

да концентрации в переходном слое (кривая 2) имеет более сложный вид, однако в целом обе они монотонно растут с увеличением γ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что термодиффузионным разделением жидких растворов в условиях развитой конвекции ($Gr \geq 10^4$) можно пренебречь, за исключением тех случаев, когда внутри полости возможно образование застойных зон с очень медленным движением. Концентрация раствора внутри таких зон может существенно отличаться от средней по объему. Объем концентрационной зоны и разделение зависят от интенсивности конвективного движения и силы термодиффузионного эффекта, однако разделение всегда оказывается меньше, нежели в бесконвективной позиции.

В заключение авторы благодарят Г. З. Гершуни за обсуждение результатов и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович Г. Д. Разделение изотопов и других смесей термодиффузией.— М.: Атомиздат, 1981.
2. Chueh P. L., Yeh H. M. Thermal diffusion in plate column inclined for improved performance // *AIChE J.*— 1967.— V. 13, N 1.
3. Kokugan T., Shimisu M. The effect of inclination on separation in a thermal diffusion column // *J. Chem. Eng. Jap.*— 1976.— V. 9, N 3.
4. Пинягин А. Ю., Пшеничников А. Ф. Свободная конвекция жидкой бинарной смеси в наклонной прямоугольной полости // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1979.— № 4.
5. Костарев К. Г., Пшеничников А. Ф. Влияние свободной конвекции на термодиффузию в жидкой смеси, заполняющей наклонную прямоугольную полость // *ПМТФ.*— 1986.— № 5.
6. Kuehn T. H., Goldstein R. J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders // *J. Fluid Mech.*— 1976.— V. 74, N 4.
7. Gustafson S. E., Kjellander Rolf A. E. An interferometer for direct recording of refractive index distributions // *Z. Naturforsch.*— 1968.— Bd 23 «a», N 2.
8. Костарев К. Г., Пшеничников А. Ф. Экспериментальное исследование концентрационной конвекции в горизонтальном цилиндрическом слое // *Конвективные течения.*— Пермь: Перм. пед. ин-т, 1985.
9. Рабинович Г. Д., Гуревич Р. Я., Боброва Г. И. Термодиффузионное разделение жидких смесей.— Минск: Наука и техника, 1971.
10. Бузмаков В. М., Пинягин А. Ю., Пшеничников А. Ф. Методика одновременного измерения коэффициента Соре и диффузии жидких растворов // *ИФЖ.*— 1983.— Т. 44, № 5.

Поступила 14/1 1987 г.

УДК 532.542:660.095.26

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ФРОНТА РЕАКЦИИ, СОПРОВОЖДАЮЩЕЙСЯ СИЛЬНЫМ УВЕЛИЧЕНИЕМ ВЯЗКОСТИ

Г. В. Жижин, А. С. Сегаль

(Ленинград)

Гидродинамическая устойчивость плоского фронта химической реакции в газовой фазе впервые рассматривалась в [1] в пренебрежении эффектами переноса. Влияние процессов переноса на устойчивость плоского фронта в вязких газовой и конденсированной фазах исследовалось в [2—5]. Особенности устойчивости искривленного фронта рассматривались в [6] на примере распространения сферического пламени по неподвижной газовой фазе. Эффекты переноса при этом считались малыми и учитывались феноменологически в приближении Маркштейна [7].

В данной работе в линейном приближении рассматривается гидродинамическая устойчивость стационарного цилиндрического фронта реакции в радиальном осесимметричном потоке конденсированной среды. Поток образован с помощью двух противоположных цилиндрических поверхностей, расположенных коаксиально. Считается, что вязкость среды в процессе реакции существенно увеличивается (что характерно, например, для реакции полимеризации), при этом инерционные эффекты малы и не учитываются [8, 9]. Исследована зависимость инкремента возмущений стационарных

состояний фронта от параметров задачи: отношения вязкостей среды на фронте, отношений радиусов граничных поверхностей к радиусу фронта, сопротивлений граничных поверхностей. В нулевом приближении по малому отношению вязкостей эта зависимость получена аналитически. Показано, что фронт абсолютно устойчив почти во всей физической области изменения параметров. Неустойчивость фронта возникает лишь при его приближении к внешней граничной поверхности в случае ее малого сопротивления.

Отметим, что, как обнаружено в ряде работ (см., например, [8—12]), при течении вдоль каналов реагирующих сред, вязкость которых увеличивается в процессе реакции, фронт реакции резко искривляется и вытягивается в окрестности оси канала (явление «пробоя»). Исследования гидродинамической устойчивости цилиндрического фронта, проведенные в данной работе, показывают, что в этом случае в широком диапазоне параметров малые искривления фронта затухают, и, значит, «пробой» (в радиальном направлении) не происходит.

1. Будем считать толщину фронта малой в сравнении с расстоянием между поверхностями, ограничивающими течение, и рассматривать его как поверхность разрыва, распространяющуюся относительно реакционной среды с постоянной скоростью U (локальный закон Михельсона [13]). Плотность среды принимаем постоянной.

