5. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. — 1992. — № 3.
6. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. — 1993. — № 1.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
8. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
9. Чакыров У.И. Дифференциальные инварианты некоторых расширений группы Галилея // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1985. — Вып. 69.
10. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — М.: Наука, 1985.
11. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.
12. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Ч. 1, 2.
13. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977.
14. Антановский Л.К. Симметризация уравнений фазовых превращений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1990. — Вып. 96.
15. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.

г. Новосибирск

Поступила 16/VII 1993 г.,
в окончательном варианте — 20/IX 1993 г.

УДК 532.5

С.М. Шугрин

ДИССИПАТИВНАЯ ДВУХСКОРОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

В [1] получены новые уравнения «идеальной» двухскоростной гидродинамики. В данной работе на базе общего принципа Онсагера строится диссипативная система.

1. «Идеальная» двухскоростная гидродинамика. Пусть состояние рассматриваемой системы в точке (t, x^1, x^2, x^3) характеризуется набором $(\rho_{(1)}, v_{(1)}, \rho_{(2)}, v_{(2)}, s)$, где $\rho_{(j)} \geqslant 0$ — плотность j-й компоненты, $\rho_{(1)} + \rho_{(2)} > 0$; $v_{(j)} = (v^k_{(j)})$ — скорость j-й компоненты; s — удельная энтропия. Полагаем

$$\rho \equiv \rho_{(1)} + \rho_{(2)},\ \varkappa \equiv \rho_{(1)}/\rho,\ v \equiv \varkappa v_{(1)} + (1-\varkappa)v_{(2)},\ w \equiv v_{(1)} - v_{(2)}.$$

Теперь можно считать, что состояние системы характеризуется набором $u \equiv (\rho, \varkappa, s, v, w)$. Согласно [1], минимальная двухскоростная система имеет вид

$$L^0(u) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0; \tag{1.1а.}$$

$$L^j(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^j v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j w^k + p\delta^{jk}] = 0; \tag{1.1б.}$$

$$L_E(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + v^2/2)] + \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho v^k[\varepsilon + v^2/2 + p/\rho] + \rho w^k[\varkappa(1-\varkappa)(v\cdot w) + \varkappa(1-\varkappa)\mu_{(1)0} + T\zeta_{(12)}/\rho + \varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa)w^2/2]\} = 0; \tag{1.2}$$

$$l^0_{(1)}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\varkappa\rho) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^k] - q_{(1)} = 0; \tag{1.3а}$$

$$(1.3б)\qquad l^j_{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}[\varkappa\rho v^j + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j] + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^j v^k +$$

$$+ \varkappa(1-\varkappa)\rho(v^j w^k + v^k w^j) + \varkappa(1-\varkappa)^2\rho w^j w^k] +$$

$$+ \varkappa\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(1)0}}{\partial x^j} + \zeta_{(12)}\frac{\partial T}{\partial x^j} - q_{(1)}v^j + fw^j = 0.$$

Уравнения (1.1) представляют собой закон сохранения массы-импульса для системы в целом, (1.2) — закон сохранения энергии, (1.3) — закон баланса массы-импульса для компоненты 1. Здесь $\varepsilon(\rho, \varkappa, s, w^2)$ — удельная внутренняя энергия двухскоростной системы, определяемая согласно принятой в [1] гипотезе I, выражениями

$$\rho(\varepsilon + v^2/2) = \rho\varepsilon_0(\rho, \varkappa, s) + \rho_{(1)}v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)}v^2_{(2)}/2,$$

$$d\varepsilon_0 = Tds - pd(1/\rho) + \mu_{(1)0}d\varkappa,$$

т.е. $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa(1-\varkappa)w^2/2$. Отсюда следует

$$(1.4)\qquad d\varepsilon = Tds - pd(1/\rho) + [\mu_{(1)0} + (1-2\varkappa)w^2/2]d\varkappa + \varkappa(1-\varkappa)w^k dw^k.$$

Функции $\varepsilon_0(\rho, \varkappa, s)$, $\zeta_{(12)}(\rho, \varkappa, s, w^2)$, $q_{(1)}(\rho, \varkappa, s, w^2)$, $f(\rho, \varkappa, s, w^2)$ предполагаются заданными. Из (1.1) — (1.4) вытекает закон сохранения энтропии

$$(1.5)\qquad L_s(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k + \zeta_{(12)}w^k) - \theta = 0,$$

$$\theta \equiv (fw^2 - \mu_{(1)}q)/T, \ \mu_{(1)} \equiv \mu_{(1)0} - (1-2\varkappa)w^2/2.$$

