

где M_∞ — число Маха потока при $\varepsilon = 0$; γ — постоянная адиабаты. На фигуре показаны результаты расчетов, полученных на ЭВМ В. Н. Макаровым (штриховые линии) и по формулам (3) — (8) (сплошные линии) для одного и того же режима течения. Начальные данные следующие: смесь 15% $\text{CO}_2 + 83\% \text{N}_2 + 2\% \text{H}_2\text{O}$, в форкамере сопла $p = 15$ атм, $T = 2060$ К, на входе в резонатор $u_\infty = 2 \cdot 10^5$ см/с, $p_\infty/p = 10^{-4}$, $\rho_\infty/\rho = 5 \cdot 10^{-3}$, $T_\infty = 393$ К, $k_\infty = 0,004809$ см $^{-1}$, в резонаторе $k^* = 0,000799$ см $^{-1}$, $d = 80$ см, $L = 30$ см, $t = 0,1$, $\alpha = 0,02$ на два прохода луча, отношение высоты выхода сопла к критической $S_1 = 53,83$. В рамках исследуемых моделей [1—6] соответствие следует считать удовлетворительным. При расчетах профилей температур T_1 , T_3 использовались константы скоростей, полученные на основе работы [11].

Автор выражает благодарность В. Н. Макарову за предоставление расчетных данных для сравнения и полезное обсуждение.

Поступила 17 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Генералов И. А., Козлов Г. И., Селезнева И. К. Расчет характеристик газодинамического лазера. — ПМТФ, 1972, № 5.
2. Лосев С. А., Макаров В. Н. О мощностях газодинамического лазера при высоком давлении. — ПМТФ, 1975, № 4.
3. Cool T. A. Power and gain characteristic of high speed flow lasers. — J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, N 9.
4. Микаэля А. Л., Минаев В. П., Обод Ю. А., Гурков Ю. Г. О характеристиках лазера на двуокиси углерода с поперечной прокачкой, работающей в режиме усиления. — Квант. электроника, 1974, № 5.
5. Конохов В. К. Газодинамические CO_2 -лазеры. Препринт ФИАН, № 141, 1976.
6. Анашкин А. И. О расчете электрических характеристик проточных газовых лазеров. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. общ. техн., 1976, № 1.
7. Кузнецов В. М. Инверсия населенностей колебательных уровней молекул около тел при гиперзвуковом обтекании. — Учен. зап. ЦАГИ, 1973, т. 5, № 6.
8. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. М., Наука, 1977.
9. Кузнецов В. М. О колебательной релаксации многоатомных молекул в поле монохроматического излучения за фронтом ударной волны. — ПМТФ, 1977, № 1.
10. Жигулев В. Н. К вопросу о течении неравновесного газа. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 6.
11. Taylor R. L., Bitterman S. Survey of vibrational relaxation data for processes important in the $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ laser system. — Rev. Mod. Phys., 1969, vol. 41, N 1.

УДК 541.124 : 532.5

О СТРУКТУРЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЗОН ПОЗАДИ УДАРНОГО ФРОНТА В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ

А. Л. Ни, О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются вещества с произвольным числом химических реакций в предположении, что замороженная и равновесная скорости звука близки по своей величине. Скорость набегающего потока считается больше скорости распространения малых колебаний в смеси с замороженным составом. При этом условии границей невозмущенного течения служит ударный фронт, за которым расположены релаксационные зоны. При помощи метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений изучается, как изменяется их структура с увеличением скорости потока на бесконечности.

1. Исходные уравнения. Используем индекс ∞ для характеристики вещества в невозмущенном состоянии. Будем считать, что замороженная $a_{f\infty}$ и равновесная $a_{e\infty}$ скорости звука близки по величине, а их разность

3 ПМТФ, № 1, 1980 г.

пропорциональна малому параметру ε_a^2 . Пусть скорость v_∞ набегающего потока несильно отклоняется от любой из так называемых промежуточных $\alpha_{k\infty}$ скоростей распространения акустических волн. Задавая это отклонение числами $\gamma^{(k)}$, имеем

$$(1.1) \quad v_\infty - \alpha_{k\infty} = \varepsilon_a^2 \gamma^{(k)} v_\infty.$$

В смеси, в которой может одновременно протекать N реакций, индекс k пробегает значения $0, 1, \dots, N$. Промежуточные скорости звука подчиняются неравенствам [1—3]

$$(1.2) \quad a_{e\infty} = \alpha_{0,\infty} < \alpha_{1,\infty} < \dots < \alpha_{N-1,\infty} < \alpha_{N,\infty} = a_{f\infty}.$$

В предельных случаях $k = 0$ и $k = N$ постоянные $\gamma^{(0)} = \gamma_e$ и $\gamma^{(N)} = \gamma_f$.

Для изучения релаксационных зон, расположенных позади слабого ударного фронта в многокомпонентной смеси, воспользуемся системой уравнений, которая описывает стационарный одномерный поток в трансзвуковом диапазоне скоростей [4]:

$$(1.3) \quad 2 \left(\varepsilon m_\infty v' + \varepsilon_a^2 \gamma_f \right) \frac{dv'}{dx'} = \delta_a^2 e_2' \frac{dq_2'}{dx'}, \quad \delta_a^2 = \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \varepsilon_a^2, \quad \frac{d\alpha_{i2}'}{dx'} = -E \omega_2',$$

$$\omega_2' = D q_2' + e_2' v'.$$

Координата x' вместе с искомыми скоростью v' возмущенного движения частиц и компонентами векторов $q_2' = (q_{21}', \dots, q_{2N}')$ и $\omega_2' = (\omega_{21}', \dots, \omega_{2N}')$ полноты и сродства химических реакций берется здесь в специальной безразмерной системе единиц. Буквами ρ, p и m обозначены соответственно плотность, давление и безразмерный термодинамический коэффициент, пропорциональный кривизне адиабаты Пуассона для смеси с постоянным составом. Малый параметр ε является мерой амплитуды возмущений.