При принятых допущениях движение среды до и после фронта описывается уравнениями Стокса и неразрывности

$$(1.1) \quad \nabla p_{1,2} = \mu_{1,2} \nabla^2 \mathbf{V}_{1,2};$$

$$(1.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_{1,2} = 0,$$

где p — давление; μ — вязкость; \mathbf{V} — вектор скорости; индексы 1 и 2 относятся к областям течения до и после фронта.

Граничные условия к системе уравнений (1.1) и (1.2) ставятся на проницаемых поверхностях, ограничивающих течение, и на фронте. Поскольку инерционные эффекты малы, примем, что нормальная составляющая скорости на проницаемых поверхностях пропорциональна перепаду давления на них:

$$(1.3) \quad (p_{10} - p_1)|_{R_1} = \sigma_1 V_{1n}|_{R_1};$$

$$(1.4) \quad (p_2 - p_{20})|_{R_2} = \sigma_2 V_{2n}|_{R_2}.$$

Здесь $\sigma_{1,2}$ — коэффициенты пропорциональности (сопротивления поверхностей); $R_{1,2}$ — радиусы поверхностей; индекс 0 относится к областям течения вне проницаемых поверхностей. Касательные составляющие скорости на граничных поверхностях полагаются равными нулю:

$$(1.5) \quad \mathbf{V}_{1\tau}|_{R_1} = 0;$$

$$(1.6) \quad \mathbf{V}_{2\tau}|_{R_2} = 0.$$

На фронте реакции в силу «слипания» потоков и несжимаемости среды непрерывен вектор скорости

$$(1.7) \quad \mathbf{V}_1|_R = \mathbf{V}_2|_R,$$

где R — поверхность фронта, задаваемая уравнением $R(r, t) = 0$; r — радиус-вектор; t — время.

Из условия сохранения количества движения на поверхности разрыва [14] и непрерывности вектора скорости следует непрерывность вектора напряжения

$$(1.8) \quad \mathbf{P}_{n1}|_R = \mathbf{P}_{n2}|_R.$$

Здесь $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$; \mathbf{P} — тензор напряжений; $\mathbf{n} = \nabla R / |\nabla R|$ — единичная нормаль к фронту в направлении его распространения.

Условие постоянства скорости распространения фронта относительно реакционной среды записывается в виде [14]

$$(1.9) \quad N - V_n|_R = U$$

($N = -(\partial R / \partial t) / |\nabla R|$ — скорость распространения поверхности фронта в направлении нормали).

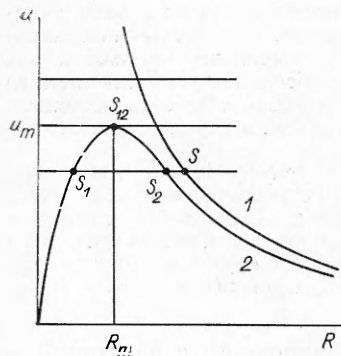


Рис. 1

его цилиндрической формы. Вводя цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , ось которой совпадает с осью течения, и полагая $\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0$, $v_{1,2} = w_{1,2} = 0$, из (1.2) и (1.7) находим

$$(2.1) \quad u_1 = u_2 = q/2\pi r,$$

где u , v и w — соответственно радиальная, угловая и осевая составляющие вектора скорости \mathbf{V} ; q — постоянная интегрирования, имеющая смысл интенсивности осесимметричного гидродинамического источника.

Подставляя (2.1) в (1.1) и (1.8), получим, что в областях течения до и после фронта давление не меняется, а на фронте возникает скачок, обусловленный изменением вязкости

$$(2.2) \quad p_1 - p_2 = (\mu_2 - \mu_1)q/\pi R^2.$$

Последнее равенство можно интерпретировать как наличие у фронта собственного гидравлического сопротивления, зависящего от его радиуса [15].

Закон Михельсона (1.9) в данном случае имеет вид

$$(2.3) \quad dR/dt = u(R) - U$$

($u(R)$ — локальная скорость потока в месте расположения фронта). Стационарные состояния фронта определяются равенством $u(R) = U$ ($dR/dt = 0$). Согласно (2.1), в рассматриваемом случае скорость потока в фиксированной точке однозначно связана с расходом, поэтому стационарные состояния фронта и их устойчивость к одномерным возмущениям, не искажающим форму фронта и течения, существенно зависят от условий подачи реакционной среды [15].

Если среда подается с постоянным расходом q , то $u(R) = q/2\pi R$ — монотонно убывающая функция (рис. 1, линия 1), и фронт имеет единственное стационарное состояние (точка S), определяемое радиусом

$$(2.4) \quad R^0 = q/2\pi U.$$

Данное стационарное состояние устойчиво относительно одномерных возмущений. Действительно, полагая в (2.3) $R = R^0 + R'$ (R' — малое возмущение) и линеаризуя полученное уравнение относительно R' , находим

$$(2.5) \quad \frac{dR'}{dt} = \left. \frac{du(R)}{dR} \right|_{R^0} R',$$

откуда $R' \sim \exp \omega t$, где

$$(2.6) \quad \omega = -q/2\pi(R^0)^2.$$

В случае источника $q > 0$, $\omega < 0$ и фронт устойчив (для стока, наоборот, неустойчив).