Иначе уравнения «идеальной» двухскоростной гидродинамики (1.1)—(1.3) можно записать в виде

$$(1.6а)\qquad l^0_{(1)}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)}) - q_{(1)} = 0;$$

$$(1.6б)\qquad l^j_{(1)}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)}) +$$

$$+ \varkappa\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(1)0}}{\partial x^j} + \zeta_{(12)}\frac{\partial T}{\partial x^j} - q_{(1)}v^j + f(v^j_{(1)} - v^j_{(2)}) = 0;$$

$$(1.7а)\qquad l^0_{(2)}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)}v^k_{(2)}) - q_{(2)} = 0;$$

$$(1.7б)\qquad l^j_{(2)}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)}) +$$

$$+ (1-\varkappa)\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(2)0}}{\partial x^j} + \zeta_{(21)}\frac{\partial T}{\partial x^j} - q_{(2)}v^j + f(v^j_{(2)} - v^j_{(1)}) = 0;$$

$$\zeta_{(21)} \equiv -\zeta_{(12)}, \ \mu_{(2)0} \equiv -\mu_{(1)0}, \ q_{(2)} \equiv -q_{(1)};$$

$$(1.8)\qquad L_E(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}[\rho\varepsilon_0 + \rho_{(1)}v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)}v^2_{(2)}/2] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho_{(1)}v^k_{(1)}[\varepsilon_0 + v^2_{(1)}/2 + p/\rho + (1-\varkappa)\mu_{(1)0} + T\zeta_{(12)}/\rho_{(1)}] +$$

$$+ \rho_{(2)}v^k_{(2)}[\varepsilon_0 + v^2_{(2)}/2 + p/\rho + \varkappa\mu_{(2)0} + T\zeta_{(21)}/\rho_{(2)}]\} = 0.$$

Уравнения (1.6) представляют собой закон баланса массы-импульса для компоненты 1, (1.7) — для компоненты 2, (1.8) — закон сохранения энергии. Складывая (1.6) и (1.7), получаем закон сохранения массы-импульса для системы в целом:

(1.9а) $$L^0(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)} + \rho_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^k_{(2)}) = 0;$$

(1.9б) $$L^j(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)} + p\delta^{jk}) = 0.$$

Выражения (1.6), (1.8), (1.9) есть иная форма записи выражений (1.3), (1.2), (1.1) соответственно. Из (1.6)—(1.8) с учетом (1.4) следует (1.5).

Если $w \simeq 0$, то уравнения (1.1), (1.2), (1.3а) переходят в уравнения односкоростной гидродинамики:

(1.10а) $$L^0(u) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0;$$

(1.10б) $$L^j(u) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^j v^k + p\delta^{jk}] = 0;$$

(1.11) $$L_E(u) = \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon_0 + v^2/2)] + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^k(\varepsilon_0 + v^2/2 + p/\rho)] = 0;$$

(1.12) $$l^0_{(1)}(u) = \frac{\partial}{\partial t}(\varkappa\rho) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\varkappa\rho v^k) - q_{(1)} = 0.$$

Умножая (1.10а) на $q_0 \equiv -(\gamma_0 - v^2/2)/T$, где $\gamma_0 \equiv \varepsilon_0 + p/\rho - Ts - \varkappa\mu_{(1)0}$, (1.10б) — на $q_j \equiv -v^j/T$, (1.11) — на $1/T$, (1.12) — на $-\mu_{(1)0}/T$, находим закон сохранения энтропии

(1.13) $$L_s(u) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k) = 0.$$

2. Общий принцип Онсагера. Пусть имеется система уравнений, записанная в форме законов сохранения:

(2.1) $$\frac{\partial\varphi^0_s(u)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^k_s(u)}{\partial x^k} - f_s(u) = 0 \ (s = 1, \dots, m).$$

Здесь $u \equiv (u_1, \dots, u_m)$; $\varphi^\alpha_s(u)$, $f_s(u) \in R$. Предполагается, что система законов сохранения полна в смысле [2]. Это означает, что существуют $q^s(u)$ такие, что после умножения (2.1) на q^s получается еще один закон сохранения

(2.2) $$\frac{\partial\Phi^0(u)}{\partial t} + \frac{\partial\Phi^k(u)}{\partial x^k} - F(u) = 0;$$

