ПМТФ, № 4, 1966

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Э. А. Леонова

(*Москва*)

Для исследования течения металлов при высоких температурах в неизотермических условиях, в частности, для изучения вязкостных свойств, целесообразно иметь набор точных решений без существенных ограничений на свойства материала. Известно, что во многих важных для практики процессах сдвиговое сопротивление металлов зависит главным образом от скорости деформации и температуры. Предложено много эмпирических зависимостей. Известны также поиски количественной эквивалентности влияния скорости деформации и температуры. В настоящей работе предпринята попытка использования для этих целей анализа групповых свойств соответствующих уравнений. Исследуются уравнения течения и теплообмена среды, сдвиговое сопротивление которой является функцией скорости деформации сдвига и температуры. Специфические свойства металлов не используются, поэтому результаты применимы для различных сред.

§ 1. Ниже рассматриваются следующие три типа течений, сопровождающихся теплообменом среды, занимающей конечную или бесконечную область $x > x_0$ $(x_0 \geqslant 0)$.

1. Плоское прямолинейное течение без градиента давления вызванное движением границы в направлении, перпендикулярном оси x.

2. Прямолинейное течение с осевой симметрией без градиента давления, вызванное поступательным движением кругового цилиндра радиуса x_0 в направлении своей образующей.

3. Течение, возникающее при вращении кругового цилиндра радиуса x_0 относительно своей оси.

При этом предполагается, что напряжение сдвига является функцией скорости деформации сдвига и температуры. Рассматриваемые простейшие типы течений в ряде случаев позволяют получить точные решения без дополнительных предположений относительно свойств среды.

Уравнение движения и уравнение притока тепла имеют вид

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, T)}{\partial\varepsilon}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\frac{\partial\Phi(\varepsilon, T)}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x}\right) + \frac{\delta_1+\delta_2}{x}\Phi(\varepsilon, T) = 0$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\delta_1}{x}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} - \rho\frac{\partial L(T)}{\partial t} = 0 \qquad (1.1)$$

Три комбинации символов δ_1 и δ_2 1) $\delta_1 = \delta_2 = 0$; 2) $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$; 3) $\delta_1 = \delta_2 = 1$ — соответствуют первому, второму и третьему типам течения; v — соответствующая компонента скорости, T — температура, ρ — плотность, c — теплоемкость. Функция $\Phi(\varepsilon, T)$, задающая напряжение сдвига τ в зависимости от скорости деформации сдвига и температуры

$$\tau = F(\varepsilon, T)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\delta_2}{x}v\right), \qquad \varepsilon = \left|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\delta_2}{x}v\right|, \qquad \Phi = F\varepsilon$$

коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ и функция $L(T)$, характеризующая закон выделения тепла за счет возможных фазовых превращений, допускают некоторый произвол в своем задании. Предполагается, что выделением тепла за счет вязкости можно пренебречь.

Введем T°, $f(T^\circ)$, $\Phi^\circ(\varepsilon, T^\circ)$ таким образом:

$$T^\circ = \rho\,[cT - L(T)], \qquad f(T^\circ) = \lambda/\rho\,(c - L'), \qquad \Phi^\circ = \Phi/\rho \tag{1.2}$$

В новых переменных (индекс в дальнейшем опускается) система (1.1) преобразуется в следующую систему уравнений:

$$(S)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{x}\Phi = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\delta_1}{x} f(T)\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\delta_2 v}{x} + \varepsilon = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

которая и исследуется.

§ 2. Изучим групповые свойства системы S, следуя общим методам, развитым в работах [1-3] и применявшимся в дальнейшем в приложениях к различным физическим задачам, например [4-6] . Рассмотрев условия инвариантности системы S относительно оператора

$$X = \xi^\circ\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \eta^\circ\frac{\partial}{\partial T} + \eta^1\frac{\partial}{\partial v} + \eta^2\frac{\partial}{\partial \theta} + \eta^3\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \qquad \left(\theta = f\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

искомой группы G, выполняемые на многобразии, задаваемом S, приходим к системе определяющих уравнений алгебры Ли основной группы, которую (систему) выписываем, предварительно упростив

$$\eta^\circ\frac{1}{f}\frac{df}{dT} - 2\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \xi^\circ}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \eta^\circ}{\partial T^2} = 0$$

$$f\frac{\partial \eta^\circ}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta^\circ}{\partial T} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x} - \frac{\partial \xi^\circ}{\partial t}\right)\theta - \eta^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial v} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x}\right)\varepsilon - \frac{\delta_2}{x}\left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x} - \frac{\xi'}{x} - \frac{\partial \eta^1}{\partial v}\right)v + \eta^1\right] + \eta^3 = 0$$

$$2\frac{\partial^2 \eta^\circ}{\partial T\,\partial x} + 3\frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial \xi^1}{\partial t} + \frac{\delta_1}{x}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial x} - \frac{\xi^1}{x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \eta^\circ}{\partial t} - f\frac{\partial^2 \eta^\circ}{\partial x^2} - \frac{\delta_1}{x} f\frac{\partial \eta^\circ}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} F_2\frac{\partial \eta^3}{\partial x} - F_1\frac{\partial \eta^\circ}{\partial x} + \frac{\partial \eta^1}{\partial t} - \left(\frac{\delta_2 v}{x} - \varepsilon\right)\frac{\partial \xi^1}{\partial t} + F_2\left(\frac{\delta_2 v}{x} - \varepsilon\right)\frac{\partial \eta^3}{\partial v} + {} \\ + \frac{\delta_1 + \delta_2}{x}\left[F_2\eta^3 - F_1\eta^\circ - \Phi\left(\frac{\partial \eta^2}{\partial v} + \frac{\xi^1}{x} - \frac{\partial \xi^\circ}{\partial t}\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\eta^\circ\frac{\partial F_2}{\partial T} + \eta^3\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} - F_2\left(2\frac{\partial \xi^1}{\partial x} - \frac{\partial \xi^\circ}{\partial t}\right) = 0, \qquad F_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \neq 0$$

$$\eta^\circ\frac{\partial F_1}{\partial T} + \eta^3\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} - F_1\left(2\frac{\partial \xi^1}{\partial x} - \frac{\partial \xi^\circ}{\partial t} + \frac{\partial \eta^3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \eta^\circ}{\partial T}\right) = 0, \qquad F_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial T}$$

$$\frac{\partial \xi^\circ}{\partial x} = \frac{\partial \xi^\circ}{\partial T} = \frac{\partial \xi^\circ}{\partial v} = \frac{\partial \xi^\circ}{\partial \theta} = \frac{\partial \xi^\circ}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^1}{\partial T} = \frac{\partial \xi^1}{\partial v} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \varepsilon} = 0$$

$$\frac{\partial \eta^\circ}{\partial v} = \frac{\partial \eta^\circ}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta^\circ}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \eta^1}{\partial T} = \frac{\partial \eta^1}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta^1}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \eta^2}{\partial v} = \frac{\partial \eta^2}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \eta^3}{\partial T} = \frac{\partial \eta^3}{\partial \theta} = 0$$

Общее решение системы (2.1) при произвольных $f(T)$ и $\Phi(\varepsilon, T)$ имеет вид

$$\xi^\circ = 2ct + c_1, \qquad \xi^1 = cx + c_2$$

$$\eta^\circ = 0, \qquad \eta^1 = cv + c_3 x^{\delta_2}, \qquad \eta^2 = -c\theta, \qquad \eta^3 = 0, \qquad \delta_1 c_2 = 0 \tag{2.2}$$

(c_j — произвольные постоянные).

Следовательно, при произвольных $f(T)$ и $\Phi(\varepsilon, T)$ алгебра Ли основной группы порождается следующими базисными операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = x^{\delta_2}\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial v} \tag{2.3}$$

при условии $\delta_1 X_2 = 0$ (символическая запись, употребляемая и в дальнейшем, означающая, что соответствующий оператор отличен от нуля только при $\delta_1 = 0$, т. е. в плоском случае).

Таким образом, система S инварианта относительно следующих преобразований, образующих группу G.