Если среда подается с постоянным перепадом давления $\Delta p = p_{10} - p_{20}$ между проницаемыми поверхностями, то, подставляя (2.1) в (1.3) и

Уравнения (1.1) и (1.2) с граничными условиями (1.3)—(1.9) определяют замкнутую постановку задачи. Существенно, что производная по времени в явном виде входит только в граничное условие (1.9). Это связано с тем, что в силу малости инерционных эффектов задача квазистационарна: фронт распространяется по данному полю скоростей с постоянной относительной скоростью U , а поля скоростей и давлений мгновенно подстраиваются под изменение положения фронта.

2. Рассмотрим стационарные состояния фронта и их устойчивость по отношению к одномерным возмущениям, не искажающим

(1.4) и исключая из полученных равенств и (2.2) p_1 , p_2 и q , находим

$$(2.7) \quad u(R) = \Delta p / (2\pi\sigma R + \Delta\mu/R), \quad \sigma = \sigma_1/2\pi R_1 + \sigma_2/2\pi R_2,$$

$$\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1.$$

Последняя зависимость (рис. 1, линия 2) немонотонна и имеет максимум $u_m = \Delta p / 4(\pi\sigma\Delta\mu)^{1/2}$ при $R = R_m = (\Delta\mu/\pi\sigma)^{1/2}$. Немонотонный характер зависимости связан с тем, что, с одной стороны, при увеличении R значение $u(R)$ должно уменьшаться за счет удаления от оси (см. (2.1)), а с другой — должен увеличиваться расход q за счет уменьшения гидравлического сопротивления фронта (см. (2.2)).

При $U > u_m$ фронт не имеет стационарных состояний: $dR/dt < 0$, и фронт сносится к оси. При $U < u_m$ существует два стационарных состояния (точки S_1 и S_2 на рис. 1), которые определяются радиусами

$$(2.8) \quad R_{1,2}^0 = (\Delta p \mp \sqrt{\Delta p^2 - 16\pi\Delta\mu U}) / 4\pi\sigma U.$$

Из (2.5) следует, что первое стационарное состояние неустойчиво к малым возмущениям радиуса фронта, а второе устойчиво, причем $R'_{1,2} \sim \sim \exp \omega_{1,2}t$, где

$$(2.9) \quad \omega_{1,2} = \frac{U}{R_{1,2}^0} \frac{\Delta\mu - \pi\sigma (R_{1,2}^0)^2}{\Delta\mu + \pi\sigma (R_{1,2}^0)^2}.$$

Критическое условие исчезновения стационарных состояний определяется равенством $U = u_m$ (точки S_1 и S_2 сливаются в точку S_{12} на рис. 1).

При произвольной характеристике насоса, подающего реакционную среду, зависимость $u(R)$ качественно имеет такой же вид, что и (2.7), все выводы о числе и устойчивости стационарных состояний остаются в силе [15].

3. Рассмотрим малые гидродинамические возмущения произвольной формы:

$$(3.1) \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}', \quad p = p^0 + p', \quad R = \bar{R}^0 + R',$$

где индексом 0 отмечены стационарные значения величин, штрихом — возмущения.

Уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3)—(1.6) линейны, поэтому подстановка (3.1) в эти равенства приводит их к равенствам относительно возмущений, по виду совпадающим с исходными. В частности, (1.3) и (1.4) принимают вид

$$(3.2) \quad (p'_{10} - p'_1)|_{R_1} = \sigma_1 u'_1|_{R_1};$$

$$(3.3) \quad (p'_2 - p'_{20})|_{R_2} = \sigma_2 u'_2|_{R_2}.$$

Проведем оценку p'_{10} и p'_{20} . В области за внешней граничной поверхностью (как и в области между граничными поверхностями) для возмущений имеем уравнение Стокса $\nabla p'_{20} = \mu_2 \nabla^2 \mathbf{V}'_{20}$. Из него с учетом неразрывности вектора скорости на проницаемой поверхности находим $p'_{20} \sim \sim \mu_2 u'_{20}(R_2)/\Delta_2$ (Δ_2 — линейный масштаб внешней области). Сравнивая последнюю оценку с (3.3), получаем соотношение

$$(3.4) \quad p'_{20}(R_2)/(p'_2(R_2) - p'_{20}(R_2)) \sim \mu_2/\sigma_2 \Delta_2 = H_2,$$

показывающее, что проникновение возмущений давления во внешнюю область определяется отношением величины μ_2/Δ_2 , которую можно рассматривать как сопротивление внешней области, к сопротивлению граничной поверхности σ_2 . Параметр H_2 представляет собой гидравлический аналог числа Био, которое, как известно, определяется отношением теплового сопротивления области Δ/λ к тепловому сопротивлению ее границы $1/\alpha$ (λ — теплопроводность среды, α — коэффициент теплоотдачи).