(2.3) $$d\Phi^\alpha(u) = q^s d\varphi^\alpha_s, \ F = q^s f_s,$$

причем преобразование $u \to q(u)$ $(q \equiv (q^1, \dots, q^m))$ взаимно однозначно, т.е. однозначно определено обратное отображение $q \to u$. Величины (q^s) называются интегрирующими множителями, законы сохранения (2.1) — базисными, а (2.2) — замыкающим законом сохранения. Например, для системы (1.10)—(1.12) интегрирующие множители при подходящей нумерации примут вид

(2.4) $$q_0 = -(\gamma_0 - v^2/2)/T, \ q_j = -v^j/T, \ q_4 = 1/T, \ q_5 = -\mu_{(1)0}/T.$$

Пусть система (2.1) инвариантна относительно полной группы Галилея Г [1], в частности относительно группы SO (3), т.е. группы вращений. Предположим далее, что исходный набор интегрирующих множителей $(q^1, \dots, q^m)$ может быть представлен в виде набора $(z_{<1>}, \dots, z_{<r>})$, где каждое $z_{<p>}$ при преобразованиях из SO (3) преобразуется по тензорному правилу, т.е. представляет собой некоторый SO (3)-тензор (скаляр, вектор,...). Так, для (1.10)—(1.12), согласно (2.4), набор q включает три

$SO(3)$-скаляра: $-(\gamma_0 - v^2/2)/T$, $1/T$, $-\mu_{(1)0}/T$, а также один $SO(3)$-вектор $-v/T$.

Далее нас будет интересовать группа отражений координат. Группа $SO(3)$, дополненная отражениями, превращается в группу $O(3)$ ортогональных преобразований пространства R^3.

Теперь есть две основные возможности. Во-первых, каждое $z_{<p>}$ при всех преобразованиях из $O(3)$ преобразуется как тензор соответствующего типа (и будет называться в этом случае эвклидовым тензором соответствующего типа). Во-вторых, некоторые $z_{<k>}$ могут преобразовываться как относительные тензоры веса 1 [3] (и будут называться относительным эвклидовым тензором соответствующего типа). Напомним, что $T \equiv (T^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q})$ называется относительным тензором веса 1 типа (p, q), если при преобразовании координат $x \to \tilde{x}(x)$ T преобразуется по правилу $T(x) \to \tilde{T}(\tilde{x})$:

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q} = \det\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{i_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \tilde{x}^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial \tilde{x}^{k_q}} T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}.$$

В частности, ζ — относительный эвклидов скаляр, если при зеркальном отражении координат $\zeta \to -\zeta$.

Если имеет место первый случай, то система (2.1) будет называться системой онсагерова типа, а если второй — системой типа Онсагера — Казимира. Например, система (1.10)—(1.12) относится к онсагерову типу. Для систем онсагерова типа диссипативные члены вводятся так, что для них выполняются условия симметрии (см. ниже), тогда как для систем Онсагера — Казимира для соотношений, связывающих тензоры и относительные тензоры, выполняются условия антисимметрии.

Далее будет предполагаться, что (2.1) относится к онсагерову типу. Переход от (2.1) к диссипативной онсагеровой системе сводится к тому, что в (2.1) вводятся диссипативные слагаемые, так что получаются уравнения [4, 5]

$$\frac{\partial \varphi^0_s(u)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k_s(u)}{\partial x^k} - f_s(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[L^{kj}_{sr}(u)\frac{\partial q^r}{\partial x^j}\right], \tag{2.5}$$

причем выполняются условия симметрии

$$L^{kj}_{sr}(u) = L^{jk}_{rs}(u). \tag{2.6}$$

Умножим (2.5) на q^s и воспользуемся (2.3). Вместо (2.2) имеем

$$\frac{\partial \Phi^0(u)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^k(u)}{\partial x^k} - F(u) = \sigma + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[q^s L^{kj}_{sr}\frac{\partial q^r}{\partial x^j}\right]; \tag{2.7}$$

$$\sigma \equiv -L^{kj}_{sr}(u)\frac{\partial q^s}{\partial x^j}\frac{\partial q^r}{\partial x^k}. \tag{2.8}$$

Функция σ должна удовлетворять еще требованиям диссипативности и инвариантности. В нашем случае замыкающим является закон сохранения энтропии ($\Phi^0 = \rho s$), поэтому принимаются следующие условия.

