

составляющие 130—490, почти на порядок превышают критическое значение числа Пекле на кондуктивном пределе.

В заключение отметим, что процессы горения и охлаждения вращающегося газа сопровождаются сложными радиальными движениями свежего газа и продуктов сгорания, приводящими, в свою очередь, к градиенту скорости вращения газа по радиусу  $d\omega/dr$ . Этот градиент в принципе может вызвать турбулизацию или гашение пламени. Последнее происходит вследствие сильной деформации зоны пламени вдоль фронта. Однако, по нашему мнению, гашение пламени в результате деформации зоны менее вероятно, чем гашение, обусловленное охлаждением зоны в результате потерь тепла в продукты сгорания. Гашение, как видно из рис. 2, происходит не скачком скорости перемещения пламени, что следовало бы ожидать при деформационном механизме, а при постепенном снижении скорости до весьма низких значений. Это можно рассматривать как результат глубокого охлаждения продуктов сгорания, интенсивность которого увеличивается с ростом скорости вращения.

Авторы благодарят Я. Б. Зельдовича и А. Д. Марголина за обсуждения и замечания.

Поступила в редакцию 17/VII 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Дроздов, Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1943, 17, 134.
2. V. Lewis, G. Elbe. Comb. Flames and Explosions of Gases. N. Y., 1961.
3. В. С. Бабкин, А. В. Вьюн.— В сб.: Горение и взрыв. М.: Наука, 1972.
4. В. С. Бабкин, А. В. Вьюн. ФГВ, 1976, 12, 2.
5. В. С. Бабкин, А. М. Бадалян, В. В. Никулин.— В сб.: Горение гетерогенных и газовых систем. Черногоровка, 1977.
6. В. П. Кривулин, Е. А. Кудрявцев и др. ФГВ, 1981, 17, 1.
7. А. М. Бадалян, В. С. Бабкин и др. ФГВ, 1981, 17, 3.
8. А. Д. Марголин, В. П. Карпов. Докл. АН СССР, 1974, 216, 2.

УДК 536.46

### О ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИСКРИВЛЕННОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ

Б. Е. Рогоза  
(Днепропетровск)

В постановке задачи о скорости турбулентного горения [1] кинематическое уравнение распространения одиночной реализации поверхности пламени  $F(x, t)$  имеет вид [2]

$$\partial F / \partial t + (u \operatorname{grad} F) = u_n |\operatorname{grad} F|, \quad F|_{t=0} = f(x), \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (1)$$

Здесь  $F(x, t)$  — поверхность пламени;  $t$  — время;  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — пространственная координата;  $u_i$  — компоненты скорости внешнего потока;  $u_n$  — нормальная скорость распространения пламени;  $f(x)$  — форма поверхности  $F(x, t)$  при  $t = 0$ .

Известно, что на первоначально гладком искривленном фронте пламени по истечении некоторого промежутка времени возникают угловые точки даже при отсутствии внешнего потока ( $u = 0$ ) [3]. Их образование приводит к нелинейному эффекту стабилизации искривленного фронта пламени. Впервые этот вывод сделан на основе применения принципа Гюйгенса к нахождению последовательных положений фронта пламени [4, 5]. Вместе с тем координаты точек поверхности пламени можно определить аналитически, решая задачу Коши (1) по методу характеристик. По существу, такой способ решения уравнения (1) применен в работе [2], в которой с помощью уравнения характеристик в лагранже-

вых координатах получены обобщенные формулы для скорости турбулентного горения. Однако возможность описания негладких решений задачи Коши (1) с помощью характеристик в работе [2] не рассматривалась.

В данной работе на основе метода геометрической акустики [6] показано, что пересекающиеся траектории частиц фронта пламени — характеристики уравнения (1) — для фиксированного момента времени формируют негладкую поверхность с угловыми точками. Восстановление такой поверхности по траекториям частиц может быть проведено средствами классической механики как переход от решений уравнений Гамильтона к решениям уравнения Гамильтона — Якоби. Важно отметить, что впервые переход между уравнениями сделан в работе [7] путем введения эйлеровых координат в фазовом пространстве.