В исходных уравнениях Эйлера в качестве кинетической матрицы и матрицы устойчивости системы могут фигурировать любые положительно определенные и симметричные матрицы. Линейные преобразования векторов полноты и сродства химических реакций позволяют привести названные матрицы соответственно к единичной E и диагональной D матрицам. В системе уравнений (1.3) это преобразование считается выполненным. Компоненты постоянного вектора $e_2' = (e_{21}', \dots, e_{2N}')$, которые вычисляются через адиабатические производные от удельной внутренней энергии системы по удельному объему и одной из составляющих вектора полноты реакций, также полагаются подвергшимися указанным линейным преобразованиям.

Пусть координата ударного фронта будет $x' = 0$. Впереди него набегающий поток остается равномерным и находится в состоянии полного термодинамического равновесия, т. е. $v' = 0, q_2' = 0$ при $x' < 0$. В процессе ударного сжатия состав смеси не успевает измениться. Обозначив разность каких-либо параметров газа до и позади скачка уплотнения квадратными скобками, имеем $[q_{2i}'] = 0, i = 1, \dots, N$.

Изменение скорости при переходе через ударный фронт можно вычислить следующим образом. Результат интегрирования первого из уравнений (1.3) гласит

$$\frac{1}{\varepsilon m_\infty} (\varepsilon m_\infty v' + \varepsilon_a^2 \gamma_f)^2 = \delta_a^2 e_2' q_2' + C,$$

где C — произвольная постоянная. Применяя полученное равенство к точкам, расположенным по разные стороны поверхности разрыва, находим $[(\varepsilon m_\infty v' + \varepsilon_a^2 \gamma_f)^2] = 0$.

Начальные данные для интегрирования системы уравнений (1.3) приобретают вид

$$(1.4) \quad v' = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma_f}{\varepsilon m_\infty}, \quad q'_{2i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \text{ при } x' = 0.$$

По теореме Цемплена скорость газа в результате ударного сжатия уменьшается, поэтому за поверхностью разрыва $v' < 0$. Последнему требованию можно удовлетворить, если $\gamma_f > 0$. На основании определения (1.1) приходим к известному заключению, что ударные волны образуются, когда скорость потока превосходит не только равновесную, но и замороженную скорости звука.

После сжатия внутри релаксационных зон газовая смесь достигает нового равновесного состояния, отсюда

$$(1.5) \quad v' \rightarrow v'_0, \quad \frac{dv'}{dx'} \rightarrow 0, \quad \frac{dq'_2}{dx'} \rightarrow 0 \text{ при } x' \rightarrow \infty.$$

Значение $C = \varepsilon_a^4 \gamma_f^2 / (\varepsilon m_\infty)$ постоянной интегрирования получается таким же, как и для непрерывных течений, которые осуществляются, если скорость набегающего потока лежит в диапазоне между равновесной и замороженной скоростями звука. Воспользовавшись предельными условиями (1.5), выводим связь [5]

$$v'_0 = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma_e}{\varepsilon m_\infty}$$

между скоростью частиц после их прохождения через релаксационные зоны и коэффициентами γ_e либо γ_f .

2. Промежуточные скорости звука. Для промежуточных скоростей распространения малых колебаний верна формула [1-3]

$$(2.1) \quad \alpha_{k\infty} = a_{f\infty} + \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{m=k+1}^N (-1)^{m-k} \frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-k}} \mathbf{e}'_2 \mathbf{D}^{m-k-1} \mathbf{e}'_2.$$

Здесь символ σ_l означает сумму всевозможных произведений, которые составлены из положительных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, равных соответственно диагональным элементам d_{11}, \dots, d_{NN} релаксационной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{D} = \mathbf{D}$ и взятых по l в каждом произведении.

Введем вспомогательную диагональную матрицу

$$\bar{\mathbf{D}}^{(k)} = \sum_{m=k+1}^N (-1)^{m-k} \frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-k}} \mathbf{D}^{m-k-1}$$

с элементами

$$\bar{d}_{ii}^{(k)} = \sum_{m=k+1}^N (-1)^{m-k} \frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-k}} \lambda_i^{m-k-1} = -\frac{\sigma_{N-k-1}^{(i)}}{\sigma_{N-k}},$$

где верхний индекс (i) у суммы $\sigma_{N-k-1}^{(i)}$ указывает, что из полного набора входящих в нее характеристических чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ исключается λ_i .

Предположим, как это часто случается с реальными химически активными системами, что все релаксационные процессы можно разбить на две группы. Пусть одну из них образуют M медленных реакций, а остальные $N - M$ реакций являются быстрыми. Тогда

$$(2.2) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{N-M} \gg \lambda_{N-M+1}, \dots, \lambda_N.$$

Приближенное выражение для M -й промежуточной скорости звука имеет вид [6]

$$(2.3) \quad \alpha_{M\infty} = a_{f\infty} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{l=1}^{N-M} \frac{e'_{2l}}{\lambda_l},$$

если каждое из отношений e'_{2i}/λ_i , $i = 1, \dots, N$ по порядку величины сравнимо с единицей.

