

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА
В КАНАЛЕ СО СПЛОШНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ПРИ БОЛЬШОМ
МАГНИТНОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА**

A. E. Коновалов

(Москва)

Как отмечалось в ряде работ [1-3], при течении проводящего газа в поперечном магнитном поле вблизи стенок образуются магнитные пограничные слои. Если параметр обмена [4] мал, то на электроде возникает диссипативный слой [2], нарастающий по длине электрода. В работе [1] для случая электродов со слабой продольной проводимостью было показано, что при сильно выраженным эффекте Холла образуется прианодный пограничный слой.

Канал со сплошными электродами рассматривался в работе [5], где распределение электрического тока определялось с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [6].

Ниже указанный метод используется для нахождения распределения электрического потенциала в канале со сплошными электродами, при этом процессы в приэлектродной области, связанные с ионизацией и эмиссией электронов катодом, не рассматриваются. Решается линеаризованная задача, когда возмущение потока граничными условиями мало.

1. Рассмотрим движение хорошо проводящего невязкого и нетеплопроводного газа в плоском канале, мало отличающемся от прямолинейного канала с постоянным сечением. Пусть внешнее поперечное магнитное поле $H(0, 0, H_*)$ однородно и постоянно. Распределение газодинамических параметров в канале при $x = 0$ считается однородным. Верхняя и нижняя стенки канала $y = h + f(x)$, $y = f_1(x)$ при $x > 0$ являются электродами.

В случае канала постоянного сечения $f(x) \equiv f_1(x) \equiv 0$ однородное распределение параметров сохранилось бы всюду. При этом индуцируемая э.д.с. уравновешивается приложенными к электродам разностью потенциалов, создаваемой внешним источником.

Если сечение канала по длине изменяется, то в канале текут электрические токи и на газ действуют электромагнитные силы. Распределение параметров становится неоднородным.

Следуя работе [7], произведем линеаризацию по малому параметру ε ($f \sim \varepsilon h$) около решения для канала постоянного сечения

$$u = 1, \quad v = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad H = 1, \quad \varphi = -y \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем продольная и поперечная компоненты скорости u и v отнесены к характерной скорости u_* ; плотность и температура — к ρ_* , T_* ; напряженность магнитного поля — к постоянной заданной величине H_* ; электрический потенциал — к $u_* H_* h / c$; координаты x и y — к высоте канала h . (В качестве характерных величин, отмеченных звездочкой, взяты значения параметров на входе в электродный участок канала.)

После линеаризации для величин первого приближения находим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{M^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - A^2 \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{1}{R_m} \Delta H = \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{M^2 (1 - A^2) - 1}{M^2 - 1} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \Delta \varphi &= \beta \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + R_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \right) \quad (4.2) \\ \left(R_m = \frac{4\pi c u_* h}{c^2}, \quad A = \frac{H^*}{u_* \sqrt{4\pi \rho_*}}, \quad M = \frac{u_*}{\sqrt{\gamma R T_*}} \right) \end{aligned}$$

Здесь параметр Холла для электронов β определен по H_* , проводимость σ и отношение теплоемкостей γ постоянны, R — газовая постоянная, c — скорость света.

Эта система, за исключением последнего уравнения, рассматривалась в работе [5] при нахождении электрических токов. Безразмерные параметры представляют собой магнитное число Рейнольдса, числа Альфвена и Маха.

Если R_m велико, то разложение v и H по степеням R_m^{-1} дает из соответствующих уравнений системы (4.2) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial x^2} - \frac{1}{M_+^2 - 1} \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial y} + \left(1 - \frac{1}{M^2} - A^2 \right) \frac{\partial H^\circ}{\partial x} = 0, \quad M_+ = \frac{M}{\sqrt{1 + A^2 M^2}} \quad (4.3) \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{1}{M_+^2 - 1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} &= - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1 - A^2 M^2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta H^\circ, \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} + \left(1 - \frac{1}{M^2} - A^2 \right) \frac{\partial H_1}{\partial x} &= \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \Delta H^\circ \quad (4.4) \end{aligned}$$

Здесь M_+ — число Маха по быстрому магнитному звуку. В дальнейшем, как и в [5], будет рассмотрен только случай $M_+ > 1$.

Из первого уравнения (4.4) следует качественный вывод о возникновении под действием объемных сил вертикальной составляющей скорости ($v_1 \sim -J_x^\circ$, $J_x^\circ \sim \partial H^\circ / \partial y$). В случае отрицательных J_x° возникает разрежение у анода и уплотнение у катода. Происходит скос потока вверх.