Условия диссипативности:

$$\sigma \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Условие инвариантности: функция σ, определяемая выражением (2.8), есть галилеев скаляр (ср. тензорную классификацию в [1]).

С учетом (2.6) выражение (2.5) записывается в виде

$$\frac{\partial \varphi^0_s}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^k_s}{\partial x^k} - f_s = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial(\partial q^s/\partial x^k)}\right], \tag{2.10}$$

причем $L^{kj}_{sr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial(\partial q^s/\partial x^k)\partial(\partial q^r/\partial x^j)}$.

Обратно, пусть задана функция $\sigma(u,\partial q/\partial x)$, квадратично зависящая от производных. Если взять

$$L^{kj}_{sr} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial(\partial q^s/\partial x^k)\partial(\partial q^r/\partial x^j)},$$

то

$$L^{kj}_{sr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial(\partial q^s/\partial x^k)\partial(\partial q^r/\partial x^j)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial(\partial q^r/\partial x^j)\partial(\partial q^s/\partial x^k)} = L^{jk}_{rs},$$

т.е. условие симметрии (2.6) выполнено.

Итак, общая процедура введения диссипативных слагаемых в онсагерову систему (2.1) при замыкающем законе сохранения энтропии сводится к следующему:

1) находятся интегрирующие множители $(q^1, \ldots, q^m)$, что при известных $\Phi^0(u)$ и $\varphi^0(u)$ удобнее всего делать, исходя из (2.3), т.е. из соотношения

$$d\Phi^0 = q^s d\varphi^0_s; \tag{2.11}$$

2) находится общая форма галилеева инварианта $\sigma(u, \partial q/\partial x)$, квадратично зависящего от производных $(\partial q^s/\partial x^k)$;

3) выписываются условия, обеспечивающие выполнение условия диссипативности (2.9);

4) с помощью (2.10) окончательно определяется диссипативная онсагерова система.

Данный способ введения диссипативных слагаемых далее распространяется на системы, для которых отображение $q \to u$, обратное к $u \to q(u)$, многозначно (для некоторых q может быть конечное множество прообразов u). Такие системы могут появиться при наличии фазовых переходов [1]. Этот же принцип будет использован далее в двухскоростной гидродинамике, не все уравнения которой имеют форму законов сохранения.

З а м е ч а н и е 2.1. Часто еще требуют, чтобы выполнялся «принцип Кюри» — принцип «сохранения симметрии причины в симметрии следствий». В подобных случаях он интерпретируется так: если q^r и q^s входят как компоненты в тензоры разных рангов, то $L^{jk}_{rs} = 0$ (при этом обычно рассматривается случай, когда L^{jk}_{rs} относительно индексов jk имеет диагональную структуру, т.е. $L^{jk}_{rs} \equiv L_{rs}\delta^{jk}$). Насколько мне известно, у самого Кюри такого утверждения нет — ему принадлежит иной «принцип диссимметрии». Если величины L^{jk}_{rs} являются константами или зависят только от скаляров, то «принцип Кюри» следует из требования инвариантности σ. Если же возможна зависимость $L^{jk}_{rs}(u)$ от векторов и других тензоров ранга $\geqslant 1$, то, как я полагаю, «принцип Кюри» в такой формулировке, вообще говоря, не верен (см. также п. 3). Таким образом, точная и общая формулировка того позитивного содержания, которое обычно вкладывается в «принцип Кюри», состоит в требовании инвариантности σ.

З а м е ч а н и е 2.2. Во время обсуждения этой проблематики с А.Н. Коноваловым выяснилось, что (2.5) иногда целесообразнее записывать в виде

$$\frac{\partial\varphi^0(u)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^k(u)}{\partial x^k} + f(u) + (l^*Sl)q = 0, \tag{2.12}$$

$$\varphi^\alpha = (\varphi^\alpha_1, \ldots, \varphi^\alpha_m),\ f = (f_1, \ldots, f_m),\ q = (q^1, \ldots, q^m),$$

где l — линейный дифференциальный оператор; l^* — оператор, к нему сопряженный; $S(u)$ — симметричный оператор.

Насколько можно сейчас судить, операторы l и l^* выражаются через стандартный базисный набор элементарных тензорных операторов (дифференциальных форм) для симметричных и кососимметричных тензоров, удовлетворяющих условиям инвариантности. Они находятся из соображений тензорной классификации (ср. [1]). В этом отношении форма (2.12) кажется перспективной для описания и анализа общего вида онсагеровых диссипативных систем.