1. Изменение начала отсчета времени

$$t' = t + a_1, \qquad x' = x, \qquad T' = T, \qquad v' = v$$

2. Перенос по оси координат в плоском случае

$$t' = t, \qquad x' = x + a_2, \qquad T' = T, \qquad v' = v$$

3. Изменение начала отсчета скорости

$$t' = t, \qquad x' = x, \qquad T' = T, \qquad v' = v + a_3 \quad \text{при } \delta_2 = 0$$
$$t' = t, \qquad x' = x, \qquad T' = T, \qquad v' = v + a_3 x \quad \text{при } \delta_2 = 1$$

4. Растяжение

$$t' = a_4^2 t, \qquad x' = a_4 x, \qquad T' = T, \qquad v' = a_4 v$$

Рассмотрим теперь задачу групповой классификации систем вида S, заключающуюся в отыскании специализаций S_i за счет f и Φ. Поскольку система S сохраняет свой вид при преобразованиях

$$T' = b_0 T + b_1, \qquad \Phi' = \Phi + \Phi_0, \qquad \delta_1 \Phi_0 = 0$$

$$v' = a_0 v + a_1 x + a_2 \quad (\delta_2 = 0) \qquad v' = a_0 v + a_1 x \ln x + a_2 \quad (\delta_2 = 1)$$

с постоянными a_j, b_j, Φ_0, отыскание всех специализаций S_i системы S, допускающих группу G^i, можно вести с точностью до преобразований

$$f'(T) = f(b_0 T + b_1) \tag{2.4}$$

$$\Phi'(\varepsilon, T) = a_0^{-1}\Phi(a_0\varepsilon + a_1, \qquad b_0 T + b_1) + \Phi_0, \qquad \delta_1 \Phi_0 = 0$$

Проведем сначала классификацию по Φ при f произвольной. Исследование условий совместности системы (2.1) приводит к соотношениям

$$\xi^\circ = 2ct + c_1, \qquad \xi' = cx + c_2, \qquad \eta^\circ = 0, \qquad \eta^1 = (c + c_4)v + \varphi(tx)$$

$$\eta^2 = -c\theta, \qquad \eta^3 = c_4\varepsilon - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi, \qquad \delta_1 c_2 = 0$$

$$F_2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\delta_2}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x^2}\varphi\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\delta_1 + \delta_2}{x}\left[F_2\left(c_4\varepsilon - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2\varphi}{x}\right) - \Phi c_4\right] = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\varepsilon}\left(c_4\varepsilon - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi\right) = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial\varepsilon}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi\right) + c_4\left(\varepsilon\frac{\partial F_1}{\partial\varepsilon} - F_1\right) = 0$$

где φ — некоторая функция t и x. Эти соотношения показывают, что расширение группы может быть достигнуто только для линейных относительно ε функций Φ, а именно, помимо выделенной уже при написании системы (2.1), не представляющей особого интереса, функции $\Phi = f(T)\varepsilon + \Psi(T)$, для следующих двух:

$$\Phi = \Psi(T)\varepsilon, \qquad \Phi = \mu\varepsilon + \Psi(T), \qquad \mu = \mathrm{const}$$

Для первой $\varphi(t, x) = c_3 x^{\delta_2}$. Основная группа — пятипараметрическая ее алгебра Ли порождается операторами (2.3) и оператором

$$X_5 = v\partial / \partial v$$

Для второй $c_4 = 0$. Система допускает бесконечную группу; ее алгебра Ли образована операторами (2.3) и множеством операторов вида

$$X^\circ = \varphi(t, x) \frac{\partial}{\partial v}$$

где φ — решение уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2\varphi}{x}\right) + \mu \frac{\delta_1 + \delta_2}{x}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2\varphi}{x}\right) = 0$$

Здесь и в дальнейшем Ψ — произвольная функция своего аргумента. На выяснении особых значений Ψ в найденных случаях при последующем рассмотрении, останавливаться не будем.

Рассмотрим возможности, заключенные в $f(T)$. Анализ уравнений (2.1) показывает, что возможности выявляются в случаях, когда $f(T)$ удовлетворяет одному из уравнений

$$\frac{d^2}{dT^2}\left(f \Big/ \frac{df}{dT}\right) = 0, \qquad \frac{df}{dT} = 0 \tag{2.5}$$

Пусть сначала удовлетворяется первое из уравнений (2.5). Случай $F_2 = \mathrm{const}$ уже выделен нами, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\partial F_2/\partial\varepsilon$ и $\partial F_2/\partial T$ не равны нулю одновременно. Тогда из условий совместности системы (2.1) вытекают соотношения

$$\xi^\circ = 2ct + c_1, \qquad \xi^1 = (c + c_0)\,x + c_2, \qquad \eta^\circ = (bT + b_1)\,2c_0$$

$$\eta^1 = (c + c_0 + c_4)\,v - c_5 x + c_3 \quad (\delta_2 = 0)$$

$$\eta^1 = (c + c_0 + c_4)\,v - c_5\,x \ln x + c_3 x \qquad (\delta_2 = 1)$$

$$\eta^2 = (2bc_0 + c_0 - c)\,\theta, \quad \eta^3 = c_4\varepsilon + c_5, \quad \delta_1 c_2 = 0$$

$$\delta_1 B = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dT} = \frac{1}{bT + b_1}, \qquad \left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} - \Phi\right)c_4 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}c_5 = \left[(bT + b_1)\frac{\partial\Phi}{\partial T} - \Phi\right]2c_0 = B$$

(b, b_1, B — постоянные). Два последних уравнения определяют следующие, с точностью до преобразований (2.4), виды функций $\Phi(\varepsilon, T)$ и $f(T)$:

$$\Phi_1 = T^{\alpha+\beta}\Psi(\varepsilon T^{-\beta}), \qquad f = T^\alpha$$

В этом случае $\alpha c_4 = 2\beta c_0$, $c_5 = 0$, $b = 1/\alpha$. Система S_1 помимо операторов (2.3), допускает еще один линейно независимый оператор

$$X_5 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2T\frac{\partial}{\partial T} + (\alpha + 2\beta)\,v\frac{\partial}{\partial v}$$

Здесь α и β — произвольные константы, $\alpha \neq 0$. Далее будет показано, что в этом и следующих видах функций значение $\alpha = 0$ также допустимо.

Дополнительное преобразование растяжения, сохраняющее систему S_1, имеет следующий вид

$$t' = t, \qquad x' = a_5{}^\alpha x, \qquad T' = a_5{}^2 T, \qquad v' = a_5^{(\alpha+2\beta)} v$$

В случае

$$\Phi_2 = e^{(\alpha+\beta)}\Psi\,(\varepsilon e^{-\beta T}), \qquad f = e^{\alpha T}$$

имеем связь $\alpha c_4 = 2\beta c_0$, $c_5 = 0$, $b = 0$, $b_1 = 1/\alpha$. Дополнительный оператор, допускаемый системой S_2, имеет вид

$$X_5 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial T} + (\alpha + 2\beta)\, v \frac{\partial}{\partial v}$$

Здесь при $\alpha \neq 0$, в силу (2.4), можно считать $\alpha = 1$. Дополнительное преобразо вание, сохраняющее систему S_2, будет

$$t' = t, \qquad x' = e^{\alpha a_5} x, \qquad T' = T + 2a_5, \qquad v' = e^{(\alpha+2\beta)a_5} v$$

В случае

$$\Phi_3 = T^\alpha \Psi\,(\varepsilon - \beta \ln T), \qquad f = T^\alpha$$

имеем $\alpha c_5 = 2\beta c_0$, $c_4 = 0$, $b = 1 / \alpha$, $b_1 = 0$. Система S_3 допускает, помимо (2.3), следующий оператор:

$$X_5 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2T \frac{\partial}{\partial T} + (\alpha v - 2\beta x) \frac{\partial}{\partial v} \qquad (\delta_2 = 0)$$

$$X_5 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2T \frac{\partial}{\partial T} + (\alpha v - 2\beta x \ln x) \frac{\partial}{\partial v} \qquad (\delta_2 = 1)$$

Соответствующие конечные преобразования

$$t' = t, \quad x' = e^{\alpha a_5} x, \quad T' = e^{2a_5} T, \quad v' = e^{\alpha a_5}(v - 2\beta a_5 x) \ (\delta_2 = 0)$$

$$t' = t, \quad x' = e^{\alpha a_5} x, \quad T' = e^{2a_5} T, \quad v' = e^{\alpha a_5}(v - \beta a_5 x\,(\alpha a_5 + 2\ln x)) \ (\delta_2 = 1)$$

В случае

$$\Phi_4 = e^{\alpha T}\Psi\,(\varepsilon - \beta T), \qquad f = e^{\alpha T}$$

имеем

$$\alpha c_5 = 2\beta c_0, \qquad c_4 = 0, \qquad b = 0, \qquad b_1 = 1/\alpha$$

Дополнительный оператор

$$X_5 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial T} + (\alpha v - 2\beta x) \frac{\partial}{\partial v} \qquad (\delta_2 = 0)$$

$$X_5 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial T} + (\alpha v - 2\beta x \ln x) \frac{\partial}{\partial v} \qquad (\delta_2 = 1)$$

Здесь, конечно, тоже при $\alpha \neq 0$ можно положить $\alpha = 1$. Соответствующие преобразования

$$t' = t, \quad x' = e^{\alpha a_5} x, \quad T' = T + 2a_5, \quad v' = e^{\alpha a_5}(v - 2\beta a_5 x) \quad (\delta_2 = 0)$$

$$t' = t, \quad x' = e^{\alpha a_5} x, \quad T' = T + 2a_5, \quad v' = e^{\alpha a_5}[v - \beta a_5 x\,(\alpha a_5 + 2\ln x)] \quad (\delta_2 = 1)$$

Для плоских течений имеют место еще два случая

$$\Phi_5 = K \ln T + \Psi\,(\varepsilon T^\alpha), \ f = T^\alpha \quad (K = \mathrm{const})$$

В этом случае $c = -2c_0$, $c_5 = 0$, $b = 1/\alpha$. Дополнительный оператор X_5 и конечные преобразования получаются из соответствующих выражений для Φ_1 при $\beta = -\alpha$

$$\Phi_6 = KT + \Psi\,(\varepsilon e^{\alpha T}), \ f = e^{\alpha T} \quad (K = \mathrm{const})$$

Здесь $c_4 = -2c_0$, $c_5 = 0$, $b = 0$, $b_1 = 1/\alpha$. Дополнительный оператор X_5 и преобразования получаются из выражений для Φ_2 при $\beta = -\alpha$.