Вообще говоря, течение во внешней области всегда влияет на течение во внутренней и, в частности, искажает рассмотренные в н. 2 стационарные состояния (исключение представляет случай, когда внешняя область не ограничена и течение в ней радиально и осесимметрично). Оценки, аналогичные (3.4), проведенные для стационарных состояний, показывают, что эти искажения также определяются параметром H_2 . Для практики представляют интерес малые H_2 , когда искажения стационарных состояний малы (возмущения давлений, согласно (3.4), при этом локализуются во внутренней области). Тогда равенство (3.4) может быть переписано в виде $p'_2(R_2) = [1 + O(H_2)]\sigma_2 u'_2(R_2)$, который показывает, что проникновение возмущений давления во внешнюю область качественно соответствует росту сопротивления граничной поверхности на величину порядка H_2 . В нулевом приближении по H_2 имеем

$$(3.5) \quad p'_2(\tilde{R}_2) = \sigma_2 u'_2(R_2).$$

Для внутренней граничной поверхности аналогичные рассуждения приводят к равенству

$$(3.6) \quad p'_1(R_1) = -\sigma_1 u'_1(R_1).$$

Отметим, что (как показано ниже) увеличение сопротивления граничной поверхности может только стабилизировать фронт, поэтому если исследование устойчивости фронта, проведенное на основе (3.5) и (3.6), показывает, что фронт устойчив, то он тем более будет устойчив при использовании (3.2) и (3.3).

Подставим (3.1) в условия на фронте (1.7)–(1.9) и линеаризуем полученные равенства относительно малых возмущений. При линеаризации учитываем осевую симметрию невозмущенного течения, а также соотношение

$$(3.7) \quad F|_R = (F^0 + F')|_{R^0+R'} = \bar{F}^0|_{R^0} + F'|_{R^0} + \nabla F^0|_{R^0} \cdot \mathbf{n}' + \dots,$$

где F — произвольная гидродинамическая величина; \mathbf{n}' — малый вектор, определяющий возмущение поверхности фронта.

После преобразований

$$(3.8) \quad \mathbf{V}'_1|_{R^0} = \mathbf{V}'_2|_{R^0};$$

$$(3.9) \quad \mathbf{P}'_1|_{R^0} \cdot \mathbf{n}^0 + \mathbf{P}'_1|_{R^0} \cdot \nabla R' = 4\mu_1 U R' \mathbf{n}^0 / (R^0)^2 = \mathbf{P}'_2|_{R^0} \cdot \mathbf{n}^0 + \mathbf{P}'_2|_{R^0} \cdot \nabla R' - 4\mu_2 U R' \mathbf{n}^0 / (R^0)^2;$$

$$(3.10) \quad \partial R' / \partial t + \mathbf{V}'|_{R^0} \cdot \mathbf{n}^0 + U R' / R^0 = 0.$$

В дальнейшем ограничимся случаем угловых возмущений ($w'_1 = w'_2 = 0$, $\partial/\partial z = 0$) и перейдем к безразмерным переменным, относя время, длины, скорости и давления к их масштабам, в качестве которых выбираем соответственно R^0/U , R^0 , U и $\mu_2 U/R^0$ (безразмерные переменные обозначим так же, как их размерные аналоги). Решение линеаризованной задачи ищем в виде

$$(3.11) \quad (u'_1, v'_1, p'_1, u'_2, v'_2, p'_2, R') = (A_1, B_1, e^{-x} C_1 / \varepsilon, A_2, B_2, e^{-x} C_2, D) \times \exp(-\omega t + ik\varphi).$$

Здесь $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ — функции переменной $x = \ln r$; $\varepsilon = \mu_1/\mu_2$; ω — инкремент возмущений; k — волновое число (целое); i — мнимая единица. Произвольные угловые возмущения могут быть разложены в ряд по гармоникам (3.11).

Тогда уравнения для возмущений приводятся к линейной системе с постоянными коэффициентами:

$$(3.12) \quad A''_{1,2} - (1 + k^2) A_{1,2} - 2ikB_{1,2} - C'_{1,2} - C_{1,2} = 0;$$

$$(3.13) \quad 2ikA_{1,2} + B''_{1,2} - (1 + k^2) B_{1,2} - ikC_{1,2} = 0;$$

$$(3.14) \quad A'_{1,2} + A_{1,2} + ikB_{1,2} = 0,$$

а граничные условия для них:

$$(3.15) \quad H_{1,2}C_{1,2}(x_{1,2}) = \mp A_{1,2}(x_{1,2});$$

$$(3.16) \quad B_{1,2}(x_{1,2}) = 0;$$

$$(3.17) \quad A_1(0) = A_2(0);$$

$$(3.18) \quad B_1(0) = B_2(0);$$

$$(3.19) \quad \varepsilon [C_1(0) - 2A'_1(0) - 4D] = C_2(0) - 2A'_2(0) - 4D;$$

$$(3.20) \quad \varepsilon [B_1(0) - B'_1(0) - ikA_1(0) + 4ikD] = B_2(0) - B'_2(0) - ikA_2(0) + 4ikD;$$

$$(3.21) \quad (\omega + 1)D - A_1(0) = 0$$

(штрихом обозначено дифференцирование по x).