З а м е ч а н и е 2.3. Более четкий анализ онсагеровых систем получается для релятивистских систем, где вместо $SO(3)$-инвариантности систематически используется более сильное требование лоренцевой инвариантности [5]. Для галилеевых систем аналогичный подход невозможен из-за отсутствия невырожденной метрики в галилеевом 4-мерном координатном пространстве.

З а м е ч а н и е 2.4. В данном разделе формулируется только общий принцип. В конкретных задачах могут возникнуть дополнительные ограничения, отражающие специфику задачи или вытекающие из соображений простоты.

3. Диссипативные двухскоростные системы. Обратимся к уравнениям (1.1)—(1.3), (1.5). Вычислим для них интегрирующие множители. Для этого преобразуем дифференциальную форму (1.4). Запишем (1.4) в виде

$$d(\rho s) = -\frac{(\gamma_0 - \varkappa^2 w^2/2)}{T}d\rho + \frac{1}{T}d(\rho\varepsilon) - \tag{3.1}$$

$$-\frac{1}{T}(\mu_{(1)0} - (1-2\varkappa)w^2/2)d(\rho\varkappa) - \frac{w^k}{T}d[\varkappa(1-\varkappa)\rho w^k],$$

$$\gamma_0 \equiv \varepsilon_0 + p/\rho - Ts - \varkappa\mu_{(1)0}.$$

Таким образом, в соответствии с [1] величины $\rho, \rho\varepsilon, \rho\varkappa, \varkappa(1-\varkappa)\rho w$ являются каноническими (термодинамическими) переменными первого рода, а $\rho s = \Phi(\rho, \rho\varepsilon, \rho\varkappa, \varkappa(1-\varkappa)\rho w)$ есть первый канонический (термодинамический) потенциал. Далее (3.1) преобразуем в полную дифференциальную форму. Обозначим $E \equiv \rho(\varepsilon + v^2/2)$. Теперь ρs рассматривается как функция девяти величин: $\rho, \rho v, E, \rho\varkappa, \varkappa\rho v + \varkappa(1-\varkappa)\rho w$. Из (3.1) следует

(3.2)

$$d(\rho s) = q_0 d\rho + q_j d(\rho v^j) + q_4 dE + q_5 d(\rho\varkappa) + q_{5+j}d[\varkappa\rho v^j + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j];$$

$$q_0 \equiv -\frac{1}{T}[\gamma_0 - \varkappa^2 w^2/2 + \varkappa(v\cdot w) - v^2/2] = -\frac{1}{T}[\gamma_0 - v_{(2)}^2/2]; \tag{3.3а}$$

$$q_j \equiv -\frac{1}{T}(v^j - \varkappa w^j) = -\frac{1}{T}v^j_{(2)}; \tag{3.3б}$$

$$q_4 \equiv 1/T; \tag{3.3в}$$

$$q_5 \equiv \frac{1}{T}[\mu_{(1)0} - (1-2\varkappa)w^2/2 - (v\cdot w)] = \tag{3.3г}$$

$$= -\frac{1}{T}[\mu_{(1)0} - v_{(1)}^2/2 + v_{(2)}^2/2];$$

$$q_{5+j} \equiv -\frac{1}{T}w^j. \tag{3.3д}$$

Интегрирующие множители найдены (ср. (1.1)—(1.3), (1.5), (3.2), (3.3) с (2.1), (2.2), (2.11)). Теперь задача состоит в том, чтобы определить инвариант σ. Сформулируем вначале общие ограничения на σ, помимо указанных в п. **2**. В закон сохранения массы (1.1а) диссипативные слагаемые обычно не вводятся. Поэтому инвариант σ не должен зависеть от $(\partial q_0/\partial x^k)$.

Разложим тензор $(\partial v^j/\partial x^k)$ на сумму диагонального тензора $(\delta^{ik}\partial v^j/\partial x^j)$, симметричного бесследового с компонентами $(1/2)(\partial v^j/\partial x^k + \partial v^k/\partial x^j) - (2/3)(\delta^{ik}\partial v^j/\partial x^j)$ и кососимметричного с компонентами $\Omega_{ik} \equiv (1/2)(\partial v^j / \partial x^k - \partial v^k/\partial x^j)$. Инвариант σ не зависит от (Ω_{ik}). Это обусловлено тем, что, когда жидкость вращается, как твердое тело, диссипация отсутствует [6]. Но в тех случаях, когда гетерогенная среда не допускает подобных движений, можно ли утверждать, что σ не зависит от (Ω_{ik})?! Заметим, что ниоткуда не следует, что σ не зависит от $\omega_{ik} \equiv (1/2)(\partial w^j/\partial x^k - \partial w^k/\partial x^j)$.