Поскольку фронт пламени вблизи угловых точек сжимается, возникает значительная деформация лагранжевой сетки координат, что существенно усложняет задачу восстановления поверхности пламени по лагранжевым характеристикам. В связи с этим в данной работе в отличие от [2] использовано альтернативное описание характеристических уравнений в эйлеровых координатах фазового пространства, что позволило свести задачу об эволюции возмущений фронта пламени к исходному пункту теории нелинейных волн [8]. В результате установлено, что распространение пламени с пространственно периодическими возмущениями может рассматриваться как развитие нелинейной волны в фазовом пространстве, а угловой точке пламени соответствует линия разрыва на фазовой волне.

Вводимые ниже переменные точно соответствуют обозначениям метода геометрической акустики [6] и, по существу, унифицируют обозначения в «переменных Моисе» работы [2]. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение Гамильтона — Якоби

$$\partial F(x, t)/\partial t + \omega(k, x) = 0, \quad F(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad (2)$$

если ввести дополнительные переменные  $k_i = \partial F/\partial x_i$  — компоненты волнового вектора, сопряженные с координатами  $x_i$  физического пространства, и функцию Гамильтона  $\omega = u_i k_i - u_n \sqrt{k_j^2}$  — частоту. Везде в дальнейшем применено суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3.

Как известно из классической механики, характеристическая система уравнений для (2) совпадает с уравнениями Гамильтона  $\dot{x}_i = \partial\omega/\partial k_i$ ,  $\dot{k}_i = -\partial\omega/\partial x_i$ , которые в развернутой форме имеют в данном случае вид

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i - u_n n_i, \quad x_i|_{t=0} = x_i^0, \quad (3)$$

$$\frac{dk_i}{dt} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot k_j, \quad k_i|_{t=0} = k_i^0, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t}, \quad n_i = k_i / \sqrt{k_j^2}. \quad (4)$$

Начальные координаты связаны между собой условием принадлежности к начальной поверхности (1).

Решения системы (3), (4) задают траектории движения частиц искривленного фронта пламени во внешнем несжимаемом потоке  $u_i(x, t)$ . Их можно найти численно путем непосредственного интегрирования уравнений (3), (4) даже для стохастического внешнего потока. В простейшем случае ( $u_i = 0$ ) система (3), (4) допускает аналитическое решение

$$x_i = x_i^0 - u_n n_i t, \quad k_i = k_i^0 = \partial f/\partial x_i^0. \quad (5)$$

Уместно отметить, что классическое решение задачи Коши (1) имеет смысл, если только характеристики (5) не пересекаются, т. е. якобиан преобразования  $\det \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right|$  не обращается в нуль. При нарушении условия

строгой положительности якобиана фронт пламени перестает быть однозначным.

Впервые связь между неоднозначностью в решениях (5) и возникновением угловых линий на фронте пламени рассмотрена в работе [9] на примере двумерных возмущений в рамках принципа Гюйгенса. Для двумерного фронта пламени с начальным возмущением вида  $f(x, y) = x - \varphi(y) = 0$  имеем  $k_1 = k_1^0 = 1$ ,  $k_2 = k_2^0 = -\varphi'(y)$ , и решение (5) существенно упрощается:

$$x = x^0 - u_n t / \sqrt{1 + \varphi'^2}, \quad y = y^0 + u_n t \varphi' / \sqrt{1 + \varphi'^2}. \quad (6)$$

Условие образования угловой точки — нарушение однозначности между эйлеровыми и лагранжевыми координатами точек фронта пламени, т. е. обращение в нуль якобиана:

$$\partial(x, y) / \partial(x^0, y^0) = 1 - u_n t \varphi'' / (1 + \varphi'^2)^{3/2} = 0.$$

При ином способе решения задачи это условие и уравнение траекторий (6) получены в работе [9].