Найдем асимптотические выражения, определяющие другие скорости распространения малых возмущений. Рассмотрим случай $k > M$. Главные члены элементов вспомогательной матрицы $\mathbf{D}^{(k)}$ будут

$$d_{ii}^{(k)} = - \frac{\sigma_{N-k-1}^{(i, N-M+1, \dots, N)}}{\sigma_{N-k}^{(N-M+1, \dots, N)}} \quad \text{при } 1 \leq i \leq N-M,$$

$$d_{ii}^{(k)} = - \frac{\sigma_{N-k-1}^{(N-M+1, \dots, N)}}{\sigma_{N-k}^{(N-M+1, \dots, N)}} \quad \text{при } N-M+1 \leq i \leq N.$$

Подстановка этих равенств в формулу (2.1) дает

$$(2.4) \quad \alpha_{k\infty} = a_{f\infty} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{l=1}^{N-M} e'_{2l} \frac{\sigma_{N-k-1}^{(l, N-M+1, \dots, N)}}{\sigma_{N-k}^{(N-M+1, \dots, N)}}.$$

Можно видеть, что полученное соотношение совпадает с исходным, если собственные числа λ_i ($i = N-M+1, \dots, N$) формально положены равными нулю. Таким образом, k -ю промежуточную скорость звука при $k > M$ можно вычислять по точной формуле (2.1), полагая замороженными все медленно протекающие реакции.

Когда, наоборот, $k < M$, упрощенные выражения для элементов вспомогательной матрицы $\mathbf{D}^{(k)}$ записываются в виде

$$d_{ii}^{(k)} = - \frac{1}{\lambda_i} \quad \text{при } 1 \leq i \leq N-M,$$

$$d_{ii}^{(k)} = - \frac{\sigma_{M-k-1}^{(1, \dots, N-M, i)}}{\sigma_{M-k}^{(1, \dots, N-M)}} \quad \text{при } N-M+1 \leq i \leq N.$$

В рассматриваемом случае из формулы (2.1) следует

$$\alpha_{k\infty} = a_{f\infty} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{l=1}^{N-M} \frac{e'_{2l}}{\lambda_l} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{l=N-M+1}^N e'_{2l} \frac{\sigma_{M-k-1}^{(1, \dots, N-M, l)}}{\sigma_{M-k}^{(1, \dots, N-M)}}.$$

Из определения (2.3)

$$(2.5) \quad \alpha_{k\infty} = \alpha_{M\infty} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{l=N-M+1}^N e'_{2l} \frac{\sigma_{M-k-1}^{(1, \dots, N-M, l)}}{\sigma_{M-k}^{(1, \dots, N-M)}}.$$

Последнее равенство вполне аналогично исходному, но в нем роль замороженной принадлежит M -й промежуточной скорости распространения акустических волн. В связи с этим при составлении сумм $\sigma_{N-k}^{(1, \dots, N-M)}$ и $\sigma_{M-k-1}^{(1, \dots, N-M, l)}$ не используются собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-M}$, которые относятся к быстрым релаксационным процессам, хотя на первый взгляд полученный результат кажется парадоксальным.

В дальнейшем будут употребляться более сильные по сравнению с (2.2) неравенства

$$(2.6) \quad \lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \dots \gg \lambda_{N-1} \gg \lambda_N.$$

Что касается предположения $e'_{2i}/\lambda_i \sim 1$, $i = 1, \dots, N$, то оно считается сохраняющим свою силу. Неравенства (2.6) характеризуют системы, в которых скорости всех релаксационных процессов различаются по порядку величины. Такого рода системы также часто встречаются на практике.

Ясно, что теперь M -я скорость не должна играть особой роли среди других промежуточных скоростей звука. Действительно, для входящих в правую часть формулы (2.4) сумм верны асимптотические оценки

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{N-k-1}^{(i, N-M+i, \dots, N)} &\sim \lambda_1 \dots \lambda_{l-1} \lambda_{l+1} \lambda_{N-k} \text{ при } 1 \leq l \leq N-k-1, \\ \sigma_{N-k-1}^{(l, N-M+1, \dots, N)} &\sim \lambda_1 \dots \lambda_{N-k-1} \text{ при } N-k \leq l \leq N-M, \\ \sigma_{N-k}^{(N-M+1, \dots, N)} &\sim \lambda_1 \dots \lambda_{N-k}. \end{aligned}$$

При $k > M$ разность $N-k < N-M$, отсюда следует соотношение (2.3), в котором индекс M заменен на k .

Аналогичные (2.7) оценки можно написать и для сумм $\sigma_{M-k-1}^{(1, \dots, N-M, l)}$, $\sigma_{M-k}^{(1, \dots, N-M)}$, содержащихся в формуле (2.5). Поскольку $N-k > N-M$, если $k < M$, в итоге снова получается соотношение (2.3)

$$\alpha_{k\infty} = \alpha_{M\infty} - \frac{1}{2} \delta_a^2 v_\infty \sum_{l=N-M+1}^{N-k} \frac{e'_{2l}}{\lambda_l},$$

где в правой части суммирование распространяется на номера l из интервала $N-M+1 \leq l \leq N-k$.

Ради краткости в обозначениях как постоянных, так и переменных величин будем опускать ниже штрихи и индекс 2, который указывает на результат линейного преобразования векторов полноты и сродства химических реакций.

3. Свойства монотонности. Давно известно [7, 8], что ударное сжатие химически активной смеси влечет появление в потоке релаксационных зон. Если скорости реакций значительно отличаются по величине, то эти зоны имеют разную ширину и располагаются последовательно друг за другом. Ширина каждой зоны определяется одним или несколькими релаксационными процессами. Расчеты подтверждают [9] сформулированное заключение о «полосатой» структуре потока, который прошел через ударный фронт и стремится к новому равновесному состоянию. Полученное [10] решение задачи о движении в газовой смеси плоского поршня позволяет судить, каким образом расслаиваются во времени релаксационные зоны с различной шириной.