Получающееся в итоге общее выражение для σ оказывается весьма громоздким. Поэтому из соображений простоты берется выражение

(3.4)
$$\sigma = \frac{\chi}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^j}\frac{\partial T}{\partial x^j} + \frac{2\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^j}\frac{\partial \xi}{\partial x^j} + \lambda\frac{\partial \xi}{\partial x^j}\frac{\partial \xi}{\partial x^j} + \sum_{s,j,k}\left\{\frac{\eta_{(s)}}{2T}\left(\frac{\partial v^j_{(s)}}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k_{(s)}}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(s)}}{\partial x^l}\right)^2 + \frac{\zeta_{(s)}}{T}\left(\frac{\partial v^l_{(s)}}{\partial x^l}\right)^2\right\},$$
$$\xi \equiv \mu_{(1)0}/T.$$

В (3.4) величины $\chi, \alpha, \lambda, \eta_{(s)}, \zeta_{(s)}$ могут зависеть только от скаляров ρ, $\varkappa$, s, w^2 (см. также гидродинамику сверхтекучей жидкости в [6]).

Условие неотрицательности квадратичной формы (3.4) запишем в виде
$$\eta_{(s)} \geqslant 0, \zeta_{(s)} \geqslant 0, \chi \geqslant 0, \lambda \geqslant 0, \chi\lambda \geqslant \alpha^2.$$

Удобно далее вычислять диссипативные слагаемые для системы (1.6)—(1.8). Найдем для нее интегрирующие множители:
$$d(\rho s) = \sum_k \{h^0_{(k)}d\rho_{(k)} + h^j_{(k)}d(\rho_{(k)}v^j_{(k)})\} + \tau dE,$$
$$h^0_{(1)} \equiv -\frac{1}{T}[\varepsilon_0 + p/\rho - Ts + (1-\varkappa)\mu_{(1)0} - v^2_{(1)}/2],\ h^j_{(1)} \equiv -\frac{1}{T}v^j_{(1)},$$
$$h^0_{(2)} \equiv -\frac{1}{T}[\varepsilon_0 + p/\rho - Ts - \varkappa\mu_{(1)0} - v^2_{(2)}/2],\ h^j_{(2)} \equiv -\frac{1}{T}v^j_{(2)},$$
$$\tau \equiv 1/T.$$

Далее следует выразить производные в (3.4) через производные от $h^\alpha_{(k)}$ и τ. Например, имеем
$$\xi = -h^0_{(1)} + v^2_{(1)}/2T + h^0_{(2)} - v^2_{(2)}/2T,$$
откуда
$$\frac{\partial \xi}{\partial x^k} = -\frac{\partial h^0_{(1)}}{\partial x^k} + v^j_{(1)}\frac{\partial}{\partial x^k}(v^j_{(1)}/T) + \frac{\partial h^0_{(2)}}{\partial x^k} - v^j_{(2)}\frac{\partial}{\partial x^k}(v^j_{(2)}/T) - (v^2_{(1)}/2 - v^2_{(2)}/2)\partial\tau/\partial x^k.$$

После вычислений приходим к уравнениям

(3.6а)
$$l^0_{(1)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\lambda\frac{\partial \xi}{\partial x^k} + \frac{\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\};$$

(3.6б)
$$l^j_{(1)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\lambda v^j_{(1)}\frac{\partial \xi}{\partial x^k} + \frac{\alpha}{T}v^j_{(1)}\frac{\partial T}{\partial x^k} + \eta_{(1)}\left(\frac{\partial v^j_{(1)}}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k_{(1)}}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(1)}}{\partial x^l}\right) + \zeta_{(1)}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(1)}}{\partial x^l}\right\};$$

(3.7а) $$\ell^0_{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{-\lambda\frac{\partial\xi}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\};$$

(3.7б) $$l^j_{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{-\lambda v^j_{(2)}\frac{\partial\xi}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{T}v^j_{(2)}\frac{\partial T}{\partial x^k} + \eta_{(2)}\left(\frac{\partial v^j_{(2)}}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k_{(2)}}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(2)}}{\partial x^l}\right) + \zeta_{(2)}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(2)}}{\partial x^l}\right\};$$