При произвольной $\Phi\,(\varepsilon, T)$ для $f(T)$, удовлетворяющей рассматриваемому первому условию (2 5), имеем $c_0 = c_4 = c_5 = 0$, т. е. те же выражения, что и для произвольной $f(T)$.

Рассмотрим теперь возможности расширения группы при $f(T)$, подчиненной второму условию (2.5). При $f = \mathrm{const}$ система (2.1) дает следующие соотношения (φ° и φ — неизвестные функции t и x):

$$\xi^\circ = 2ct + c_1, \qquad \xi' = cx + c_2, \qquad \eta^\circ = c_0 T + \varphi^\circ(t, x)$$

$$\eta^1 = (c + c_4)\, v + \varphi(t, x), \qquad \eta^2 = (c_0 - c)\, \theta + f \partial\varphi^\circ / \partial x$$

$$\eta^3 = c_4 \varepsilon - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi, \qquad \delta_1 c_2 = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t} - f\frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial x^2} - \frac{\delta_1}{x} f \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} = 0$$

$$F_2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\delta_2}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x^2}\varphi\right) + F_1 \frac{\partial\varphi^\circ}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\delta_1+\delta_2}{x}\left[F_2\left(c_4\varepsilon - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi\right) -\right.$$

$$\left. - F_1(c_0 T + \varphi^\circ) - \Phi c_4\right] = 0, \ (c_0 T + \varphi_0)\frac{\partial F_2}{\partial T} + \left(c_4\varepsilon - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi\right)\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} = 0$$

$$(c_0 T + \varphi^\circ)\frac{\partial F_1}{\partial T} + \left(c_4\varepsilon - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\delta_2}{x}\varphi\right)\frac{\partial F_1}{\partial\varepsilon} = F_1(c_4 - c_0) \tag{2.7}$$

Огсюда следует, что, если $\Phi(\varepsilon, T)$ не является решением уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon\,\partial T}\right)^2 = 0 \tag{2.8}$$

то

$$\varphi^\circ = c_6, \ \varphi = -c_5 x + c_3 \ (\delta_2 = 0), \ \varphi = -c_5 x \ln x + c_3 x \quad (\delta_2 = 1)$$

Для функции Φ получаем из (2.7) уравнение

$$\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} - \Phi\right)c_4 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}c_5 + T\frac{\partial\Phi}{\partial T}c_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial T}c_6 = B, \qquad \delta_1 B = 0 \tag{2.9}$$

Если Φ — произвольная функция, то $c_0 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. При произвольной Φ возможностей для расширения группы за счет f нет.

Сравнения уравнения (2.9) и последние из (2.6), находим, что уравнение (2.9) определяет виды функций Φ_1, Φ_2, Φ_3, найденные выше, в которых, однако, и в соответствующих им операторах и преобразованиях уже $\alpha = 0$ (причем, в силу (2.4), в Φ_2 можно считать $\beta = 0{,}1$). Кроме того, уравнение (2.9) в плоском случае дает еще одно значение Φ

$$\Phi_7 = K \ln T + \Psi(\varepsilon - \beta \ln T), \qquad f = \mathrm{const}$$

В этом случае $c_5 = \beta c_0$, $c_4 = 0$, $c_6 = 0$. Дополнительный оператор X_5 и преобразование получаются из выражений для Φ_3 при $\alpha = 0$.

Пусть теперь $\Phi(\varepsilon, T)$ удовлетворяет уравнению (2.8). Из решений этого уравнения следует выбрать решения, удовлетворяющие условиям (2.7). Можно показать, что решения, не удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon\,\partial T} + \beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon^2} = 0 \tag{2.10}$$

приведут снова к уравнению (2.9) и соответствующим ему значениям φ° и φ. Другие значения φ° и φ могут быть получены для Φ, удовлетворяющей (2.8) и (2.10), т. е. для

$$\Phi_8 = KT + \Psi(\varepsilon - \beta T), \qquad f = \mathrm{const}$$

В этом случае (2.7) приводят к следующим уравнениям:

$$K\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\delta_1+\delta_2}{x}K\varphi^\circ = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\delta_2}{x}\varphi + \beta\varphi^\circ = 0$$

$$\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial t} - f\frac{\partial^2\varphi^\circ}{\partial x^2} - \frac{\delta_1}{x}f\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial x} = 0 \tag{2.11}$$

и условиям на произвольные постоянные $c_4 = 0$, $c_0 = 0$, за исключением значения параметров $K = \beta = 0$, при котором c_0 остается произвольным. В этом последнем случае система S допускает бесконечную группу, что естественно, так как она распадается на два независимых уравнения, из которых одно линейное. Алгебра Ли порождается операторами (2.3) и следующими

$$X_5 = T \frac{\partial}{\partial T}, \qquad X^\circ = \varphi^\circ (t, x) \frac{\partial}{\partial T}$$

где φ° — решение уравнения

$$\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial t} - f \frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial x^2} - \frac{\delta_1}{x} f \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} = 0 \qquad (2.12)$$

Перейдем к исследованию уравнений (2.11) в общем случае. Анализ системы показывает, что решения $\varphi^\circ (tx)$ и $\varphi (tx)$, дающие значения координат, отличные от координат оператора группы G, могут быть получены либо для плоских течений, либо при $K = 0$. Рассмотрим плоские течения. Если параметры β, f и K независимы, то уравнения (2.11) дают

$$\varphi^\circ = c_7 x + c_6, \qquad \varphi = - \beta ({}^1/_2 c_7 x^2 + c_6 x) - K c_7 t + c_3$$

Алгебра Ли основной группы порождается шестью линейно независимыми операторами: операторами (2.3) и дополнительными

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial T} - \beta x \frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_6 = x \frac{\partial}{\partial T} - \left(\beta \frac{x^2}{2} + Kt\right) \frac{\partial}{\partial v}$$

В силу (2.4) можем считать $K = 1$ либо $\beta = 1$. Соответствующие преобразования

$$t' = t, \quad x' = x, \quad T' = T + a_5, \quad v' = v - \beta a_5 x$$
$$t' = t, \quad x' = x, \quad T' = T + a_6 x, \quad v' = v - a_6 ({}^1/_2 \beta x^2 + Kt)$$

Если же параметры β, f и K связаны соотношением $K = f\beta$, то система допускает бесконечную группу. К операторам (2.3) добавляется множество операторов вида (φ°— решение уравнения (2.12) при $\delta_1 = 0$)

$$X^\circ = \varphi^\circ (t, x) \frac{\partial}{\partial T} - \beta \int \varphi^\circ (t, x)\, dx \frac{\partial}{\partial v}$$

Теперь рассмотрим случай $K = 0$. Функция Φ_8 совпадает с Φ_4 при $\alpha = 0$. Однако значение $\alpha = 0$, как сейчас покажем, является особым. Полученное решение для плоского случая справедливо при любом K, поэтому достаточно рассмотреть оставшиеся два типа течений. Общее решение уравнений (2.11) имеет вид

$$\varphi^\circ = c_7 \ln x + c_6 \qquad \varphi = - \beta c_7 (x \ln x - x) - \beta c_6 x + c_3 \qquad (\delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0)$$
$$\varphi = x\, [c_3 - {}^1/_2 c_7 \beta (\ln x)^2 - c_6 \beta \ln x] \qquad (\delta_1 = \delta_2 = 1)$$

Основная группа — шестипараметрическая. Система S_4 при $\alpha = 0$, помимо найденных операторов $X_1, \ldots X_5$, допускает еще один оператор

$$X_6 = \ln x \frac{\partial}{\partial T} - \beta (x \ln x - x) \frac{\partial}{\partial v} \qquad (\delta_2 = 0)$$
$$X_6 = \ln x \frac{\partial}{\partial T} - \frac{1}{2} \beta x (\ln x)^2 \frac{\partial}{\partial v} \qquad (\delta_2 = 1)$$

Соответствующие конечные преобразования имеют вид

$$t' = t, \quad x' = x \quad T' = T + a_6 \ln x, \quad v' = v + a_6 \beta (x \ln x - x) \qquad (\delta_2 = 0)$$
$$t' = t, \quad x' = x, \quad T' = T + a_6 \ln x, \quad v' = v - {}^1/_2\, a_6 \beta x (\ln x)^2 \qquad (\delta_2 = 1)$$

§ 3. Используем найденную основную группу преобразований для отыскания частных решений S и S_i. Инвариантные решения ранга единица для рассматриваемой системы возможны лишь на однопараметрических подгруппах. Для получения всех инвариантных решений достаточно найти существенно различные относительно G_i решения.

Путем использования внутренних автоморфизмов G^i построим оптимальную систему однопараметрических подгрупп, дающую возможность найти все существенно различные решения для полученных выше специализаций S_i системы S. Сравнивая операторы X_5 для систем S_1 и S_2, а также S_3 и S_4, замечаем, что специфический вид координат этих операторов дает возможность заранее установить, что матрицы внутренних автоморфизмов основных групп для систем S_1 и S_2 (S_3 и S_4) будут одинаковы, что облегчает построение оптимальной системы.