Интегрируя систему (3.12)–(3.14), находим

$$(3.22) \quad A_{1,2} = a_{1,2}e^{\lambda_1 x} + b_{1,2}e^{\lambda_2 x} + c_{1,2}e^{\lambda_3 x} + d_{1,2}e^{\lambda_4 x};$$

$$(3.23) \quad kB_{1,2} = -i [a_{1,2}ke^{\lambda_1 x} + b_{1,2}(k-2)e^{\lambda_2 x} - c_{1,2}ke^{\lambda_3 x} - d_{1,2}(k+2)e^{\lambda_4 x}];$$

$$(3.24) \quad C_{1,2} = 4 [b_{1,2}(k-1)e^{\lambda_2 x} + d_{1,2}(k+1)e^{\lambda_4 x}]$$

($\lambda_1 = -\lambda_4 = -(k+1)$, $\lambda_2 = -\lambda_3 = 1 - k$ — корни характеристического уравнения системы). При $k = 1$ (первая гармоника) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — кратные корни, а решение системы запишется так:

$$(3.25) \quad A_{1,2} = a_{1,2}e^{2x} + b_{1,2}e^{-2x} + c_{1,2}x + d_{1,2};$$

$$(3.26) \quad B_{1,2} = i[3a_{1,2}e^{2x} - b_{1,2}e^{-2x} + c_{1,2}(x+1) + d_{1,2}],$$

$$(3.27) \quad C_{1,2} = 8a_{1,2}e^{2x} - 2c_{1,2}.$$

Подставляя решения (3.22)–(3.27) в граничные условия (3.15)–(3.21), имеем систему девяти линейных однородных уравнений относительно коэффициентов $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ и D . Условием существования ненулевого решения системы является равенство нулю ее определителя:

$$(3.28) \quad \Delta(F_{mn}) = 0,$$

где F_{mn} — элемент определителя, находящийся в m -й строке и n -м столбце ($m = 1-9$, $n = 1-9$):

$$\begin{aligned} F_{11} = F_{21} = R_1^{-k-1}, \quad F_{12} = R_1^{-k+1} [1 + 4H_1(k-1)/k], \\ F_{13} = -F_{23} = R_1^{k-1}, \\ F_{14} = R_1^{k+1} [1 + 4H_1(k+1)/k], \quad F_{22} = R_1^{-k+1} (k-2)/k, \\ F_{24} = -R_1^{k+1} (k+2)/k, \\ F_{35} = F_{45} = R_2^{-k-1}, \quad F_{36} = R_2^{-k+1} [1 - 4H_2(k-1)/k], \quad F_{37} = -F_{47} = R_2^{k-1}, \\ F_{38} = R_2^{k+1} [1 - 4H_2(k+1)/k], \quad F_{46} = R_2^{-k+1} (k-2)/k, \\ F_{48} = -R_2^{k+1} (k+2)/k, \\ F_{51} = F_{52} = F_{54} = F_{53} = F_{61} = F_{67} = F_{77} = F_{78} = F_{95} = \\ = F_{96} = F_{97} = F_{98} = F_{99} = 1, \\ F_{55} = F_{56} = F_{57} = F_{58} = F_{63} = F_{65} = F_{75} = F_{76} = -1, \\ F_{71} = F_{72} = \varepsilon, \quad F_{73} = F_{74} = -\varepsilon, \\ F_{81} = F_{84} = \varepsilon(k+1)/k, \quad F_{82} = F_{83} = \varepsilon(k-1)/k, \\ F_{85} = F_{88} = -(k+1)/k, \quad F_{86} = F_{87} = -(k-1)/k, \\ F_{89} = 2(1 - \varepsilon), \quad F_{99} = -(\omega + 1) \end{aligned}$$

(остальные элементы определителя нулевые). При $k = 1$ часть элементов определителя имеет вид $F_{12} = \ln R_1 - 2H_1$, $F_{32} = -(\ln R_1 + 1)$, $F_{36} = \ln R_2 + 2H_2$, $F_{46} = -(\ln R_2 + 1)$, $F_{52} = F_{56} = F_{71} = F_{73} = F_{74} = F_{75} = F_{77} = F_{78} = F_{96} = 0$, $F_{72} = -\varepsilon$, $F_{76} = 1$.

4. Уравнение (3.28) задает зависимость инкремента ω от шести безразмерных параметров: R_1 , R_2 , H_1 , H_2 , ε , k . Раскладывая определитель (3.28) по строкам, содержащим члены порядка ε , получим

$$(4.1) \quad \omega(\varepsilon) = (P_0 \varepsilon + P_1 \varepsilon^2 + P_2 \varepsilon^3) / (Q_0 + Q_1 \varepsilon + Q_2 \varepsilon^2).$$

Здесь коэффициенты P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 зависят от параметров R_1 , R_2 , H_1 , H_2 , k , а коэффициенты P_0 , Q_0 — только от R_2 , H_2 , k :

$$(4.2) \quad P_0 = [1 + 2(k+1)H_2]R_2^{2k} - [k^2 - 4(k^2 - 2)H_2]R_2^2 + 2(1+k^2)(1-2H_2) - k^2R_2^{-2} + [1 - 2(k-1)H_2]R_2^{-2k};$$

$$(4.3) \quad Q_0 = [1 + 2(k+1)H_2]R_2^{2k} + [k^2 - 4(k^2 - 2)H_2]R_2^2 + 2(1-k^2)(1-2H_2) + k^2R_2^{-2} + [1 - 2(k-1)H_2]R_2^{-2k}.$$

На рис. 2 в плоскости параметров R_2 , H_2^{-1} приведены сплошные и штриховые кривые, на которых соответственно P_0 и Q_0 обращаются в нуль (числами у кривых отмечены номера гармоник). Видно, что в физической области изменения параметров ($R_2 > 1$, $H_2 > 0$) Q_0 нигде не обращается в нуль, при этом малый параметр ε вносит в (4.1) регулярное возмущение. В нулевом приближении по ε инкремент ω зависит только от параметров с индексом 2, и, следовательно, устойчивость фронта с точностью до членов порядка ε определяется характеристиками течения после фронта.