Сделанное с самого начала предположение о близости замороженной и равновесной скоростей звука значительно облегчает анализ нелинейной системы уравнений (1.3). Применение метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений дало возможность установить [5] все закономерности, присущие «полосатой» структуре ударных волн с полной дисперсией (т. е. не включающих поверхностей разрыва). Основываясь на полученных в [5] результатах, построим течение в релаксационных зонах позади поверхности разрыва, при переходе через которую смесь подвергается внезапному сжатию.

Докажем прежде всего, что термодинамические параметры $q_i^x = \lambda_i q_i / e_i$ монотонно возрастают, а скорость частиц монотонно убывает вдоль координаты x . Рассматривая v в качестве известной функции и принимая во внимание равенство $x = 0$, определяющее положение ударного фронта, имеем

$$(3.1) \quad q_i^x = -\lambda_i \int_0^x v(\xi) e^{\lambda_i(\xi-x)} d\xi, \quad i = 1, \dots, N.$$

Подставим начальные значения (1.4) искомых функций в систему уравнений (1.3) и вычислим их производные на поверхности разрыва. Так как параметры смеси могут испытывать скачкообразные изменения только при $\gamma_f > 0$, то

$$\frac{dq_i^x}{dx} = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \lambda_i \gamma_f}{\varepsilon m_\infty} > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{\delta_a^2}{\varepsilon m_\infty} \sum_{i=1}^N e_i^2 < 0.$$

Второе из этих неравенств ведет к утверждению, что существует некоторый диапазон $0 \leq x \leq x_0$, в котором производная $dv/dx < 0$. Монотонный характер изменения v будет установлен, если окажется, что $dv(x_0)/dx$ есть величина отрицательная.

Допустим противное и положим $dv(x_0)/dx = 0$. Тогда в соответствии с первым уравнением из системы (1.3) в точке x_0 имеем

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^N \frac{e_i^2}{\lambda_i} \frac{dq_i^x(x_0)}{dx} = 0.$$

Комбинация остальных уравнений этой системы с выражениями (3.1) дает

$$\frac{dq_i^x(x_0)}{dx} = -\lambda_i \left\{ v(x_0) e^{\lambda_i x_0} + \lambda_i \int_0^{x_0} [v(x_0) - v(\xi)] e^{\lambda_i(\xi-x_0)} d\xi \right\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Функция $v(x)$ достигает своего минимального значения $v(x_0) < 0$ на краю интервала $0 \leq x \leq x_0$. Отсюда сразу следует, что оба слагаемых из фигурных скобок в правой стороне последнего соотношения являются отрицательными, а производные

$$(3.3) \quad \frac{dq_i^x(x_0)}{dx} > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Суммируя неравенства (3.3), умноженные предварительно на e_i^2/λ_i , приходим к противоречию с формулой (3.2). Это противоречие доказывает, что скорость смеси монотонно убывает вдоль координаты x . Наконец, чтобы сделать заключение о монотонном возрастании компонентов вектора $\mathbf{q}^x = (q_1^x, \dots, q_N^x)$, достаточно еще раз обратиться к выражениям для $dq_i^x(x_0)/dx$.

4. Переход через замороженную скорость звука. Начнем с предельного случая $\gamma_f = 0$. Согласно данным Коши (1.4), имеем

$$(4.1) \quad v = 0; \quad q_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{при } x = 0.$$

Иными словами, скорость и все термодинамические функции остаются непрерывными. Производные $dq_i/dx = 0$, т. е. также непрерывны, однако, как будет видно в дальнейшем, $[dv/dx] \neq 0$. Скачок в производной скорости означает, что точка $x = 0$ соответствует характеристике дифференциальных уравнений в частных производных, которым подчиняются течения релаксирующих смесей.

Чтобы построить поле возмущений в прилегающей к характеристике релаксационной зоне, введем новый масштаб длины посредством

$$(4.2) \quad x = x_1/\lambda_1.$$

Первое уравнение исходной системы (1.3) принимает вид

$$(4.3) \quad 2\epsilon m_\infty v \frac{dv}{dx_1} = -\delta_a^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} e_i (\lambda_i q_i + e_i v).$$

Остальные уравнения с учетом требований $\lambda_k/\lambda_1 \rightarrow 0, k = 2, \dots, N$ дают

$$(4.4) \quad \frac{dq_1}{dx_1} = -\left(q_1 + \frac{e_1}{\lambda_1} v\right), \quad \frac{dq_k}{dx_1} = 0, \quad k = 2, \dots, N.$$

Ясно, что уравнение (4.3) можно упростить, заменив его на

$$(4.5) \quad 2\epsilon m_\infty v \frac{dv}{dx} = \delta_a^2 e_1 \frac{dq_1}{dx_1}.$$

Уравнения (4.4), (4.5) образуют замкнутую систему, смысл которой состоит в том, что в рассматриваемой области все реакции, кроме первой, находятся в замороженном состоянии.