Опуская все выкладки, приведем окончательный вид оптимальной системы однопараметрических подгрупп систем S_i $(i = 1, \ldots, 4)$ при неособых значениях параметров.

Система S

$$H_1 = X_1, \quad H_2 = X_2, \quad H_3 = X_4, \quad H_4 = X_1 + X_3$$

$$H_5 = kX_2 + X_3, \quad H_6 = X_1 + X_2 + mX_3, \quad H_7 = X_4 + kX_3$$

$$\delta_1 H_2 = \delta_1 H_5 = \delta_1 H_6 = 0, \qquad (\delta_2 - 1) H_7 = 0$$

Система Si $(i = 1, \ldots, 4)$

$$H_l^j = H_l \ (l = 1, \ldots, 7)$$

причем, если $\beta \neq 0$, то, согласно общему правилу, следует положить в операторах

$$H_5^{1,2} \text{ и } H_7^{1,2} \ k = 1; \text{ в операторах}$$

$$H_6^{1,2} \quad m = 0{,}1; \qquad H_6^{3,4}, \quad m = 0; \quad H_5^{3,4} = 0, \quad H_7^{3,4} = 0$$

Далее

$$H_8{}^i = mX_4 + X_5, \quad H_9{}^i = X_1 + X_5, \quad H_{10}{}^i = X_2 - \alpha X_4 + X_5$$

$$H_{11}{}^i = X_1 + kX_2 + X_5 \ (\alpha = 0), \ H_{12}{}^i = X_2 + kX_3 - \alpha X_4 + X_5 \qquad (\beta = 0)$$

$$H_{13}{}^i = kX_3 + mX_4 + X_5 \qquad (\beta = 0)$$

$$H_{14}{}^{1,2} = X_3 - (\alpha + 2\beta) X_4 + X_5, \ H_{14}^{3,4} = X_3 - \alpha X_4 + X_5 \ (\beta = 0)$$

$$H_{15}{}^i = X_1 + kX_3 + X_5 \quad (\beta = 0) \ H_{15}^{1,2} = X_1 + kX_3 + X_5 \ (\alpha = -2\beta, \ \delta_2 = 0)$$

$$H_{16}{}^i = X_1 + k_1X_2 + k_2X_3 + X_5 \qquad (\alpha = \beta = 0)$$

$$\delta_1 H_{10}{}^i = \delta_1 H_{11}{}^i = \delta_1 H_{12}{}^i = \delta_1 H_{16}{}^i = 0, \qquad (1 - \delta_2) H_{13}{}^i = (1 - \delta_2) H_{15}{}^i = 0$$

$$\delta_2 H_{14}{}^{1,2} = 0$$

Здесь H_j^i — простейшие представители классов операторов подобных однопараметрических подгрупп, образующих оптимальную систему для системы S_i; k и m — произвольные постоянные, $k \neq 0$. Операторы, не приводящие к инвариантным решениям, исключены. Для удобства использования при записи выделены операторы, не подобные между собой при любых значениях физических параметров. В скобках отмечены условия, при которых соответствующий оператор не подобен остальным.

Инвариантные решения, найденные на подгруппах $H_j{}^i$, приведены в таблице. Здесь $J_2(\xi)$ и $J_3(\xi)$ удовлетворяют системе (S / H) обыкновенных дифференциальных уравнений.

В таблице приведены решения для $S_1, \ldots, S_4$. Легко видеть, что решения для $S_5, \ldots, S_8$, находятся по этой же таблице.

Таблица инвариантных решений

$$n = \frac{m+\alpha}{2m}, \qquad \sigma = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha}, \qquad l = \frac{k+m+\alpha}{2m}$$

	$J_1 = \xi$	T	v	α, β	δ
		$S, \quad \Phi = \Phi(\varepsilon, T), \quad f = f(T)$			
H_1	x	J_2	J_3	—	
H_2	t	J_2	J_3	—	$\delta_1 = 0$
H_3	$xt^{-1/2}$	J_2	$t^{1/2} J_3$	—	
H_4	x	J_2	$x^{\delta_2}(J_3 + t)$	—	
H_5	t	J_2	$k^{-1}x + J_3$	—	$\delta_1 = 0$
H_6	$x - t$	J_2	$J_3 + mt$	—	$\delta_1 = 0$
H_7	$xt^{-1/2}$	J_2	$x(J_3 + k \ln x)$	—	$\delta_2 = 1$
		$S_1, \quad \Phi = T^{\alpha+\beta}\,\Psi(\varepsilon T^{-\beta}), \quad f = T^{\alpha}$			
$H^1_{8,1}$	t	$x^{2/\alpha} J_2$	$x^{\sigma} J_3$	$\alpha \neq 0$	
$H^1_{8,2}$	xt^{-n}	$t^{1/m} J_2$	$t^{n+\beta/m} J_3$	—	
H^1_{9}	$xe^{-\alpha t}$	$e^{2t} J_2$	$e^{\sigma\alpha t} J_3$	—	
H^1_{10}	$te^{2\alpha x}$	$e^{2x} J_2$	$e^{2\beta x} J_3$	—	$\delta_1 = 0$
H^1_{11}	$x - kt$	$e^{2t} J_2$	$e^{2\beta t} J_3$	$\alpha = 0$	$\delta_1 = 0$
H^1_{12}	$te^{2\alpha x}$	$e^{2x} J_2$	$J_3 + kx$	$\beta = 0$	$\delta_1 = 0$
$H^1_{13,1}$	xt^{-n}	$t^{1/m} J_2$	$x(J_3 + {}^1/_2 k m^{-1} \ln t)$	$\beta = 0$ $m \neq 0$	$\delta_2 = 1$
$H^1_{13,2}$	t	$x^{2/\alpha} J_2$	$x(J_3 + k\alpha^{-1} \ln x)$	$\beta = 0$ $m = 0$	$\delta_2 = 1$
$H^1_{14,1}$	$xt^{-\beta/\sigma\alpha}$	$t^{-1/\sigma\alpha} J_2$	$J_3 - (2\sigma\alpha)^{-1} \ln t$	$\alpha \neq -2\beta$	$\delta_2 = 0$
$H^1_{14,2}$	t	$x^{-1/\beta} J_2$	$J_3 - {}^1/_2 \beta^{-1} \ln x$	$\alpha =$ $= -2\beta \neq 0$	$\delta_2 = 0$
$H^1_{15,1}$	$xe^{-\alpha t}$	$e^{2t} J_2$	$J_3 + kt$	$\alpha = -2\beta$	$\delta_2 = 0$
$H^1_{15,2}$	$xe^{-\alpha t}$	$e^{2t} J_2$	$x(J_3 + kt)$	$\beta = 0$	$\delta_2 = 1$
H^1_{16}	$x - mt$	$e^{2t} J_2$	$J_3 + kt$	$\alpha = \beta = 0$	$\delta_1 = 0$
		$S_2, \quad \Phi = e^{(\alpha+\beta)T}\,\Psi(\varepsilon e^{-\beta T}), \quad f = e^{\alpha T}$			
$H^2_{8,1}$	t	$2\alpha^{-1} \ln x + J_2$	$x^{\sigma} J_3$	$\alpha \neq 0$	
$H^2_{8,2}$	xt^{-n}	$m^{-1} \ln t + J_2$	$t^{n+\beta/m} J_3$	$m \neq 0$	
H^2_{9}	$xe^{-\alpha t}$	$2t + J_2$	$e^{\sigma\alpha t} J_3$	—	
H^2_{10}	$te^{2\alpha x}$	$2x + J_2$	$e^{2\beta x} J_3$	—	$\delta_1 = 0$
H^2_{11}	$x - kt$	$2t + J_2$	$e^{2\beta t} J_3$	$\alpha = 0$	$\delta_1 = 0$
H^2_{12}	$te^{2\alpha x}$	$2x + J_2$	$kx + J_3$	$\beta = 0$	$\delta_1 = 0$
$H^2_{13,1}$	xt^{-l}	$m^{-1} \ln t + J_2$	$t^{n} J_3$	$\beta = 0$ $m \neq 0$	$\delta_2 = 1$
$H^2_{13,2}$	t	$2(k+\alpha)^{-1} \ln x +$ $+ J_2$	$x^{\alpha/(k+\alpha)} J_3$	$\beta = 0$ $k \neq -\alpha$	$\delta_2 = 1$
$H^2_{14,1}$	$x^{-\beta/\sigma\alpha}$	$J_2 - (\sigma\alpha)^{-1} \ln t$	$J_3 - (2\sigma\alpha)^{-1} \ln t$	$\alpha \neq -2\beta$	$\delta_2 = 0$
$H^2_{14,2}$	t	$J_2 - \beta^{-1} \ln x$	$J_3 - (2\beta)^{-1} \ln x$	$\alpha =$ $= -2\beta \neq 0$	$\delta_2 = 0$
$H^2_{15,1}$	$xe^{-\alpha t}$	$2t + J_2$	$J_3 + kt$	$\alpha = -2\beta$	$\delta_2 = 0$
$H^2_{15,2}$	$xe^{-\alpha t}$	$J_2 + 2t$	$x(J_3 + kt)$	$\beta = 0$	$\delta_2 = 1$
H^2_{16}	$x - mt$	$J_2 + 2t$	$J_3 + kt$	$\alpha = \beta = 0$	$\delta_1 = 0$