Регулярность решения по ε обусловлена тем, что в линейном приближении по малым возмущениям неравенство скоростей потока и фронта «компенсируется» изменением расстояния фронта от источника и не связано с его поворотом (в линеаризованном законе Михельсона (3.10) отсутствуют производные $\partial R'/\partial \varphi$, $\partial R'/\partial z$). В этом приближении фронт ориентирован нормально к линиям тока, а возмущения скорости и их градиенты имеют порядок единицы во всей области течения (в безразмерных переменных). Условие равенства напряжений на фронте приводит к тому, что возмущения напряжений на фронте имеют порядок ε .

Как известно, в задаче о течении в каналах в присутствии фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости, малый параметр ε вносит в решение сингулярное возмущение [10]. В этом случае неравенство скоростей потока и фронта «компенсируется» поворотом фронта на угол, обеспечивающий равенство проекций указанных скоростей на нормаль к фронту. Фронт ориентируется под малым углом к линиям тока, а скорость и ее градиент имеют порядок единицы только в области течения после фронта. Существенно, что напряжение на фронте здесь также порядка единицы. Из условия равенства напря-

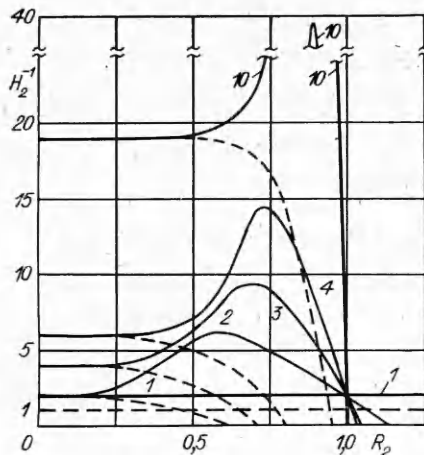


Рис. 2

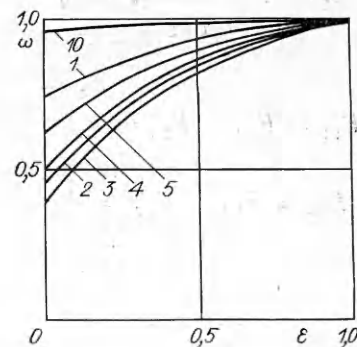


Рис. 3

жений на фронт следует, что градиент скорости в области до фронта порядка $1/\varepsilon$, что и приводит к появлению сингулярности.

Зависимость инкремента от различных параметров исследована численно. На рис. 3 приведена зависимость $\omega(\varepsilon)$ при $R_1 = 0,28$, $R_2 = 1,5$, $H_1 = H_2 = 0,01$ (числами у кривых отмечены номера гармоник k). Видно, что $\omega > 0$ для всех гармоник при любом значении ε и фронт устойчив. По мере уменьшения вязкости продукта (увеличение ε) скорость затухания возмущений повышается. При равных вязкостях продукта и исходной смеси ($\varepsilon = 1$) возмущения всех длин волн затухают с одинаковой скоростью (отсутствует дисперсия). Это связано с тем, что возмущения формы фронта не приводят к возмущению гидродинамических полей.

При полимеризации вязкость продукта на 4—6 порядков превосходит вязкость исходной смеси, поэтому в (4.1) можно ограничиться нулевым приближением по ε . В этом приближении сплошные линии на рис. 2 отвечают $\omega = 0$, а штриховые — $\omega^{-1} = 0$ и делят плоскость параметров на области постоянного знака ω . При заданном k коэффициент $P_0 > 0$ в области, лежащей выше k -й сплошной кривой, а $Q_0 > 0$ — в области, лежащей выше k -й штриховой. Область неустойчивости k гармоники ($\omega < 0$), таким образом, заключена между соответствующими сплошной и штриховой линиями. Видно, что в физической области изменения параметров фронт неустойчив в полосе, ограниченной прямыми $H_2^{-1} = 0$, $H_2^{-1} = 2$. Здесь неустойчива первая гармоника. Высшие гармоники теряют устойчивость в малых участках полосы, ограниченных сверху соответствующими сплошными линиями. Эти участки отвечают близости параметра R_2 к единице и, следовательно, расположению фронта вблизи наружной граничной поверхности.