В нулевом приближении (4.3) объемных сил нет. Вертикальная составляющая скорости появляется вследствие возмущения скорости на стенах, которое может создаваться за счет слабого искривления стенки, вдува, электромагнитных сил и т. д.

В качестве примера рассмотрим канал, форма верхней стенки которого задается уравнением $y = 1 + f(x)$, а нижней — уравнением $y = 0$.

Для первого уравнения (4.3) граничные условия будут следующие:

$$x = 0, \quad v^\circ = 0; \quad y = 0, \quad v^\circ = 0; \quad y = 1, \quad v^\circ = f'(x)$$

Решение (4.3) приведено в [5]. Для начального участка канала оно имеет вид

$$v^\circ = \chi_+ - \chi_-, \quad H^\circ = - \frac{M_+^2}{\chi} (\chi_+ + \chi_-), \quad \chi_{+-} = \chi (x - \kappa \pm \kappa y)$$

$$\chi(x) = 0, \quad x < 0; \quad \chi(x) = f'(x), \quad x > 0; \quad \kappa = \sqrt{M_+^2 - 1} \quad (4.5)$$

Для потенциала при $R_m \gg 1$, но конечном β / R_m из (4.2) и (4.3) получается

$$\varphi^\circ = \int_0^x v^\circ dx + \frac{\beta}{R_m} H^\circ \quad (4.6)$$

2. Полученное решение H° , φ° не удовлетворяет граничным условиям на электродах

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \beta \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \varphi = \text{const} \quad (2.1)$$

Для нахождения решения, которое было бы пригодно и вблизи электрода, воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений [6]. Следуя этому методу, нужно полученное внешнее разложение срастить с внутренним разложением.

Получим внутреннее разложение, для чего введем новые переменные

$$Y = y \sqrt{R_m}, \quad V = \sqrt{R_m} [v - v^\circ(x)]$$

где v° — значение скорости на стенке. (При таком выборе переменных $\partial V / \partial Y$ будет порядка 1 (см. (2.3).))

Из (1.2) получается

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} &= - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial Y} \\ \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} &= \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{M^2(1 - A^2) - 1}{M^2 - 1} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} - \frac{\beta}{R_m} \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{A^2 M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial H}{\partial x} \right) &+ \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v^\circ(x) - \frac{V}{\sqrt{R_m}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отбросим члены порядка $1/\sqrt{R_m}$, $1/R_m$. Уравнение для скорости интегрируется по Y

$$\partial V / \partial Y = A^2 M^2 \partial H / \partial x + r(x) \quad (2.3)$$

Используя условие сращивания с внешним разложением для скорости, найдем

$$r(x) = (1 - M^2) / M^2 \partial H^\circ / \partial x$$

Тогда из (2.3) следует, что изменение скорости v в токовом слое порядка $1/\sqrt{R_m}$. Поэтому в уравнении для потенциала (2.2) скорость оказывается равной скорости на стенке.

Исключая $\partial V / \partial Y$ из уравнений индукции и потенциала, получаем

$$\frac{1}{1 + A^2 M^2} \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H^\circ}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\beta}{R_m} \left[A^2 M^2 \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{\partial H^\circ}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

Границное условие для магнитного поля в случае прямолинейного электрода преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{R_m}} \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{\beta}{R_m} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad R_m \rightarrow \infty$$

Сформулируем граничные условия для нижнего электрода ($v^\circ(x) \equiv 0$)
 $Y = 0, \quad \partial H / \partial x = 0, \quad \varphi = 0; \quad Y \rightarrow \infty, \quad H \rightarrow H^\circ(x), \quad \varphi \rightarrow \varphi^\circ(x)$ (2.5)

Начальные условия

$$x = 0, \quad H = 0, \quad \varphi = 0$$

3. Для конкретных расчетов необходимо задать форму стенки $f(x)$. Пусть $f(x) = \frac{1}{2} \varepsilon x^2$. Найдем распределение потенциала в привалентродной области нижнего электрода (анод) для начального участка канала $\kappa \leq x \leq 2\kappa$.

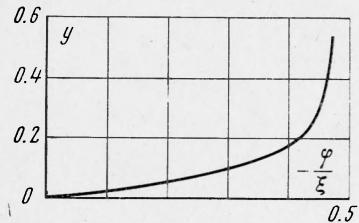
Решение (2.4) с условиями (2.5) находится с помощью интегрального преобразования Лапласа [8].

$$\Phi = \frac{2\epsilon M_+^2}{\kappa} \frac{\beta}{R_m} x \left(-1 + (1 + 2z^2) \operatorname{Erf}(z) - \frac{2}{V\pi} z e^{-z^2} \right) \quad (3.1)$$

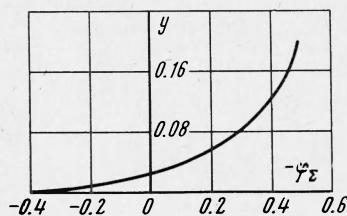
$$z = y / (2\delta \sqrt{x}), \quad \delta = 1 / \sqrt{R_m(1 + A^2 M^2)}, \quad \operatorname{Erf}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$$

Здесь $\operatorname{erf}(z)$ — интеграл вероятности, δ — характерная толщина токового слоя [5]. Начало координат помещено в точку $x = \kappa$.