(*Продолжение табл.*)

	$J_1=\xi$	T	v	$\alpha,\ \beta$	δ
$S_3,\ \Phi=T^{\alpha}\Psi(\varepsilon-\beta\ln T),\ f=T^{\alpha}$					
$H^3_{8,1}$	t	$x^{2/\alpha}J_2$	$x(J_3-2\beta\alpha^{-1}\ln x)$ $x(J_3-\beta\alpha^{-1}(\ln x)^2)$	$\alpha\neq 0$	$\delta_2=0$ $\delta_2=1$
$H^3_{8,2}$	xt^{-n}	$t^{1/m}J_2$	$x(J_3-\beta m^{-1}\ln t)$ $x(J_3-$ $-\beta(mn)^{-1}(\ln x)^2)$	$m\neq 0$ $m\neq-\alpha$ $m\neq 0$	$\delta_2=0$ $\delta_2=1$
$H^3_{8,3}$	x	$t^{-1/\alpha}J_2$	$J_3+\beta\alpha^{-1}x\ln x\ln t$ $x(J_3-2\beta t)$	$m=-\alpha\neq 0$ —	$\delta_2=1$ $\delta_2=0$
$H^3_{9,1}$	$xe^{-\alpha t}$	$e^{2t}J_2$	$x(J_3-\beta\alpha^{-1}(\ln x)^2)$	$\alpha\neq 0$	$\delta_2=1$
$H^3_{9,2}$	x	$e^{2t}J_2$	$J_3-2\beta xt\ln x$	$\alpha=0$	$\delta_2=1$
H^3_{10}	$te^{2\alpha x}$	$e^{2x}J_2$	$J_3-\beta x^2$	—	$\delta_1=0$
H^3_{11}	$x-kt$	$e^{2t}J_2$	$J_3-\beta k^{-1}x^2$	$\alpha=0$	$\delta_1=0$
H^3_{12}	$te^{2\alpha x}$	$e^{2x}J_2$	J_3+kx	$\beta=0$	$\delta_1=0$
$H^3_{13,1}$	t	$x^{2/\alpha}J_2$	$x(J_3+k\alpha^{-1}\ln x)$	$\beta=0$ $\alpha\neq 0$	$\delta_2=1$
$H^3_{13,2}$	xt^{-n}	$t^{1/m}J_2$	$x(J_3+{}^1/_2km^{-1}\ln t)$	$\beta=0$ $m\neq 0$	$\delta_2=1$
$H^3_{14,1}$	x	$t^{-1/\alpha}J_2$	$J_3-{}^1/_2\alpha^{-1}\ln t$	$\beta=0$ $\alpha\neq 0$	$\delta_2=0$
$H^3_{14,2}$	x	$t^{-1/2\alpha}J_2$	$J_3-{}^1/_2\alpha^{-1}x\ln t$	$\beta=0$ $\alpha\neq 0$	$\delta_2=1$
H^3_{15}	$xe^{-\alpha t}$	$e^{2t}J_2$	$x(J_3+kt)$	$\beta=0$	$\delta_2=1$
H^3_{16}	$x-mt$	$e^{2t}J_2$	$kt+J_3$	$\alpha=\beta=0$	$\delta_1=0$
$S_4,\ \Phi=e^{\alpha T}\Psi(\varepsilon-\beta T),\ f=e^{\alpha T}$					
$H^4_{8,1}$	t	$2\alpha^{-1}\ln x+J_2$	$x(J_3-2\beta\alpha^{-1}\ln x)$ $x(J_3-\beta\alpha^{-1}(\ln x)^2)$	$\alpha\neq 0$	$\delta_2=0$ $\delta_2=1$
$H^4_{8,2}$	xt^{-n}	$t^{1/m}J_2$	$x(J_3-\beta m^{-1}\ln t)$ $x(J_3-$ $-{}^1/_2\beta m^{-1}n^{-1}(\ln x)^2)$	$m\neq 0$	$\delta_2=0$ $\delta_2=1$
$H^4_{8,3}$	x	$J_2-\alpha^{-1}\ln t$	$J_3+\beta\alpha^{-1}x\ln x\ln t$ $x(J_3-2\beta t)$	$m=-\alpha\neq 0$ —	$\delta_2=1$ $\delta_2=0$
$H^4_{9,1}$	$xe^{-\alpha t}$	J_2+2t	$x(J_3-\beta\alpha^{-1}(\ln x)^2$	$\alpha\neq 0$	$\delta_2=1$
$H^4_{9,2}$	x	J_2+2t	$J_3-2\beta x\ln t$	$\alpha=0$	$\delta_2=1$
H^4_{10}	$te^{2\alpha x}$	J_2+2x	$J_3-\beta x^2$	—	$\delta_1=0$
H^4_{11}	$x-kt$	J_2+2t	$J_3-\beta k^{-1}x^2$	$\alpha=0$	$\delta_1=0$
H^4_{12}	$te^{2\alpha x}$	J_2+2x	J_3+kx	$\beta=0$	$\delta_1=0$
$H^4_{13,1}$	t	$J_2+2\alpha^{-1}\ln x$	$x(J_3+k\alpha^{-1}\ln x)$	$\beta=0$ $\alpha\neq 0$	$\delta_2=1$
$H^4_{13,2}$	xt^{-n}	$J_2+m^{-1}\ln t$	$x(J_3+$ $+{}^1/_2km^{-1}\ln t)$	$\beta=0$	$\delta_2=1$
H^4_{14}	x	$J_2-\alpha^{-1}\ln t$	$J_3-{}^1/_2\alpha^{-1}\ln t$	$\alpha\neq 0$ $\beta=0$	$\delta_2=0$
H^4_{15}	$xe^{-\alpha t}$	J_2+2t	$x(J_3+kt)$	$\beta=0$	$\delta_2=1$
H^4_{16}	$x-mt$	J_2+2t	J_3+kt	$\alpha=\beta=0$	$\delta_1=0$

§ 4. Рассмотрим некоторые из полученных инвариантных решений.

1°. Установившиеся течение и теплообмен в кольцевом пространстве между коаксиальными цилиндрами радиусов x_0 и x_1 и в пространстве между параллельными плоскостями. Решение H_1 находится в квадратурах при произвольных $\Phi(\varepsilon, T)$ и $f(T)$. Система S / H имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} J_3'' - \frac{\delta_2}{\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} J_3' + \frac{\delta_2}{\xi^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} J_3 - \frac{\partial\Phi}{\partial T} J_2' - \frac{\delta_1+\delta_2}{\xi}\Phi = 0 \\ J_3' - \frac{\delta_2}{\xi} J_3 + \varepsilon = 0, \qquad fJ_2'' + f'J_2'^2 + \frac{\delta_1}{\xi} fJ_2' = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Штрих здесь и ниже означает производную функции по ее аргументу. Общее решение системы (4.1) легко находится. Введем функцию $\chi(\tau_1, T)$ следующим образом:

$$\Phi = \tau_0(T) + \tau_1(\varepsilon, T), \qquad \tau_1(0, T) = 0, \qquad \varepsilon = \chi(\tau_1, T) \tag{4.2}$$

причем исследование всех решений будем проводить в интересующем нас случае

$$\frac{d\tau_0}{dT} \leqslant 0, \qquad \frac{\partial\tau_1}{\partial\varepsilon} > 0, \qquad \frac{\partial^2\tau_1}{\partial\varepsilon^2} \leqslant 0, \qquad \frac{\partial\tau_1}{\partial T} \leqslant 0 \tag{4.3}$$

Распределение температур дается хорошо известными выражениями

$$\begin{gathered}x = x_0 + h\frac{\vartheta(T, T_0)}{\vartheta(T_1, T_0)} \quad (\delta_1 = 0), \qquad x = x_0 \exp\left(h\frac{\vartheta(T, T_0)}{\vartheta(T_1, T_0)}\right) \quad (\delta_1 = 1) \\ \vartheta(T, T_0) = \int_{T_0}^{T} f(T)\,dT, \qquad h = \begin{cases} x_1 - x_0 & (\delta_1 = 0) \\ \ln(x_1/x_0) & (\delta_1 = 1)\end{cases}\end{gathered} \tag{4.4}$$

В данном решении можно считать $T^0 = T$, $f(T^0) = \lambda(T)$.