(3.8) $$L_E(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\chi\frac{\partial T}{\partial x^k} + \alpha T\left[\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \frac{1}{T^2}(v^2_{(1)}/2 - v^2_{(2)}/2)\frac{\partial T}{\partial x^k}\right] + \lambda(v^2_{(1)}/2 - v^2_{(2)}/2)\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \sum_q v^j_{(q)}\left[\eta_{(q)}\left(\frac{\partial v^k_{(q)}}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j_{(q)}}{\partial x^k} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(q)}}{\partial x^l}\right) + \zeta_{(q)}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(q)}}{\partial x^l}\right]\right\}.$$

Умножим (3.6а) на $h^0_{(1)}$, (3.6б) на $h^j_{(1)}$, (3.7а) на $h^0_{(2)}$, (3.7б) на $h^j_{(2)}$, (3.8) на τ и сложим. В результате получим

(3.9) $$L_s(u) = \sigma + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\chi}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k} + \alpha T\frac{\partial}{\partial x^k}(\xi/T) - \lambda\xi\frac{\partial\xi}{\partial x^k}\right\}.$$

Уравнения (3.6)—(3.8) вместе со следующим из них равенством (3.9) представляют собой полную систему уравнений диссипативной двухскоростной гидродинамики. Складывая (3.6) и (3.7), имеем

(3.10а) $$L^0(u) = 0;$$

(3.10б) $$L^j(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\sum_q\left[\eta_{(q)}\left(\frac{\partial v^j_{(q)}}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k_{(q)}}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(q)}}{\partial x^l}\right) + \zeta_{(q)}\delta^{jk}\frac{\partial v^l_{(q)}}{\partial x^l}\right]\right\}.$$

Если $w \approx 0$, то (3.10), (3.8), (3.6а) переходят в уравнения односкоростной гидродинамики:

(3.11а) $$L^0(u) = 0;$$

(3.11б) $$L^j(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) + \zeta\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right\},$$

$$\eta \equiv \eta_{(1)} + \eta_{(2)},\ \zeta \equiv \zeta_{(1)} + \zeta_{(2)};$$

(3.12) $$L_E(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\chi\frac{\partial T}{\partial x^k} + \alpha T\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + v^j\left[\eta\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) + \zeta\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right]\right\};$$

(3.13) $$\ell^0_{(1)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\lambda\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \frac{\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\}.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Удивительно, но, по-видимому, никто не пытался проверить, что трение в уравнениях Навье — Стокса (3.11б) и (3.12) фактически введено так, что выполняется принцип Онсагера. При этой проверке одновременно выяснилось бы, что «принцип Кюри» здесь не верен, что, конечно, вызвано тем, что соответствующие кинетические коэффициенты L^{jk}_{sr} зависят от вектора v (в канонической записи! Впрочем, для уравнения энергии это ясно уже из (3.12)).

4. Нетрадиционный подход. Использованный в п.3 способ получения диссипативных слагаемых соответствует классическому принципу Онсагера, в его общей форме описанному в п. 2. Для односкоростных систем в настоящее время нет сомнения в его правильности (при условии, конечно, что диссипативные слагаемые берутся линейными относительно производных). Но для двухскоростных систем полной уверенности в этом нет, и потому ниже будет описан альтернативный вариант записи диссипативных слагаемых.

Уравнения баланса импульса для компонент (1.6б) и (1.7б) недивергентны. Сила, вызванная общим давлением $\partial p/\partial x$, распределяется по компонентам пропорционально их массовой доле: $\varkappa$ и $(1-\varkappa)$. Правдоподобно, что это должно быть верно и для других сил, действующих на систему в целом (и входящих в закон сохранения общего импульса). Напротив, уравнения, относящиеся к системе в целом — законы сохранения массы-импульса, энергии и другие (если они имеются), — вообще говоря, должны сохранять свою дивергентную структуру. Исходя из этих эвристических соображений, запишем уравнения (ср. с (3.6) — (3.8))

(4.1а) $$l^0_{(1)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\lambda\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \frac{\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\};$$

(4.1б) $$l^j_{(1)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\lambda v^j_{(1)}\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \frac{\alpha}{T}v^j_{(1)}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\} + \\ + \varkappa\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) + \zeta\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right\};$$

(4.2а) $$l^0_{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{-\lambda\frac{\partial\xi}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\};$$