Полученная система эквивалентна одному уравнению второго порядка

$$(4.6) \quad \epsilon m_\infty \frac{d}{dx_1} \left(v \frac{dv}{dx_1} \right) + (\epsilon m_\infty v + \epsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}) \frac{dv}{dx_1} = 0,$$

поскольку числа [6, 10]

$$(4.7) \quad \gamma_j^{(k)} = \gamma_j + \frac{1}{2} \frac{P_{jv}}{\rho_\infty v_\infty^2} \sum_{l=1}^{N-k} \frac{e_l^2}{\lambda_l}.$$

Разумеется, нумерация этих чисел соответствует задаваемой неравенствами (1.2). Интеграл уравнения (4.6), удовлетворяющий начальным данным (4.1), имеет вид

$$(4.8) \quad v = -2 \frac{\epsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}}{\epsilon m_\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} x_1\right) \right].$$

В точке $x = 0$ значение производной

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\delta_a^2 e_1^2}{\epsilon m_\infty}$$

отличается от того, которое имеет место, если газ подвергается ударному сжатию. Однако при $\gamma_j = 0$ первое из уравнений (1.3) удовлетворяется при любой величине dv/dx .

Пусть теперь $\gamma_j > 0$, т. е. границей возмущенного потока служит скачок уплотнения. Масштаб первой релаксационной зоны определяется по-прежнему равенством (4.2). Уравнения (4.4) сохраняют силу, а вместо уравнения (4.5) следует написать

$$(4.9) \quad 2(\epsilon m_\infty v + \epsilon_a^2 \gamma_j) \frac{dv}{dx_1} = \delta_a^2 e_1 \frac{dq_1}{dx_1}.$$

Как и в предельном случае $\gamma_j = 0$, система уравнений (4.4), (4.9) соответствует протеканию только первой реакции, остальные $N-1$ релаксационных процессов практически заморожены. Эквивалентное рассматриваемой системе уравнение второго порядка имеет вид

$$\frac{d}{dx_1} \left[(\epsilon m_\infty v + \epsilon_a^2 \gamma_j) \frac{dv}{dx_1} \right] + (\epsilon m_\infty v + \epsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}) \frac{dv}{dx_1} = 0.$$

Его интеграл, удовлетворяющий условиям

$$v = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma_f}{\varepsilon m_\infty}, \quad \frac{dv}{dx_1} = -\frac{\delta_a^2 e_1^2}{\varepsilon m_\infty \lambda_1} \quad \text{при } x_1 = 0,$$

будет

$$(4.10) \quad -x_1 = \frac{\gamma_f}{\gamma^{(N-1)}} \ln \left| \frac{\varepsilon m_\infty v}{2\varepsilon_a^2 \gamma_f} \right| + \left[2 - \frac{\gamma_f}{\gamma^{(N-1)}} \right] \ln \left| \frac{\varepsilon m_\infty v + 2\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}}{2\varepsilon_a^2 [\gamma^{(N-1)} - \gamma_f]} \right|.$$

Когда $\gamma_f \rightarrow 0$, это соотношение переходит в (4.8).

Интегралом (4.10) можно пользоваться при любой величине скорости частиц, которая достигается при торможении потока скачком уплотнения. В работах [3, 4] подробно обсуждалось понятие M -кратно замороженной и $(N - M)$ -кратно равновесной скорости звука. Для условий, задаваемых неравенствами (2.6), названная скорость звука в невозмущенном состоянии есть просто M -я промежуточная скорость распространения малых возмущений по набегающему равномерному потоку. С учетом формулы (4.7) в исходных размерных переменных M -кратно замороженная и $(N - M)$ -кратно равновесная скорость звука определяется выражением

$$a_{fe}^{(M)} = v_{co} \left[1 - 2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma_f}{m_\infty} + \varepsilon_a^2 \left(\gamma_f - \frac{1}{2} \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \sum_{l=1}^{N-M} \frac{e_l^2}{\lambda_l} \right) \right]$$

для точек, расположенных непосредственно за ударным фронтом. В тех же переменных скорость частиц

$$v = v_{co} \left(1 - 2\varepsilon_a^2 \frac{\gamma_f}{m_\infty} \right).$$

Отсюда сразу видно, что

$$v < a_{fe}^{(M)} \quad \text{при } \gamma_f > \frac{1}{2} \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \sum_{l=1}^{N-M} \frac{e_l^2}{\lambda_l},$$

$$v > a_{fe}^{(M)} \quad \text{при } \gamma_f < \frac{1}{2} \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \sum_{l=1}^{N-M} \frac{e_l^2}{\lambda_l}.$$

Равенству $v = a_{fe}^{(M)}$ для газа, прошедшего через скачок уплотнения, можно придать вид

$$(4.11) \quad v_\infty = 2a_{f\infty} - a_{M\infty}.$$

Последнее соотношение, в частности, показывает, что при $\gamma_f \rightarrow 0$ ударный фронт вырождается в характеристику и скорость частиц при его пересечении остается неизменной.

Если величина γ_f лишь немного превышает нуль, то скорость потока за скачком уплотнения меньше замороженной, но больше любой из M -кратно замороженных и $(N - M)$ -кратно равновесных скоростей звука. С ростом γ_f совершаются последовательные переходы скорости частиц через местные скорости звука $a_{fe}^{(M)}$ с индексами $M = N - 1, N - 2, \dots, 1$. Равенство (4.11) знаменует каждый такой переход. Это равенство соответствует, в свою очередь, значению $\gamma^{(M)} = 2\gamma_f$ в формуле (4.7). Скорость потока достигает равновесной скорости распространения малых колебаний при условии

$$\gamma_f = \frac{1}{2} \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \sum_{i=1}^N \frac{e_i^2}{\lambda_i},$$

которое приводит к величине $\gamma_e = 2\gamma_f$. С дальнейшим ростом скорость смеси, подвергшейся ударному сжатию, становится меньше равновесной скорости звуковых волн. Качественное поведение решения (4.10) остается одним и тем же при любом значении γ_f .