Можно видеть, что для первоначально вогнутых областей пламени характеристики (6) пересекаются и формируют неоднозначность на фронте с характерной петлей (см. [9]). Ее отбрасывание, согласно интерпретации работы [9], вместе с растяжением поверхности фронта пламени в выпуклых участках лежит в основе нелинейного эффекта стабилизации возмущений. Решение (6) полностью описывает кинематику возникновения угловых точек в плоскости  $(x, y)$ . Некоторые закономерности динамики можно извлечь из рассмотрения фазового пространства фронта пламени, распространяющегося относительно фиксированной эйлеровой сетки координат.

Для перехода к эйлеровому описанию следует считать компоненты волнового вектора  $k_i$  функцией координат  $k_i = k_i(x, t)$ . Раскрывая полную производную по времени в уравнении (4), имеем

$$dk_i/dt = \partial k_i / \partial t + \partial k_i / \partial x_j \cdot \dot{x}_j.$$

Предполагая фронт пламени однозначной поверхностью, можно воспользоваться условием интегрируемости уравнения  $k_i(x, t) = \partial F / \partial x_i$  в следующей форме:

$$\partial k_i / \partial x_j - \partial k_j / \partial x_i = 0.$$

С учетом этого условия и уравнений Гамильтона (3) и (4) можно записать [7]:

$$\partial k_i / \partial t + \partial k_j / \partial x_i \cdot \partial \omega / \partial k_j + \partial \omega / \partial x_i = 0.$$

Вводя функцию  $\omega = \omega[x, k(x, t)]$  с локальной зависимостью от координат и времени, последнее уравнение можно свернуть и получить окончательно

$$\partial k_i / \partial t + \partial \omega / \partial x_i = 0, \quad k_i|_{t=0} = k_i^0(x). \quad (7)$$

Точно такое уравнение в дивергентной форме является основным уравнением кинематики нелинейных волн [8].

Поскольку негладкому фронту пламени  $F(x, t)$  соответствует разрывное поле волновых векторов  $k_i = \partial F / \partial x_i$ , в приложении к теории фронтального горения интерес представляют обобщенные (разрывные) решения уравнения (7). Их построение основано на интегральном законе сохранения, который нетрудно получить, умножив уравнение (7) на внешнюю форму  $dt \wedge dx_i$  и применив теорему Стокса

$$\oint_C k_i dx_i - \omega dt = 0. \quad (8)$$

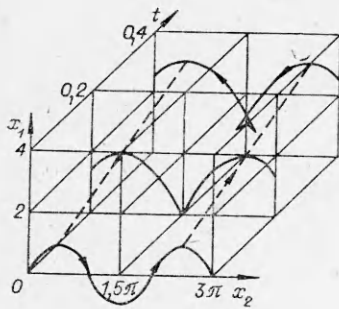


Рис. 1.

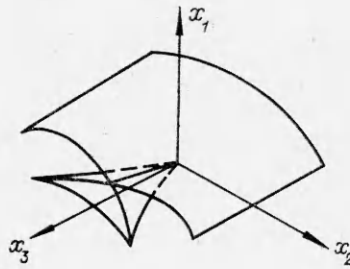


Рис. 2.

Интеграл (8) вычисляется по произвольному замкнутому контуру  $C$ , охватывающему траектории движения точек поверхности  $F(x, t)$  в расширенном координатном пространстве  $(x_i, t)$ . На рис. 1 контур  $C$  показан стрелками. Определяемое формулой (8) решение  $k_i = k_i(x, t)$ , вообще говоря, непрерывно, но неоднозначно как функция координат при фиксированном времени. Это связано с тем, что над заданной точкой расширенного координатного пространства может лежать, вообще говоря, совокупность точек расширенного фазового пространства с различными значениями волнового вектора  $k_i$ .