(4.2б) $$l^j_{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{-\lambda v^j_{(2)}\frac{\partial\xi}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{T}v^j_{(2)}\frac{\partial T}{\partial x^k}\right\} + \\ + (1-\varkappa)\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) + \zeta\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right\};$$

(4.3.) $$L_E(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\tilde{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial x^k} + \alpha T\left[\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \frac{1}{T^2}(v^2_{(1)}/2 - v^2_{(2)}/2)\frac{\partial T}{\partial x^k}\right] + \right. \\ + \lambda(v^2_{(1)}/2 - v^2_{(2)}/2)\frac{\partial\xi}{\partial x^k} + \\ \left. + v^j\left[\eta\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) + \zeta\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right]\right\}.$$

Складывая (4.1) и (4.2), получим закон сохранения массы-импульса для системы в целом:

(4.4а) $$L^0(u) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0;$$

(4.4б) $$L^j(u) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right) + \zeta\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right\}.$$

Здесь η, ζ, χ, α зависят только от ρ, $\varkappa$, s, w^2 (или другого эквивалентного набора скаляров). Умножим (4.1а) на $h^0_{(1)}$, (4.1б) — на $h^j_{(1)}$, (4.2а) — на $h^0_{(2)}$, (4.2б) — на $h^j_{(2)}$, (4.3) — на τ и сложим. В результате имеем

$$L_s(u) = \tilde{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\chi}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k} + \alpha T\frac{\partial}{\partial x^k}(\xi/T) - \lambda\xi\frac{\partial\xi}{\partial x^k}\right\},$$

$$\tilde{\sigma} \equiv \frac{\chi}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^j}\frac{\partial T}{\partial x^j} + \frac{2\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x^j}\frac{\partial\xi}{\partial x^j} + \lambda\frac{\partial\xi}{\partial x^j}\frac{\partial\xi}{\partial x^j} +$$

$$+\sum_{j,k}\left\{\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k}+\frac{\partial v^k}{\partial x^j}-\frac{2}{3}\delta^{jk}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right)^2+\frac{\zeta}{T}\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^j}\right)^2\right\}.$$

В настоящее время нельзя уверенно утверждать, какой из двух вариантов построения двухскоростных диссипативных уравнений правилен (но все же вариант (4.1)—(4.4) кажется более естественным). Для окончательного выбора нужны дополнительные аргументы. В конечном счете необходимо корректное обобщение принципа Онсагера на двухскоростные системы. Но для этого нужно ясно осознать, что здесь имеется проблема, и ее выявление есть одна из основных целей настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шугрин С.М. Двухскоростная гидродинамика и термодинамика // ПМТФ. — 1994. — № 4.
2. Шугрин С.М. Законы сохранения, инвариантность и уравнения газовой динамики // ПМТФ. — 1989. — № 2.
3. Сокольников И.С. Тензорный анализ. — М.: Наука, 1971.
4. Годунов С.К. Интересный класс квазилинейных систем // ДАН СССР. — 1961. — № 3.
5. Шугрин С.М. Об уравнениях диссипативной лоренцевой гидродинамики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1990. — № 96.
6. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.

г. Новосибирск *Поступила 16/VII 1993 г., в окончательном варианте — 20/IX 1993 г.*

УДК 532.2

Ю.Г. Губарев

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

В аналитической механике широко известны теоремы Ляпунова и Четаева (обращения теоремы Лагранжа) [1, 2], состоящие в доказательстве неустойчивости положения равновесия механической системы при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии. Путь обобщения этих теорем на системы, содержащие твердые тела и жидкость, был предложен Румянцевым [3, 4]. Этот подход получил дальнейшее развитие в работах [5—10], где при помощи вириального функционала Ляпунова [3, 11] доказана неустойчивость ряда равновесий жидкостей.

В настоящей работе рассматривается пример обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике самогравитирующей жидкости. Изучается задача устойчивости состояний равновесия (покоя) безграничной самогравитирующей сжимаемой среды [12—14]. Прямым методом Ляпунова доказано, что система неустойчива, если существуют малые возмущения плотности, уменьшающие потенциальную энергию. В линейном приближении получены двусторонние оценки роста возмущений. Оценка снизу гарантирует экспоненциальное увеличение энергии гравитационного поля. Оценка сверху показывает, что возмущения возрастают не быстрее, чем экспоненциально. Показатели экспонент в обоих случаях вычисляются по параметрам состояний равновесия и начальным данным для полей возмущений. В силу соотношений точной задачи получена оценка снизу, свидетельствующая о