Здесь T_0 и T_1 — значения температуры на граничных поверхностях x_0 и x_1. Они либо заданы, либо находятся из условий теплообмена на этих границах. Пусть на границе x_1 происходит теплообмен со средой постоянной температуры T_c по закону $Q = R(T - T_c)$, где $R(z)$ — функция, ограниченная условиями $R(-z) = -R(z)$, $dR / dz > 0$. Тогда, как легко показать, уравнение для определения T_1

$$\vartheta(T_1, T_0) + x_1^{\delta_1} hR(T_1 - T_c) = 0$$

имеет единственное решение. То же самое справедливо для теплообмена на обеих поверхностях. Распределение напряжений и скоростей дается выражениями

$$\begin{gathered}\Phi = \frac{P}{x_0^{\delta_1+\delta_2}} \exp\left[-(\delta_1+\delta_2)\,\mathrm{lh}\,\frac{\vartheta(T, T_0)}{\vartheta(T_1, T_0)}\right] \\ v = x^{\delta_2}\left\{V - \frac{x_0^{\delta_1-\delta_2}}{\vartheta(T_1, T_0)} h \int_{T_0}^{T} \chi(T, P) f(T) \exp\left[h(\delta_1-\delta_2)\frac{\vartheta(T, T_0)}{\vartheta(T_1, T_0)}\right] dT\right\}\end{gathered} \tag{4.5}$$

Если граница x_1 неподвижна, то V (скорость на границе x_0, угловая скорость, если $\delta_2 = 1$) и P (величина выражаемая через силу или момент) связаны соотношением

$$V\vartheta(T_1, T_0) - x_0^{\delta_1-\delta_2} h \int_{T_0}^{T_1} \chi(T, P) f(T) \exp\left[h(\delta_1-\delta_2)\frac{\vartheta(T, T_0)}{\vartheta(T_1, T_0)}\right] dT = 0 \tag{4.6}$$

однозначно разрешимым вследствие условия (4.3) относительно P. При $\tau_0(T) \neq 0$ течение в зависимости от величины P может занимать либо всю область $(x_1 - x_0)$, либо часть ее. В последнем случае в выражениях (4.5), (4.6) интегрирование производится по области течения (вне области течения $\chi \equiv 0$), расположение которой определяется свойствами функции

$$\tau_*(T) = \tau_0(T)\, x_0^{\delta_1+\delta_2} \exp\left[(\delta_1+\delta_2)\, h\frac{\vartheta(T, T_0)}{\vartheta(T_1, T_0)}\right]$$

а для определения границ служит уравнение $P - \tau_*(T) = 0$. Анализ функции $\tau_*(T)$ показывает, что при условии $\tau_0'(T) < 0$ для $T_1 < T_0$ область течения примыкает к границе x_0. При $T_1 > T_0$ в плоском случае она примыкает к границе x_1, а в осесимметричном может быть расположена как у любой из граничных поверхностей, так и внутри кольцевого слоя.

2°. Течение в неограниченной среде $x_0 < x < \infty$, вызванное движением цилиндра конечного радиуса $x_0 > 0$. Течение в полуплоскости. Решение $H_{8,1}^{1}$.

Система (S / H) для J_2 и J_3 имеет вид

$$J_2' - \frac{2}{\alpha^2}[2 + (1+\delta_1)\alpha] J_2^{\alpha+1} = 0, \qquad J_2^{\beta} z - \frac{1}{\alpha}[\alpha(\delta_2 - 1) - 2\beta] J_3 = 0$$

$$J_3' + \frac{1}{\alpha}[(2+\delta_1+\delta_2)\alpha + 2\beta] J_2^{\alpha+\beta}\Psi(z) = 0$$

Общее решение находится в конечном виде при произвольной $\Psi(z)$

$$J_3 = z \exp(-\beta \varkappa_1(\alpha) Z(z))$$

$$\xi = \alpha \varkappa_1^{-1}(\alpha)\,[c_0 - (\delta_2 - 1 - 2\beta/\alpha)^{-\alpha/\beta} \exp(\alpha x_1(\alpha) Z(z))] \qquad \text{при } \varkappa_1 \neq 0$$

$$J_3 = c_0^{-\beta/\alpha}(\delta_2 - 1 - 2\beta/\alpha)^{-1} z, \qquad \xi = -c_0 \alpha^2 Z(z) \quad \text{при } \varkappa_1 = 0$$

$$J_2 = \left(c_0 - \frac{\varkappa_1(\alpha)}{\alpha}\xi\right)^{-1/\alpha}, \qquad Z(z) = \int \frac{dz}{\beta\varkappa_1(\alpha) z - \varkappa_2(\alpha, \beta)\Psi(z)} \tag{4.7}$$

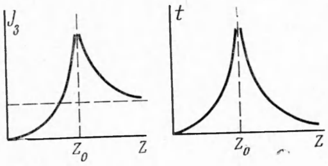
$$\varkappa_1(\alpha) = 2\,[2 + (1+\delta_1)\alpha], \qquad \varkappa_2(\alpha, \beta) = [2\beta + \alpha(1-\delta_2)]\,[(2+\delta_1+\delta_2)\alpha + 2\beta]$$

Здесь $\delta_2 - 1 - 2\beta/\alpha > 0$, так как $\delta_2 - 1 - 2\beta/\alpha = 0$ описывает движение среды как твердого тела. Рассмотрим решение, удовлетворяющее условиям:

$$T(x, 0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} T(x, t) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} v(x, t) = 0 \tag{4.8}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{\delta_1} f(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}(x^{\delta_1+\delta_2} T^{\alpha+\beta}\Psi(z)) = 0$$

из которых последние два выражают равенство нулю на бесконечности суммарного теплового потока и суммарной силы или момента. Эти условия при учете свойств (4.3) выполняются при значениях параметров



Фиг. 1

$$-\frac{2}{1+\delta_1} < \alpha < 0, \qquad \beta > -\frac{\alpha(2+\delta_1+\delta_2)}{2}$$

$$\Psi(0) = 0 \tag{4.9}$$

Условия (4.8) могут накладывать некоторые ограничения и на $\Psi(z)$.

Решение, удовлетворяющее этим условиям, имеет следующий вид

$$T = \left(-\frac{\varkappa_1(\alpha)}{\alpha}\right)^{-1/\alpha} x^{2/\alpha} t^{-1/\alpha}, \qquad v = x^{(\alpha+2\beta)/\alpha} z \exp(-\beta\varkappa_1(\alpha) Z(z))$$

$$t = -\alpha\varkappa_1^{-1}(\alpha)(\delta_2 - 1 - 2\beta/\alpha)^{-\alpha/\beta} \exp(\alpha\varkappa_1(\alpha) Z(z))$$

Оно описывает течение в среде с нулевой начальной температурой, нагреваемой на границе x_0 посредством теплового потока $Q = -2\alpha^{-1} x_0^{-1} T^{\alpha+1}(x_0, t)$ при движении тела со скоростью $V_0 = AJ_3(t)$.

Исследуя полученное решение, видим, что вследствие (4.3) и (4.9) $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$; поведение решения будет различным в зависимости от вида функции $\Psi(z)$ при малых z.

При условии $\varkappa_2(\alpha, \beta)\Psi'(0) > \beta\varkappa_1(\alpha)$ имеют место обе ветви кривых (фиг. 1, изображен случай $\varkappa_2\Psi'(0) < \varkappa_1(\beta - \alpha)$; случай $\varkappa_2\Psi'(0) \geqslant \varkappa_1(\beta - \alpha)$ отличается только видом $t(z)$ при малых z).

При $\varkappa_2(\alpha, \beta)\Psi'(0) < \beta\varkappa_1(\alpha)$ имеется только правая ветвь, причем в последнем случае следует положить $z_0 = 0$ (z_0 — корень уравнения $\beta\varkappa_1(\alpha) z - \varkappa_2(\alpha, \beta)\Psi(z) = 0$).

Движению из состояния покоя соответствует левая ветвь кривой; правая — соответствует течению, для которого в начальный момент в среде имелось поле скоростей.

Случай $\alpha = -2/(1+\delta_1)$, $\beta > (2+\delta_1+\delta_2)/(1+\delta_1)$ описывает неустановившееся течение в стационарном температурном поле. Распределение температур и скоростей имеет вид

$$T = Cx^{-(1+\delta_1)}, \qquad v = \frac{C^{\beta}}{\delta_2 - 1 + \beta(1+\delta_1)} x^{1-\beta(1+\delta_1)} z, \qquad t = \frac{4C^{\frac{2}{1+\delta_1}}}{(1+\delta_1)^2\varkappa_2}\int \frac{dz}{\Psi(z)}$$

При значениях параметров $\alpha = -2/(1+\delta_1)$, $\beta = (2+\delta_1+\delta_2)/(1+\delta_1)$ имеет место стационарное распределение температур и скоростей.

3°. Осесимметричное течение в бесконечной среде, вызванное действием расположенных на оси симметрии источника тепла и момента. Некоторые другие течения.