Таким образом, фронт теряет устойчивость только при малом сопротивлении внешней граничной поверхности. Такой результат имеет простой физический смысл. В пренебрежении инерционными эффектами в линейном приближении по малым возмущениям устойчивость фронта определяется соотношением локальной скорости потока в месте расположения возмущенного фронта и собственной скорости его распространения. При смещении фронта от стационарного положения в направлении от оси скорости потока в новом месте его положения, с одной стороны, имеет тенденцию к уменьшению за счет удаления от источника, а с другой — тенденцию к увеличению за счет уменьшения эффективного сопротивления фронта при росте его радиуса (см. (2.2)). Если сопротивление внешней граничной поверхности велико в сравнении с сопротивлением фронта ($H_2 \ll 1$), то оно «гасит» вторую тенденцию и фронт устойчив. При уменьшении сопротивления вторая тенденция начинает преобладать и фронт теряет устойчивость (аналогичные выводы справедливы при смещении фронта в направлении оси).

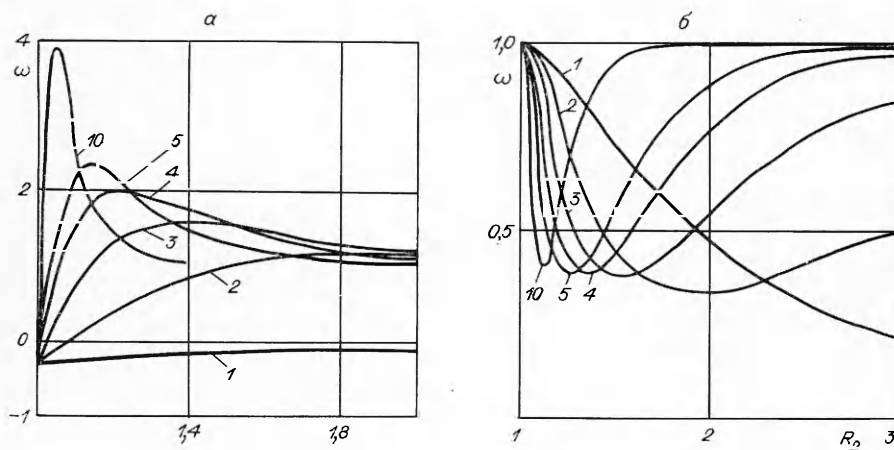


Рис. 4

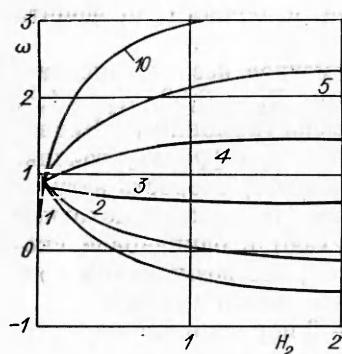


Рис. 5

Пример зависимости инкремента ω от R_2 при различных значениях k (отмечены числами у кривых) в области неустойчивости фронта ($H_2 = 1$) приведен на рис. 4, а, а в области абсолютной устойчивости ($H_2 = 10^{-4}$) — на рис. 4, б. Значения R_2 , при которых ω обращается в нуль (а), совпадают с абсциссами точек пересечения сплошных линий с прямой $H_2^{-1} = 1$ на рис. 2.

Зависимость ω от H_2 при $R_2 = 1,5$ и различных значениях k представлена на рис. 5. Видно, что для гармоник, которые могут потерять устойчивость ($k = 1; 2$), ω с ростом H_2 уменьшается, поэтому увеличение сопротивления поверхности (уменьшение H_2) может привести только к стабилизации фронта.

При малых R_1 и больших R_2 граничные поверхности слабо влияют на течение в окрестности фронта, в пределе при $R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow \infty$ зависимость (4.1) вырождается в тривиальное равенство $\omega = -1$. При этом инкремент ω перестает зависеть не только от параметров R_1, R_2, H_1 и H_2 , характеризующих свойства граничных поверхностей, но и от ε и k , т. е. возмущения всех длин волн затухают с одинаковой скоростью. Полученный результат показывает, что в рассматриваемом случае цилиндрического фронта дисперсия возмущений обусловлена влиянием граничных поверхностей.

Отметим, что при $k \neq 0$ гармонические возмущения не изменяют суммарного расхода реакционной среды ($\int_0^{2\pi} e^{2k\varphi} d\varphi = 0$), поэтому устойчивость фронта к ним не зависит от условий ее подачи. При $k = 0$ (одномерные возмущения) устойчивость фронта, наоборот, определяется этими условиями (см. п. 2). В частности, случай подачи реакционной среды с постоянным перепадом давления формально соответствует использованию равенств (3.5) и (3.6) (в которых возмущениями давлений во внешних областях пренебрегается), поэтому формула (2.9) в безразмерном виде совпадает с (4.1) при $k = 0$.