5. Последовательность релаксационных зон. Чтобы построить поле течения в следующей возмущенной области, введем переменную

$$(5.1) \quad x = x_2/\lambda_2.$$

Первое уравнение исходной системы (1.3) запишется в виде

$$(5.2) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma_f) \frac{dv}{dx_2} = -\delta_a^2 \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{\lambda_2} (\lambda_i q_i + e_i v),$$

а из остальных уравнений с учетом требований $\lambda_k/\lambda_2 \rightarrow 0$, $k = 3, \dots, N$ выводим

$$(5.3) \quad \frac{dq_1}{dx_2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(q_1 + \frac{e_1}{\lambda_1} v \right), \quad \frac{dq_2}{dx_2} = -\left(q_2 + \frac{e_2}{\lambda_2} v \right), \\ \frac{dq_k}{dx_2} = 0, \quad k = 3, \dots, N.$$

Исключим из системы уравнений (5.2), (5.3) переменную q_1 . Воспользовавшись формулой (4.7), имеем

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{d}{dx_2} \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma_f) \frac{dv}{dx_2} \right] + \frac{1}{2} \delta_a^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) e_2 \frac{dq_2}{dx_2} + \\ + \left[(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}) + \frac{1}{2} \delta_a^2 \frac{e_2^2}{\lambda_2 \lambda_1} \right] \frac{dv}{dx_2} = 0.$$

Перейдем здесь к пределу по $\lambda_2/\lambda_1 \rightarrow 0$. Поскольку $e_2^2/\lambda_2 \sim 1$, в итоге получается сравнительно простое уравнение первого порядка. Присоединение к нему уравнений (5.3), в которых также совершен предельный переход по $\lambda_2/\lambda_1 \rightarrow 0$, дает замкнутую систему

$$(5.4) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}) \frac{dv}{dx_2} = \delta_a^2 e_2 \frac{dq_2}{dx_2}, \\ \frac{dq_2}{dx_2} = -\left(q_2 + \frac{e_2}{\lambda_2} v \right), \quad \frac{dq_k}{dx_2} = 0, \quad k = 3, \dots, N.$$

После того, как ее решение построено, термодинамическая переменная q_1 вычисляется из конечного соотношения

$$(5.5) \quad q_1 = -\frac{e_1}{\lambda_1} v.$$

Возникшая ситуация допускает простую интерпретацию: наиболее быстрая первая реакция протекает равновесно, ход второго релаксационного процесса определяет состояние системы, остальные $N - 2$ реакций заморожены.

Выясним теперь, какие начальные условия нужно поставить при интегрировании системы (5.4). Для этого напишем асимптотическое выражение интеграла (4.10) при $x_1 \rightarrow \infty$

$$(5.6) \quad v = -2 \frac{\varepsilon_a^{2, (N-1)}}{\varepsilon m_\infty} + b_1 \exp \left[-\frac{\gamma^{(N-1)}}{2\gamma^{(N-1)} - \gamma_f} x_1 \right],$$

$$b_1 = 2 \frac{\varepsilon_a^2 [\gamma^{(N-1)} - \gamma_f]}{\varepsilon m_\infty} \left[\frac{\gamma^{(N-1)}}{\gamma_f} \right]^{-\frac{\gamma_f}{2\gamma^{(N-1)} - \gamma_f}}$$

Когда $\gamma_f \rightarrow 0$, асимптотика (5.5) совпадает с точным решением (4.8) уравнения (4.6). Из второго уравнения системы (5.4) выводим асимптотическое представление термодинамической переменной

$$q_1 = \frac{e_1}{\lambda_1} \left\{ 2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}}{\varepsilon m_\infty} + \frac{2\gamma^{(N-1)} - \gamma_f}{\gamma^{(N-1)}} b_1 \exp \left[-\frac{\gamma^{(N-1)}}{2\gamma^{(N-1)} - \gamma_f} x_1 \right] \right\} + d_1 \exp(-x_1)$$

с новой постоянной d_1 . Иными словами, в конце первой релаксационной зоны рассматриваемая термодинамическая переменная стремится к своему равновесному значению

$$(5.7) \quad q_1 = -\frac{e_1}{\lambda_1} v_{s1}, \quad v_{s1} = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}}{\varepsilon m_\infty}.$$

Если вычислять параметры частиц за ударным фронтом в смеси, где первая реакция уже пришла к равновесию, то роль замороженной скорости звука $a_{j\infty}$ будет играть, очевидно, промежуточная скорость $\alpha_{N-1, \infty}$. Согласно первой из формул (1.4), величина v_{s1} есть не что иное, как возмущенная скорость потока при таком внезапном сжатии.

Воспользуемся теперь принципом сращения внешних и внутренних асимптотических разложений [11]. Так как масштабы (4.2), (5.1) связаны соотношением

$$x_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_1,$$

то из предельных условий (5.7) вытекает

$$(5.8) \quad v = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}}{\varepsilon m_\infty}, \quad q_1 = 2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)}}{\varepsilon m_\infty} \frac{e_1}{\lambda_1}, \quad q_k = 0, \\ k = 2, \dots, N \text{ при } x_2 = 0.$$

Заметим, что конечное соотношение (5.5) совпадает по своей форме с первым из предельных условий (5.7) и следующим из него начальным (при $x_2 = 0$) значением q_1 . Указанное совпадение объясняется просто: в конце первой релаксационной зоны наиболее быстрая реакция под номером 1 стремится к равновесию и не отклоняется от равновесного состояния во второй релаксационной зоне.

