n) - I_1(\alpha_n) \mathbf{L}_0(\alpha_n)] \right] \right\}$$

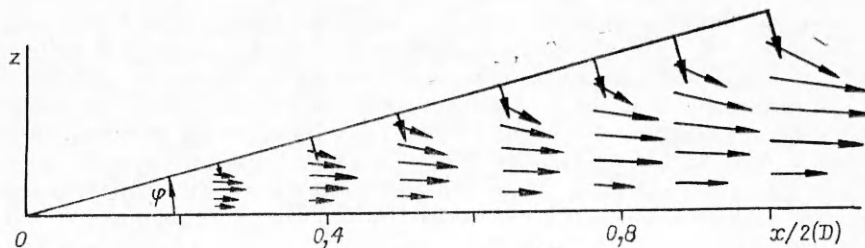
(\mathbf{L}_l — модифицированные функции Струве порядка l).

При известном законе движения пластины $\varphi = \varphi(t)$, который определяется решением (3.13), уравнение (3.15) позволяет найти неизвестную величину реакции плоскости N . При этом случай $N = 0$, очевидно, отвечает тому моменту, когда пластина перестает свободно опираться на плоскость, «всплывая» на гидрослойке. Начиная с этого момента времени поведение пластины уже не будет описываться решением уравнения (3.13), поскольку пластина приобретает дополнительные степени свободы.

Условие «всплывания» пластины на гидрослойке может быть получено при $N = 0$ исключением $d^2\varphi/dt^2$ из (3.15) посредством (3.13) и после преобразований представлено в безразмерной форме

$$(3.16) \quad (\omega')^2 \varphi + B_2 \varphi^{-3} \omega' - \frac{1}{3} = 0, \quad B_2 = A + \frac{4}{3} B B_1 \left(\frac{L}{D} \right)^2, \quad \omega' = \frac{d\varphi}{dt}$$

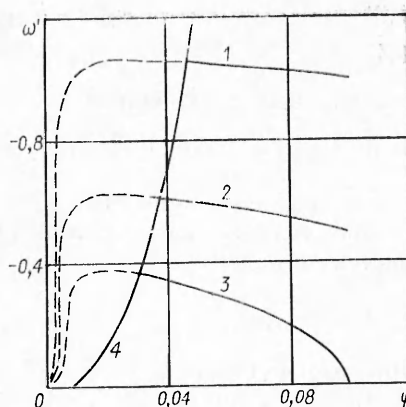
Для примера на рис. 5 даны зависимости ω' от φ , полученные в ходе численного решения (3.13), при следующих начальных условиях: $t' = 0$, $\varphi = 0,1$, $\omega' = -1$; $-0,5$; 0 (линии 1—3). Расчеты проводились при $B = 10^{-4}$ для пластины с $D/L = 1$, что соответствует $A = 0,132 \cdot 10^{-4}$, $B_2 = -0,274 \cdot 10^{-4}$. Для этих же значений исходных параметров приведена с учетом (3.16) граница (кривая 4) той области значений φ и ω' , при достижении которой пластина «всплывает» на гидрослойке. Штриховые части кривых 1—3, хотя формально и отвечают уравнению (3.13), не могут быть реализованы. Это обусловлено тем, что поведение пластины



Р и с. 4

после моментов «всплывания», отвечающих точкам пересечения линий 1—3 и 4, не описывается уже уравнением (3.13).

Полученные в рассмотренных примерах результаты для наиболее простого частного случая, когда в (1.10) допустимо ограничиться лишь по одному первому уравнению для каждого из двух ξ ($J = 1$), носят, естественно, приближенный характер. Тем не менее они позволяют найти предварительные оценки характеристик течения. А когда требуется повышенная точность, предлагается ограничиваться в (1.10) большим числом уравнений ($J \geq 2$).



Р и с. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Константиnescу В. Н. Газовая смазка.— М.: Машиностроение, 1968.
2. Gross W. A., Matsch L. A., Castelli V. et al. Fluid film lubrication.— N. Y.: Wiley, 1980.
3. Никитин А. К., Ахвердиев К. С., Остроухов Б. И. Гидродинамическая теория смазки и расчет подшипников скольжения, работающих в стационарном режиме.— М.: Наука, 1981.
4. Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А. П. Математические модели контактной гидродинамики.— М.: Наука, 1985.
5. Колодежников В. И. Течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком канале с одной свободной стенкой при ее подводе через пористый вкладыш // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 4.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1977.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.

Поступила 12/XI 1987 г.

УДК 532.591

ГЕНЕРАЦИЯ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ МАЛОЙ НЕРОВНОСТИ ДНА

Б. Е. Протопопов, И. В. Стурова

(Новосибирск)

В настоящее время достаточно хорошо разработана линейная теория генерации поверхностных волн различными возмущениями в жидкости с горизонтальным дном. Однако для жидкости с неровным дном аналитические исследования данной задачи сталкиваются со значительными математическими трудностями. Для малых неровностей дна обычно используется метод возмущений [1].

В настоящей работе в линейной постановке исследовано влияние малой локализованной донной неровности на поведение поверхностных волн для двух задач: распад начального возвышения свободной поверхности и движение области поверхностных давлений. Проведено сопоставление с численным решением исходной задачи, полученным конечно-разностным методом.

1. Пусть идеальная несжимаемая однородная жидкость занимает область $-\infty < x < \infty$, $-H(x) \leq y \leq 0$, где x — горизонтальная, а y — вертикальная координаты, $H(x) = H_0 - h(x)$, $h(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. В начальный момент времени $t = 0$ свободная поверхность жидкости отклонена от своего равновесного горизонтального вида и задана выражением $y = f_0(x)$. Потенциал скорости данного течения $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \Delta \varphi = 0$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad \varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 \text{ при } y = 0;$$