Известно [10], что построение обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби существенно опирается на изучение структуры фазового пространства  $(k_1, k_2, k_3, x_1, x_2, x_3)$ . Допустимые особенности волновых фронтов интерпретируются при этом как особенности проектирования на координатное пространство обобщенных решений, точнее, их геометрических образов в фазовом пространстве — лагранжевых поверхностей. В этой связи для приложений к теории фронтального горения существенно отметить установленный факт [11], что трехмерные возмущения гладкого волнового фронта с течением времени могут формировать особенности лишь типа «ребра возврата» и «ласточкин хвост», изображенный на рис. 2. Как впервые показано в работе [9], фронт пламени с угловыми линиями как раз описывается особенностью «ласточкин хвост» при условии отбрасывания нефизической петли. Смысл процедуры отбрасывания петли заключается в выделении из формального решения уравнения (1) однозначной поверхности, описывающей фронт пламени. Вместе с тем выделение однозначных решений уравнения (1) можно провести более последовательно на основе интегрального инварианта (8). Выбирая контур  $C$  состоящим из двух траекторий движения и двух мгновенных положений фронта пламени  $F(x, t)$ , можно получить

$$\oint_D k_i dx_i = \text{const.} \quad (9)$$

Здесь  $D$  — любой замкнутый контур на пламени, отождествляемом с поверхностью  $F(x, t)$ . Контур  $D$  переводится фазовым потоком вдоль траекторий движения (5) снова в замкнутый контур, но, возможно, с самопересечением в координатном пространстве. На рис. 1 показаны профили сечения двумерного искривленного пламени в расширенном координатном пространстве  $(x_1, x_2, t)$ , соответствующие мгновенным положениям поверхности  $F(x_1, x_2, t)$  с начальным возмущением в форме гармонической волны. Наглядно видно, что при нормальном распространении фронта пламени формируется нефизическая петля, которая должна быть отброшена.

Поскольку постоянная в правой части равенства (9) равна нулю для начального возмущения  $F|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3)$ , то и всегда выполняется

$$\oint_D k_i dx_i = 0. \quad (10)$$

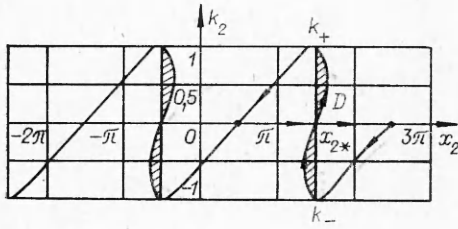


Рис. 3.

Условие (10) дает способ выделения однозначных решений. А именно, в соответствии с (10) следует заменить участки фазовой поверхности, неоднозначно проектирующиеся на координатное пространство фазовой плоскостью  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ . Здесь  $a_i$  и  $b$  — постоянные коэффициенты, по крайней мере один из которых не обращается в нуль. Такая замена допустима, так как плоскость удовлетворяет условию (10), поскольку  $a_i dx_i = 0$ , а волновой вектор на ней принимает значения

$$k_+ \theta(a_i x_i - b) + k_- \theta(b - a_i x_i).$$

Здесь  $k_+$  и  $k_-$  — значения волнового вектора на разрыве, взятые соответственно справа и слева от него;  $\theta(s)$  — функция Хевисайда

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Описанный способ выделения однозначных ветвей в решении (8) можно пояснить на примере простейшего возмущения  $f(x_1, x_2) \equiv x_1 - \sin x_2 = 0$ . В этом случае компоненты градиента к фронту пламени равны  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = k = -\cos x_2$ . Для такого возмущения система (7) имеет решения

$$k_1 = 1, \quad k = -\cos \left( x_2 - \frac{u_{cr} t k}{\sqrt{1+k^2}} \right). \quad (11)$$