Соответствующие (5.8) начальные значения производных имеют вид

$$\frac{dv}{dx_2} = -\frac{\delta_a^2 e_2^2}{\varepsilon m_\infty \lambda_2}, \quad \frac{dq_2}{dx_2} = 2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-1)} e_2}{\varepsilon m_\infty \lambda_2}.$$

Описывающая протекание второй реакции система (5.4) может быть получена из уравнений (4.4), (4.9) путем формальной замены постоянной γ_f на $\gamma^{(N-1)}$. Аналогичная ситуация имеет место и с данными Коши, которые выставляются при интегрировании обеих систем. Отсюда заключаем, что поле возмущений во второй релаксационной зоне подчиняется интегралу (4.10), если вместо констант γ_f и $\gamma^{(N-1)}$ подставить соответственно $\gamma^{(N-1)}$ и $\gamma^{(N-2)}$. Формулы (5.6), в которых произведена та же самая замена, дадут асимптотику решения на выходе из второй релаксационной зоны, т. е. при $x_2 \rightarrow \infty$.

Указанный процесс сращивания решений для различных областей без каких-либо изменений продолжается дальше. Масштаб j -й зоны вводится посредством

$$x = x_j/\lambda_j.$$

Приближенная система уравнений представляется в виде [5]

$$(5.9) \quad 2(\varepsilon m_\infty v + \varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}) \frac{dv}{dx_j} = \delta_a^2 e_j \frac{dq_j}{dx_j},$$

$$\frac{dq_j}{dx_j} = - \left(q_j + \frac{e_j}{\lambda_j} v \right), \quad \frac{dq_k}{dx_j} = 0, \quad k = j+1, \dots, N.$$

После ее интегрирования первые $j-1$ термодинамических переменных q_1, \dots, q_{j-1} восстанавливаются по конечным соотношениям

$$(5.10) \quad q_i = - \frac{e_i}{\lambda_i} v, \quad i = 1, \dots, j-1.$$

Систему уравнений (5.9) с присоединенными к ней соотношениями (5.10) можно трактовать как описывающую газ, в котором происходит единственный релаксационный процесс под номером j . Первые $j-1$ более быстрых реакций протекают равновесно, последние $N-j$ более медленных реакций все еще заморожены. Сжатие смеси заканчивается после того, как в N -й релаксационной зоне выйдет на равновесный режим самая медленная из реакций. В каждой из N релаксационных зон реакции можно рассматривать независимо при условии, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ подчиняются неравенствам (2.6).

Начальные данные для системы уравнений (5.9) и конечных соотношений (5.10) имеют вид

$$v = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)}}{\varepsilon m_\infty}, \quad q_i = 2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j+1)} c_i}{\varepsilon m_\infty \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, j-1,$$

$$q_k = 0, \quad k = j, \dots, N \text{ при } x_j = 0.$$

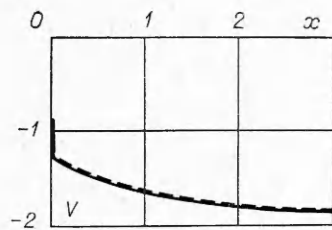
Решение сформулированной задачи дается, очевидно, выражением (4.10), где роль постоянных γ_j и $\gamma^{(N-1)}$ играют соответственно $\gamma^{(N-j+1)}$ и $\gamma^{(N-j)}$. При $x_j \rightarrow \infty$ асимптотика поля возмущений устанавливается формулами

$$q_j = - \frac{e_j}{\lambda_j} v_{sj}, \quad v_{sj} = -2 \frac{\varepsilon_a^2 \gamma^{(N-j)}}{\varepsilon m_\infty},$$

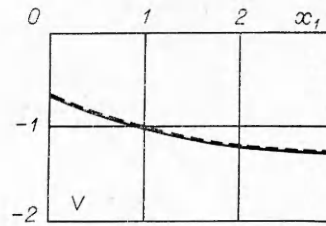
совпадающими с (5.7) при $j = 1$. Если вычислять параметры частиц за ударным фронтом в смеси, в которой первые j реакций пришли к равновесию, то роль замороженной скорости звука $a_{f\infty}$ будет принадлежать промежуточной скорости $\alpha_{N-j,\infty}$. Величина v_{sj} равна возмущенной скорости потока при таком внезапном сжатии. Поскольку ширина всех предыдущих зон в масштабе любой последующей стремится к нулю, непрерывное сжатие газа в какой-либо релаксационной зоне оказывается эквивалентным его сжатию на ударном фронте. При изучении конечной стадии процесса в N -й зоне первые $N-1$ релаксационных зон можно рассматривать в качестве последовательности $N-1$ разрывов, подставляя каждый раз в вычисления на место замороженной скорости звука $a_{f\infty}$ промежуточную скорость $\alpha_{N-j,\infty}$, $j = 1, \dots, N-1$.

Сжатие смеси в j -й релаксационной зоне сопровождается изменением скорости на величину

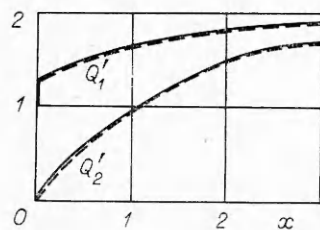
$$\Delta v = -2 \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon m_\infty} (\gamma^{(N-j)} - \gamma^{(N-j+1)}) = - \frac{\varepsilon_a^2 v_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 \varepsilon m_\infty} \frac{e_j^2}{\lambda_j} < 0,$$



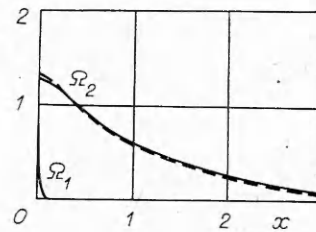
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

что согласуется с доказанным в третьем разделе общим свойством ее монотонного убывания по мере удаления от ударного фронта.