Решение $H_{8,2}^1$. Система $(S\,/\,H)$ имеет вид

$$\begin{gathered}
J_2^{\alpha} J_2'' + \alpha J_2^{\alpha-1} J_2'^2 + \delta_1 \frac{1}{\xi} J_2^{\alpha} J_2' + \frac{m+\alpha}{2m} J_2'\xi - \frac{1}{m} J_2 = 0 \\
J_2^{\alpha}\Psi' J_3'' - J_2^{\alpha}\Psi' J_3'\left(\beta' \frac{J_2'}{J_2} + \frac{\delta_2}{\xi}\right) + \frac{m+\alpha}{2m}\xi J_3' + \left[J_2^{\alpha}\Psi'\left(\frac{\beta J_2'}{J_2} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{\delta_2}{\xi} - \right. \\
\left. - \frac{m+\alpha+2\beta}{2m}\right] J_3 - J_2^{\alpha+\beta}\Psi\left[(\alpha+\beta)\frac{J_2'}{J_2} + \frac{\delta_1+\delta_2}{\xi}\right] = 0 \qquad z = \left(-J_3' + \frac{\delta_2 J_3}{\xi}\right) J_2^{-\beta}
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Не проводя полного анализа этой системы, рассмотрим некоторые частные решения. Исследование автомодельных решений этого типа для уравнения энергии системы S_1 (первое из уравнений (4.10)) сделано в работах [7—9]. Рассмотрим следующую краевую задачу для системы S_1:

$$T(x,\,0) = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\left(-x^{\delta_1} T^{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = t^{\gamma} \qquad (\gamma \geqslant 0) \tag{4.11}$$

$$\int_0^{\infty} T(x,\,t)\, x^{\delta_1} dx = \int_0^t \left\{\lim_{x\to 0} x^{\delta_1}\left(-T^{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right\} dt \qquad (-1 < \alpha < 0)$$

$$v(x,\,0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} v(x,\,t) = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\,[x^{\delta_1+\delta_2}\Phi(x,\,t)] = Pt^{\nu} \tag{4.12}$$

$$\delta_2 = 1, \qquad \nu = \frac{\alpha+1+2\alpha\gamma}{\alpha+1}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma < -\frac{\alpha+1}{2\alpha}$$

Введем $\chi(\psi)$ таким образом: $\Psi = \psi_0 + \psi(z)$, $\psi(0) = 0$, $z = \chi(\psi)$, тогда систему (4.10) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
J_2^{\alpha} J_2'' + \alpha J_2^{\alpha-1} J_2'^2 + \frac{1}{\xi} J_2^{\alpha} J_2' + pJ_2'\xi - \frac{\gamma}{1+\alpha} J_2 = 0, \qquad p = \frac{1+\alpha+\gamma\alpha}{2(\alpha+1)} \\
\psi' + \left(\alpha\frac{J_2'}{J_2} + \frac{2}{\xi}\right)(\psi + \psi_0) + pJ_2^{-\alpha}\xi\chi(\psi) = 0, \qquad J_3' - \frac{1}{\xi} J_3 + J_2^{\beta}\chi(\psi) = 0
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Граничные условия для J_2 и J_3 примут вид

$$\lim_{\xi\to 0}(-\xi J_2^{\alpha} J_2') = 1, \qquad \int_0^{\infty} J_2\xi d\xi = \frac{1}{1+\gamma} \tag{4.14}$$

$$\lim_{\xi\to\infty}(\xi^2 J_2^{\alpha}\Psi) = P, \qquad \lim_{\xi\to\infty} J_3 = 0 \tag{4.15}$$

Исследуем интегральные кривые первого из уравнений (4.13).

Анализ показывает, что все интегральные кривые уравнения (4.13), монотонно убывая, в случае $\psi_0 \neq 0$ пересекают ось ξ в конечных точках. В случае $\psi_0 = 0$ имеется особая точка $\psi = 0$, $\xi = 0$ типа седла, ось ξ — интегральная кривая. При $\xi \to \infty$ функции $\psi(\xi)$ и $J_2(\xi)$ стремятся асимптотически к нулю как

$$\psi = cJ_2^{-\alpha}(\xi)\,\xi^{-2}\exp\left[-p\chi'(0)\int J_2^{-\alpha}(\xi)\,\xi d\xi\right], \qquad J_2(\xi) = a\xi^{2/\alpha} + 0(\xi^{2/\alpha})$$

$$a = [-4(1+1/\alpha)]^{-1/\alpha}$$

Следовательно, для $\psi_0 = 0$ при $\chi'(0) \neq 0$ суммарный момент на бесконечности равен нулю, при $\chi'(0) = 0$ — принимает конечное значение, отличное от нуля. При $\psi \to \infty$ функция имеет вид $\chi(\psi) = B\psi^N$ $(N > 1)$. Интегральные кривые уравнения (4.13) вблизи оси ψ ведут себя следующим образом:

$$\psi = J_2^{-\alpha}\xi^{-2}\left[c + pB(N-1)\int_0^{\xi} J_2^{-\alpha N}\xi^{3-2N} d\xi\right]^{-\frac{1}{N-1}}$$

При $N < 2$ каждому значению P из условий (4.15) соответствует одна и только одна интегральная кривая. При $N \geqslant 2$ интегральных кривых, удовлетворяющих первому из условий (4.15), нет. Зная $\psi(\xi)$, найдем J_3, удовлетворяющее второму условию (4.15)

$$J_3 = \xi \int\limits_{\xi}^{\infty} \chi(\psi)\, \xi^{-1} d\xi$$

При $\psi_0 \neq 0$ область течения конечна $(0 \leqslant \xi < \xi_*)$, где ξ_* — точка пересечения кривой $\psi(\xi)$ с осью абцисс. Выражения для температур и скоростей имеют вид

$$T = t^{\frac{\gamma}{\alpha+1}} J_2(\xi), \qquad v = t^p J_3(\xi), \qquad \xi = x t^{-p} \qquad \left(p = \frac{\alpha + 1 + \gamma\alpha}{2(1+\alpha)}\right)$$

При больших x и малых t в случае $\psi_0 = 0$ имеем

$$T \sim E_1 x^{-\frac{2}{\alpha}} t^{-\frac{1}{\alpha}}, \qquad v \sim E_2 x^{-4r+1} t^{4rp} \quad \text{при} \quad \chi^{(r)}_{(0)} \neq 0, \quad r > 1$$

$$v \sim E_3 x^{-3+2s} t^{2p(2-s)}, \quad s = (1 + \gamma + 1/\alpha)\chi'(0) \text{ при } r = 1$$

Решение системы (4.10) с условиями (4.11) при $\beta = 0$, $\gamma = -(\alpha + 1)/\alpha$ можно трактовать как установившееся течение в ограниченной области $x_0 < x < x_1$, вызванное вращением либо поступательным движением цилиндра, и течение между параллельными плоскостями при условии, что к границе x_0 подводится количество тепла $Q_0 = qt^{\gamma}$, а коэффициент теплопроводности внешней среды равен коэффициенту теплопроводности изучаемой среды. Если граница x_1 неподвижна, а на границе x_0 задана скорость V, то выражения для температур и скоростей имеют вид

$$T = t^{-\frac{1}{\alpha}} J_2(x), \qquad v = x^{\delta_2} \int\limits_{x}^{x_1} \chi(\psi, P)\, x^{-\delta_2} dx, \quad \psi = P J_2^{-\alpha}(x)\, x^{-(\delta_1+\delta_2)} - \psi_0$$

а P определяется из соотношения

$$V = x_0^{\delta_2} \int\limits_{x_0}^{x_1} \chi(\psi, P)\, x^{-\delta_2} dx$$

При $\psi_0 \neq 0$ течение возникает при условии $P > \psi_0 J_2^{\alpha}(x_0) x_0^{\delta_1+\delta_2}$, при условии $P > \psi_0 J_2^{\alpha}(x_1) x_1^{\delta_1+\delta_2}$ оно займет всю область $x_0 < x < x_1$; при $\psi_0 x_0^{\delta_1+\delta_2} J_2^{\alpha}(x_0) < P < \psi_0 x_1^{\delta_1+\delta_2} J_2^{\alpha}(x_1)$ течение будет происходить в области $x_0 < x < x_*$, где x_* — корень уравнения $P = \psi_0 x^{\delta_1+\delta_2} J_2^{\alpha}(x)$, в силу условия $\alpha < 0$ — единственный.

Без подробного анализа приведем остальные решения систем S и S_1.

Решение H_4 представляется в конечном виде при произвольных $f(T)$ и $\Phi(\varepsilon, T)$.

$$x = c_0 \int f(T)\, dT, \qquad \Phi = c - c_0 \int f(T)\, dT \quad \text{при } \delta_1 = 0$$

$$x = \exp\left(c_0 \int f(T)\, dT\right), \qquad \Phi = c \exp\left[-c_0(\delta_1 + \delta_2) \int f(T)\, dT\right] -$$

$$- \frac{1}{2\delta_2 + 1 + \delta_1} \exp\left[c_0(\delta_2 + 1) \int f(T)\, dT\right] \quad \text{при } \delta_1 = 1$$

$$v = x^{\delta_2} \{t - c_0 \int \chi(T, c) f(T) \exp [c_0(\delta_1 - \delta_2) \int f(T) dT]\}$$

где χ дается формулами (4.2).