Согласно этому решению, накопление нелинейности приводит к такому искажению начального профиля фазовой кривой, что фазовая волна (11) перестает быть однозначной в окрестности некоторой точки  $x_2 = x_{2*}$ . На рис. 3 показано поведение фазовой кривой (11) на плоскости  $(k_2, x_2)$ . Физически неоднозначность не может реализоваться. Она заменяется линией разрыва волнового вектора градиента к поверхности пламени вдоль прямой  $x_2 = x_{2*}$ . Положение линии разрыва можно найти из интегрального закона сохранения (10), который в данном случае удобно записать в следующей форме:

$$\oint_D (k_2 dx_2 - x_2 dk_2) = 0. \quad (12)$$

Интегрирование проводится по контуру  $D$ , показанному на рис. 3. В подробной записи условие (12) имеет вид

$$\int_{x_{2*}-\lambda/2}^{x_{2*}} k_2 dx_2 + \int_{k_-}^{k_+} (x_2 - x_{2*}) dk_2 + \int_{x_{2*}}^{x_{2*}+\lambda/2} k_2 dx_2 = 0.$$

Здесь  $k_+$  и  $k_-$  — значения скачков волнового вектора на линии разрыва  $x_2 = x_{2*}$ , взятые соответственно справа и слева от нее;  $\lambda/2$  — расстояние между двумя ближайшими неподвижными точками на фазовой плоскости. Первое и третье слагаемые в последнем равенстве с учетом нечетности подынтегральной функции в сумме равны нулю, откуда находится

искомое соотношение для определения положения разрыва на фазовой плоскости

$$\int_{k_-}^{k_+} (x_2 - x_{2*}) dk_2 = 0. \quad (13)$$

Условие (13) выражает известное правило Максвелла «равных площадей» [6, 11] в приложении к фронту пламени с угловыми линиями: на фазовой плоскости линия разрыва  $x_2 = x_{2*}$  проводится таким образом, что отсекаемые ею площади на фазовой кривой (11) между собой совпадают. Эти площади на рис. 3 заштрихованы.

Проведенное изучение особенностей поведения фазовых кривых, соответствующих мгновенному положению фронта пламени, необходимо для построения обобщенных (негладких) решений уравнения распространения пламени (1). Простейший пример обобщенного решения и его применение к вычислению скорости убывания амплитуды возмущений искривленного пламени будет дан в следующей работе.

Автор выражает глубокую признательность В. Р. Кузнецову за внимание к работе.

Поступила в редакцию 3 /IV 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк-Каменецкий. Курс теории горения, детонации и взрыва. Ч. II. М.: ММИ, 1947.
2. В. Н. Виллюнов, И. Г. Дик. ФГВ, 1975, 11, 2.
3. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1966, 1.
4. R. E. Petersen, H. W. Emmons. Phys. Fluids., 1961, 4, 4.
5. К. И. Щелкин. УФН, 1965, 87, 2.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1954.
7. А. Эйнштейн. Вывод теоремы Якоби. Собрание науч. тр. Т. III. М.: Наука, 1966.
8. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. В. Р. Кузнецов. ФГВ, 1975, 11, 4.
10. В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
11. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

УДК 536.463 : 662.612.3

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГОРЕНИЯ ГАЗОПРОНИЦАЕМЫХ ТОПЛИВ

В. Г. Коростелев, Ю. В. Фролов  
(Москва)

В работе [1] проведен анализ динамики процессов возмущенного горения газопроницаемых топлив. В данной работе на основе результатов этого анализа определена зависимость основных характеристик горения от различных параметров.

Широкий диапазон изменения скорости горения газопроницаемых топлив [2] свидетельствует о разнообразии видов теплопередачи, определяющих режимы горения таких систем. В общем случае можно выделить следующие механизмы:

- 1) кондуктивный, основной при послойном горении;
- 2) конвективный, преобладает в конвективном режиме горения и действует наряду с кондукцией при возмущенном горении;
- 3) теплоперенос излучением, имеет определенное значение, по-видимому, лишь при горении систем насыпной плотности и газовзвесей;