В заключение обратим внимание на разницу между непрерывными течениями (полностью диспергированными ударными волнами) и движениями, включающими головные разрывы (ударными волнами с частичной дисперсией). Количество релаксационных зон в первых зависит от величины скорости набегающего равномерного потока, что касается вторых, то количество релаксационных зон в них всегда равно числу независимых реакций. Чтобы вновь вернуть в равновесие смесь, выведенную из этого состояния головным скачком уплотнения, необходимо последовательное включение всех релаксационных процессов.

Для иллюстрации изложенной теории были проделаны расчеты структуры релаксационных зон позади скачка уплотнения в смеси, в которой протекают две реакции. В расчетах полагалось $\varepsilon_a^2/(\varepsilon m_\infty) = 1$, $\delta_a^2/\varepsilon_a^2 = 2$, $\lambda_1 = 100$, $e_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $e_2 = 1$, $\gamma_{f\infty} = 1$. Результаты изображены на фиг. 1—4, где сплошные линии соответствуют точному численному решению задачи, а штриховые — относятся к данным асимптотического анализа. При построении фиг. 1—4 использовались переменные $V = v_\infty/\gamma_{e\infty}$, $Q_1 = \lambda_1 q_1/(\gamma_{e\infty} e_1)$, $Q_2 = \lambda_2 q_2/(\gamma_{e\infty} e_2)$, $\Omega_1 = -\omega_1/(\gamma_{e\infty} e_1)$, $\Omega_2 = -\omega_2/(\gamma_{e\infty} e_2)$. В качестве независимой переменной на фиг. 1, 3 и 4 была выбрана координата $x_2 = \lambda_2 x = x$, а на фиг. 2 — координата $x_1 = \lambda_1 x$. Выбранный пример характеризуется тем, что скорость частиц непосредственно за ударным фронтом равна местной однократно замороженной и однократно равновесной скорости звука.

Поступила 30 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Napolitano L. G. Generalized velocity potential equation for pluri-reacting mixtures. — Arch. Mech. Stosowanej, 1964, vol. 16, N 2.
2. Napolitano L. G. Non-linear non-equilibrium flows. — I. A. Rept., 1969, N 142.
3. Ни А. Л., Рыжов О. С. О скоростях звука в многокомпонентных химически активных газовых смесях. — Вестн. Ленингр. ун-та. Матем., механ., астрон., 1976, № 13, вып. 3.

4. Ни А. Л., Рыжов О. С. Уравнения трансзвуковых течений релаксирующих смесей.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
5. Ни А. Л., Рыжов О. С. О структуре полностью диспергированных ударных волн в релаксирующих смесях.— ПМТФ, 1979, № 2.
6. Ни А. Л., Рыжов О. С. Предельные выражения для промежуточных скоростей звука в неравновесных течениях с произвольным числом химических реакций.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
7. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М., Наука, 1965.
8. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., Мир, 1967.
9. Clarke J. F., Rodgers J. B. Shock waves in a gas with several relaxing internal energy modes.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt 4.
10. Ни А. Л. Распространение слабых ударных волн в средах с произвольным числом химических реакций.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
11. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., Мир, 1967.

УДК 532.72

О РАСТВОРЕНИИ ЦЕПОЧКИ КАПЕЛЬ (ПУЗЫРЕЙ) В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

А. Д. Полянин, Ю. А. Сергеев
(Москва)

Рассмотрена простейшая модельная задача о растворении цепочки капель (пузырей), обтекаемой потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Учитывается диффузионное взаимодействие капель, обусловленное наличием диффузионных следов [1, 2]. Определены радиусы капель и скорость растворения в зависимости от их положения в цепочке и времени; получены характерные времена растворения капель. Показано, что диффузионное взаимодействие в цепочках приводит к существенному торможению процесса растворения. Для капли с порядковым номером k время полного растворения t_k определяется формулой

$$t_k = \alpha \sqrt{k}, \quad \alpha = \text{const},$$

где нумерация ведется от впереди идущей капли.

Считаем, что капли (пузыри) движутся в жидкости одна за другой с постоянной скоростью U и в процессе растворения сохраняют сферическую форму, а в начальный момент времени имеют равные радиусы $a_k^*(0) = a$ ($k = 1, 2, \dots, M$); начальное число Рейнольдса $Re = aU\nu^{-1}$ мало, а число Пекле $Pe = aUD^{-1}$ велико (ν — кинематический коэффициент вязкости, D — коэффициент диффузии).

Начальное распределение скоростей жидкости и концентрации определяется совместным решением стационарных уравнений Стокса и конвективной диффузии с граничными условиями постоянства скорости жидкости U и концентрации c_0 вдали от цепочки, а также соответствующими динамическими условиями и условием равенства концентрации c_1 на поверхностях капель [3]. Процесс растворения считаем изотермичным, а концентрацию вещества внутри и на поверхностях капель постоянной величиной, не зависящей от времени и номера капель.

Кинетика простого (физического) растворения определяется процессом конвективной диффузии вещества к поверхностям сфер [3] и задается законом сохранения массы $dm_k/dt = I_k$, где dm_k/dt — полное изменение массы k -й капли в единицу времени; I_k — полный диффузионный поток на ее поверхность. Подстановка в закон сохранения стационарного