Литература

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. К теории медленного горения // ЖЭТФ.— 1944.— Т. 14, № 6.
2. Einbinder Н. The hydrodynamic stability of flame fronts // J. Chem. Phys.— 1953.— V. 21.— P. 480.
3. Ягодкин В. И. Об устойчивости разрывного фронта пламени в вязкой среде // Изв. АН СССР. ОТН.— 1955.— № 7.
4. Левич В. Г. К вопросу об устойчивости фронта пламени при медленном горении жидкостей // ДАН СССР.— 1956.— Т. 109, № 5.
5. Истратов А. Г., Либрович В. Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени // ПММ.— 1966.— Т. 30, № 3.
6. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости распространения сферического пламени // ПМТФ.— 1966.— № 1.
7. Markstein G. И. Experimental and theoretical studies of flame front stability // J. Aeronaut. Sci.— 1951.— V. 18, N 3.
8. Бостанджиян С. А., Болрченко В. И. и др. Низкотемпературные режимы полимеризации в проточном реакторе // ПМТФ.— 1979.— № 1.
9. Ваганов Д. А. Стационарное течение реагирующей жидкости с меняющимися с глубиной превращения свойствами // ПМТФ.— 1984.— № 1.
10. Жижин Г. В., Сегаль А. С. Стационарные течения в каналах при автоволновом распространении химической реакции с резким изменением вязкости // ПМТФ.— 1986.— № 1.
11. Sala B., Valz-Gris F., Zanderighi L. A fluid-dynamic study of a continuous polymerization reactor // Chem. Engng Sci.— 1974.— V. 29, N 11.
12. Гришин А. М., Немировский В. Б. Нестационарное течение и теплообмен полимеризующихся жидкостей в длинном трубчатом реакторе // ПМТФ.— 1985.— № 1.

13. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
14. Кибель И. А., Кочин К. Е., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.— Т. 1, 2.
15. Жижин Г. В., Сегаль А. С. и др. О стационарных состояниях сферического и цилиндрического фронта реакции в жидкости с переменной вязкостью // Кинетика и катализ.— 1986.— № 6.

Поступила 22/XII 1986 г.

УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ЗОННОЙ ПЛАВКИ

Б. М. Анисютин

(Новокузнецк)

Метод плавающей зоны — наиболее распространенный бестигельный метод очистки материалов и выращивания монокристаллов. Механика процесса очистки материала состоит в том, что на начальном этапе проводят расплавление некоторого внутреннего участка вертикального цилиндрического стержня заготовки, а на втором этапе медленно перемещают расплавленную зону вдоль стержня. Процесс выращивания монокристаллов сходен с процессом очистки, только на начальном этапе производят расплав не внутреннего, а концевого участка очищенного стержня, который затем приводят в соприкосновение с монокристаллической «затравкой» данного вещества. При теоретическом изучении можно условно выделить три аспекта данной задачи: устойчивость расплава, гидродинамические явления в плавающей зоне и теплообмен в системе при отсутствии конвекции в расплаве. При исследовании первых двух направлений авторы обычно предполагают, что априорно известны распределение температуры и положение границы расплава [1—3]. Таким образом, чтобы правильно сформулировать гидродинамические задачи и задачи устойчивости, необходимо знать геометрические характеристики расплавленной зоны и распределение температуры в образце.

Для решения возникающей задачи Стефана в настоящее время используется достаточно много различных методов. Но специфика зонной плавки заключается в том, что перемещение расплавленной зоны чрезвычайно медленное (порядка 1 см/ч) и им можно пренебречь. В этом случае удается существенно снизить объем вычислений, поскольку после преобразования Кирхгофа задача со свободной границей переходит в краевую задачу для уравнения Лапласа в известной области. Такой подход к решению стационарной задачи Стефана впервые применен в [4], где численно определялись распределение температуры и форма фронтов фазового перехода при следующих предположениях: 1) система находится в установившемся состоянии, границы расплава неподвижны, температура зависит только от двух переменных (радиуса и продольной координаты); 2) в расплаве отсутствует конвекция; 3) стержень находится в вакууме; 4) физические свойства каждой фазы не зависят от температуры; 5) свободная поверхность жидкой фазы цилиндрическая; 6) оба конца стержня теплоизолированы.

В настоящей работе в предположениях 1—4 численно исследуется осесимметричная стационарная задача о нахождении распределения температуры и положения границы раздела фаз. Дополнительная по сравнению с [4] трудность связана с тем, что боковая поверхность жидкой фазы считается свободной и зависит от капиллярных сил [2].

На торцах слитка задается новое краевое условие, моделирующее прикрепление образца к теплопроводным стержням. В частности, оно позволяет сократить объем вычислений, если ввести фиктивные границы и рассматривать внутренний более короткий участок слитка, прикрепленный к стержням из того же материала.

Получены следующие результаты: определены критические мощности внешнего источника тепла, при которых образуется область расплава, возникает жидкий мост, фронты фазового перехода становятся практически плоскими; изучена структура границ раздела фаз в зависимости от мощности и способа фокусировки источника тепла. Выявлена сильная зависимость границы раздела фаз от параметров задачи в случае малых размеров расплавленной зоны.

1. Постановка задачи. Рассматривается осесимметричный образец $\omega = \{(r, z) | 0 < r < g(z), d_1 < z < d_2\}$ длиной $l = d_2 - d_1$, в котором присутствуют две фазы: жидкая ω^+ , где температура T выше температуры плавления T_* , и твердая ω^- , где $T < T_*$. Предполагается, что $T(r, z)$ зависит только от двух переменных: радиуса r и координаты z , направленной вдоль оси симметрии, и в каждой фазе удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.1) \quad \Delta T = 0 \text{ в } \omega^\pm.$$