Изменение потенциала около электрода показано на фиг. 1 при $x = 0.5$, $\delta = 0.02$. Из фиг. 1 видно, что потенциал сильно меняется на расстоянии от электрода порядка δ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Напряженность электрического поля E_y достигает максимума на электроде

$$y = 0, \quad E_y = \frac{2}{V\pi} \xi \frac{\sqrt{x}}{\delta}, \quad \xi = 2\epsilon \beta R_m^{-1} M_+^2 \kappa^{-1} \quad (3.2)$$

Величина изменения потенциала в токовом слое пропорциональна параметру обмена [4] ξ .

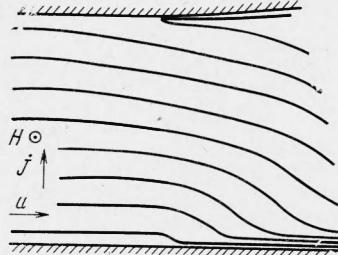
4. Рассмотрим случай, когда стенки канала прямолинейны, а возмущение создается за счет изменения прикладываемой к электродам разности потенциалов φ_Δ . Тогда нулевое приближение в разложении по $1/R_m$ решения для v , H , φ системы (1.2) будет $v^\circ \equiv 0$, $H^\circ \equiv 0$, $\varphi^\circ \equiv 0$.

Решение $\varphi^\circ \equiv 0$, которое представляет собой внешнее разложение, не удовлетворяет граничному условию $\varphi = \varphi_\Delta$ на электроде. Аналогично предыдущему полное решение находится путем сращивания внешнего и внутреннего разложения

$$\varphi = \varphi_\Delta \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y \sqrt{R_m}}{2 \sqrt{x}} \right) \right] \quad (4.1)$$

Таким образом, прикладываемая к электродам разность потенциалов оказывается сосредоточенной в приэлектродной области в соответствии с представлениями о распределении потенциала в канале, данными в [9]. Толщина этой области имеет порядок $1/\sqrt{R_m}$.

В случае криволинейной стенки и наличии возмущения потенциала на электродах решение получается в виде суммы (3.1) и (4.1). В этом можно убедиться, используя схему решения п. 1—3 с соответствующими граничными условиями для потенциала.



Фиг. 3

Изменение потенциала около стенки иллюстрируется фиг. 2. Здесь Φ_{Σ} — сумма Φ/Φ_{Δ} и Φ/ξ . Вычисления проводились при $\delta_1 = 1 \sqrt{R_m} = 0.1$, $\delta = 0.02$, $\Phi_{\Delta} = \xi / 2$.

Из фиг. 2 видно, что изменение потенциала около электрода характеризуется двумя размерами δ_1 и δ — толщиной токового слоя.

На основании изложенного выше распределение потенциала в канале можно представить таким, как показано на фиг. 3. При этом вместо слабых разрывов предполагается непрерывное изменение потенциала в тонком слое толщиной порядка δ_1 [5].

В заключение автор благодарит Г. М. Бам-Зеликовича и А. Б. Ватажина за ценные советы и Г. Г. Черного за полезные замечания.

Поступила 13 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. М о р о з о в А. И., Ш у б и н А. П. Течение плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 6.
2. М о р о з о в А. И., Ш у б и н А. П. О приэлектродных слоях в течениях хорошо проводящей невязкой плазмы. ПМТФ, 1967, № 5.
3. Ж и г у л е в В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 5.
4. М о р о з о в А. И., С о л о в'ев Л. С. Об одном параметре в теории плазменных течений. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 1.
5. К о р с у н А. Г. Течение в канале проводящего газа с большим магнитным числом Рейнольдса в линейном приближении. ПМТФ, 1968, № 5.
6. В а н - Д а й к М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
7. В а т а ж и н А. Б., Джоулевы потери в канале переменного сечения, обусловленные сжимаемостью газа. ПМТФ, 1968, № 4.
8. Л а в р е н т'ев М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, М., Физматгиз, 1958.
9. М о р о з о в А. И., С о л о в'ев Л. С. Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 7.