Решение H_5 описывает изотермическое установившееся течение между двумя параллельными плоскостями

$$T = \text{const}, \qquad v = k^{-1} x + c$$

Решение H_6 — типа равномерно распространяющихся волн. После введения $\chi(\tau, T)$ (4.2) система приводится к одному уравнению первого порядка

$$\frac{d\tau_1}{dJ_2} = \frac{\chi(\tau_1, J_2) + m}{J_2 - c} f(J_2) - \frac{d\tau_0(J_2)}{dJ_2}, \qquad J_3 = -\int \frac{\chi(J_2)}{c - J_2} f(J_2)\, dJ_2, \quad \xi = -\int \frac{f(J_2)\, dJ_2}{c - J_2}$$

Решения H_3 и H_7 — автомодельные. Система (S / H) имеет вид

$$f(J_2) J_2'' + f'(J_2) J_2'^2 + \frac{\delta_1}{\xi} f(J_2) J_2' + \frac{1}{2} J_2'\xi = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} J_3'' - \frac{\delta_1\Phi}{\xi} - \frac{\partial\Phi}{\partial T} J_2' + \frac{1}{2} J_3'\xi - \frac{1}{2} J_3 = 0, \qquad \varepsilon = -J_3' \quad (H_3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} \xi J_3'' - \frac{2\Phi}{\xi} - \frac{\partial\Phi}{\partial T} J_2' + \frac{1}{2} \xi^2 J_3' + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} J_3' = 0 \qquad \varepsilon = -k - J_3'\xi \quad (H_7)$$

Решение H_2 — тривиальное; $T = \text{const}$, $v = \text{const}$.

Решение $H_9{}^1$. Система (S / H) имеет вид

$$J_2{}^\alpha J_2'' + \alpha J_2{}^{\alpha-1} J_2'^2 + \frac{\delta_1}{\xi} J_2{}^\alpha J_2' + \alpha J_2'\xi - 2J_2 = 0, \qquad z = J_2{}^{-\beta}\left(-J_3' + \frac{\delta_2}{\xi} J_3\right)$$

$$\frac{d}{d\xi}[J_2{}^{\alpha+\beta}\Psi(z)] + \frac{\delta_1 + \delta_2}{\xi} J_2{}^{\alpha+\beta}\Psi(z) + (\alpha + 2\beta) J_3 - \alpha\xi \frac{dJ_2}{d\xi} = 0$$

Подстановкой $J_2 = \xi^{2/\alpha} J(\zeta)$, $\zeta = \ln \xi$ и введением новой искомой функции $Z(J) = dJ / d\zeta$ первое уравнение при $\alpha \neq 0$ приводится к уравнению первого порядка (при $\alpha = 0$ это известное уравнение).

Решение H_{10}'. Система (S / H) имеет вид

$$4\alpha^2\xi^2 J_2{}^\alpha J_2'' + 4\alpha^3\xi^2 J_2{}^{\alpha-1} J_2'^2 + [4(3\alpha + 2)\alpha\xi J_2{}^\alpha - 1] J_2' + 4(\alpha + 1) J_2{}^{\alpha+1} = 0$$

$$2\alpha\xi \frac{d}{d\xi}[J_2{}^{\alpha+\beta}\Psi(z)] + 2(\alpha + \beta) J_2{}^{\alpha+\beta}\Psi(z) + J_3' = 0, \qquad z = -2(\beta J_3 + \alpha J_3'\xi) J_2{}^{-\beta}$$

Подстановкой $J_2 = \xi^{-1/\alpha} J(\zeta)$, $\zeta = \ln \xi$ с последующим введением новой искомой функции $Z(J) = dJ / d\zeta$ первое уравнение при $\alpha \neq 0$ приводится к уравнению первого порядка. При $\alpha = 0$ система интегрируется в квадратурах при произвольной $\Psi(z)$. Распределение температур и скоростей имеет вид

$$T = c_0 \exp[2(x + 2t)], \qquad v = -\frac{1}{2\beta} z \exp\left(2\beta x - \int \frac{dz}{z - \beta\psi(z)}\right)$$

$$t = -\frac{1}{4\beta}\int \frac{dz}{z - \beta\Psi(z)} - \frac{1}{4} \ln c_0$$

Решение $H_{11}{}^1$. Уравнение для J_2 системы (S / H) интегрируется в квадратурах

$$J_2 = c_1 e^{\lambda_1\xi} + c_2 e^{\lambda_2\xi}, \qquad \lambda_{1,2} = -k/2f \pm \sqrt{(k/2f)^2 + 2/f}$$

Второе уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\xi}[J_2{}^\beta\Psi(z)] - k\frac{dJ_2}{d\xi} + 2\beta J_3 = 0, \qquad z = -J_3' J_2{}^{-\beta}$$

Решение $H^1_{13,1}$. Уравнение для J_2 системы (S / H) совпадает с уравнением из $H^1_{8,2}$. Второе уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\xi}[J_2{}^\alpha\Psi(z)] + 2\frac{J_2{}^\alpha\Psi}{\xi} + \frac{k}{2m}\xi - \frac{m + \alpha}{2m} J_3'\xi^2 = 0, \qquad z = -J_3'\xi$$

После введения $\chi(\psi)$ оно приведется к уравнению первого порядка

$$\psi' = -\left(\alpha\frac{J_2'}{J_2} + \frac{2}{\xi}\right)(\psi + \psi_0) - \frac{m + \alpha}{2m}\frac{\xi\chi(\psi)}{J_2{}^\alpha} - \frac{k}{2m}\frac{\xi}{J_2{}^\alpha}$$

Решение $H^1_{13,2}$ представляется в квадратурах при произвольной $\Psi(z)$. Распределение температур и скоростей имеет вид

$$T = \left(\frac{\alpha x^2}{c_0\alpha - 4(\alpha + 1)t}\right)^{1/\alpha}$$

$$v = x\left[c + \frac{k}{\alpha}\ln x + \frac{\alpha}{\alpha + 1}\Psi\left(-\frac{k}{\alpha}\right)\ln\left(t - \frac{c_0\alpha}{4(\alpha + 1)}\right)\right] \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$v = x\,[c - k\ln x - 4c_0{}^{-1}\Psi(k)t \qquad (\alpha = -1)$$

Решение $H^1_{14,1}$. Уравнение для J_2 совпадает с уравнением из $H^1_{8,2}$. Второе уравнение системы $(S\ /\ H)$ будет

$$\frac{d}{d\xi}\left[J_2^{\alpha+\beta}\Psi(z)\right] + \frac{\delta_1}{\xi} J_2^{\alpha+\beta}\Psi - \frac{1}{\alpha+2\beta}\left(\frac{1}{2}+\beta\xi J_3'\right)=0$$

после введения $\chi(\psi)$ оно приводится к уравнению первого порядка

$$\psi' = -\left((\alpha+\beta)\frac{J_2'}{J_2}+\frac{\delta_1}{\xi}\right)(\psi+\psi_0) - \frac{\beta}{\alpha+2\beta}\,\frac{\chi(\psi)\,\xi}{J_2^{\alpha}} + \frac{1}{2(\alpha+2\beta)}\,J_2^{-(\alpha+\beta)}$$

Решение $H^1_{14,2}$ находится в квадратурах при произвольной $\Psi(z)$. Распределение температур и скоростей имеет вид

$$T=\left(\frac{\alpha x^2}{c_0 - x_1(\alpha)\,t}\right)^{1/\alpha}$$

$$v=\frac{1}{\alpha}\ln x - \frac{(1+\delta_1)\,\alpha^2}{\varkappa_1(\alpha)}\int \frac{\Psi\left(-(1/\alpha)\,J_2^{\alpha/2}\right)}{J^{\alpha/2+1}}\,dJ_2, \qquad J_2=\left(\frac{\alpha}{c_0-\varkappa_1(\alpha)\,t}\right)^{1/\alpha}$$

Решение H_{15}^1. Уравнение для J_2 совпадает с уравнением из H_9^1. Второе уравнение системы $(S\ /\ H)$

$$\frac{d}{d\xi}\left[J_2^{\alpha/2}\Psi(z)\right] + \frac{\delta_1}{\xi} J_2^{\alpha/2}\Psi(z) - \alpha J_3'\xi + k = 0 \qquad (H^1_{15,1})$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[J_2^{\alpha}\psi(z)\right] + \frac{2}{\xi} J_2^{\alpha}\psi(z) - \alpha\xi^2 J_3' + k\xi = 0 \qquad (H^1_{15,2})$$

после введения $\chi(\psi)$ приводится к уравнению первого порядка

$$\psi' = -\left(\frac{\alpha}{2}\,\frac{J_2'}{J_2}+\frac{\delta_1}{\xi}\right)(\psi+\psi_0) - \frac{\alpha\xi}{J_2^{\alpha}}\,\chi(z) + kJ_2^{-\alpha/2} \qquad (H^1_{15,1})$$

$$\psi' = -\left(\alpha\frac{J_2'}{J_2}+\frac{2}{\xi}\right)(\psi+\psi_0) - \frac{\alpha\xi}{J_2^{\alpha}}\,\chi(\psi) - k\xi J_2^{-\alpha} \qquad (H^1_{15,2})$$

Решение H^1_{16} находится в квадратурах при произвольной $\Psi(z)$. Значение $J_2(\xi)$ совпадает с найденным в H^1_{11}. Распределение скоростей дается соотношениями:

$$v = kt - \int\frac{\chi(\psi)\,d\psi}{m\chi(\psi)+k}, \qquad \xi=\int\frac{d\psi}{m\chi(\psi)+k}$$

Поступила 9 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, 1962.
4. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантно-групповых решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, № 2.
5. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1963, № 3.
6. Суровихин К. П. Групповая классификация уравнений, описывающих одномерные нестационарные течения газа. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 3.
7. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
9. Зельдович Я. В., Компанеец А. А. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб. посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе, 1950.