

О КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ. СЛУЧАЙ ДВУСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

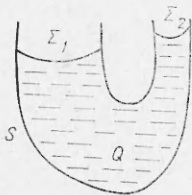
В. Р. Орел

(Москва)

Задачам малых колебаний идеальной жидкости с учетом сил поверхностного натяжения посвящен ряд работ. В работах [1, 2] рассматриваются колебания жидкости с одной свободной поверхностью. В [3] исследуются колебания произвольного числа несмешивающихся жидкостей, граничащих между собой по равновесным поверхностям раздела, причем предполагается, что на каждой поверхности раздела возможны колебания только нулевого объема.

Ниже рассматривается задача о колебаниях идеальной жидкости с двумя свободными поверхностями, на каждой из которых кинематически допустимы возмущения ненулевого объема. Возмущения удовлетворяют условию постоянства суммарного объема. Предлагается метод решения. В качестве примера рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях жидкого шара, соприкасающегося (в условиях невесомости) с контуром круглого отверстия. Найдены первые две собственные частоты и формы колебаний.

1. Пусть некоторый, находящийся в состоянии устойчивого равновесия, объем Q идеальной жидкости ограничен твердыми стенками сосуда S и двумя свободными поверхностями Σ_1, Σ_2 (фиг. 1), ρ — плотность жидкости, σ_1, σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения. Внешнее поле массовых сил имеет потенциал Π .



Ф и г. 1

Рассмотрим малые колебания жидкости около положения равновесия. Обозначим через $\mathbf{n}_i(\xi)$ внешнюю по отношению к области Q нормаль к невозмущенной поверхности Σ_i ($i = 1, 2$) в точке ξ , а через $u_i(\xi, t)$ — малое отклонение вдоль \mathbf{n}_i в момент времени t (≥ 0).

Предполагаем, что смещение $u_i(\xi, t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией параметра ξ ($\in \Sigma_i$); множество таких функций обозначим через D_i .

Пусть $D = D_1 \times D_2$ — пространство всех пар функций $\{u_1, u_2\}$, где $u_i \in D_i$. Для элементов множества D используем векторные обозначения $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$. В D определим скалярное произведение ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D$)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Sigma_1} u_1 v_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} u_2 v_2 d\Sigma_2.$$

Для описания малых колебаний идеальной жидкости введем [4] потенциал смещений $\Phi(q, t)$, $q \in Q$. При любом t (≥ 0) потенциал Φ является решением задачи

$$(1.1) \quad \Delta\Phi = 0, \quad q \in Q; \\ \partial\Phi/\partial\mathbf{n}|_S = 0; \quad \partial\Phi/\partial\mathbf{n}_i|_{\Sigma_i} = u_i \quad (i = 1, 2).$$

Необходимым условием разрешимости внутренней задачи Неймана (1.1) является [5] условие сохранения объема

$$(1.2) \quad (1, \mathbf{u}) = \int_{\Sigma_1} u_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} u_2 d\Sigma_2 = 0.$$

Обозначим через D_0 подпространство пространства D , содержащее элементы \mathbf{u} , удовлетворяющие условию (1.2). Известно [5], что для любого $\mathbf{u} \in D_0$ решение Φ задачи (1.1) существует и единственно с точностью до произвольной функции времени $f(t)$. Положим $\Psi_i(\xi, t) \equiv \Phi(\xi, t)|_{\xi \in \Sigma_i} (i=1, 2)$. Можно показать [1–3], что существует матрица линейных операторов $G = \|G_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2$), связывающая произвольный элемент \mathbf{u} из D_0 с соответствующим ему вектором $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2\}$

$$(1.3) \quad \Psi = G\mathbf{u} + f\mathbf{1}.$$

Пользуясь свойствами гармонических функций [5], можно установить, что оператор G симметричен и положителен в пространстве D_0 ; последнее означает ($\mathbf{u} \neq 0$)

$$(1.4) \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0, \mathbf{u} \in D_0.$$

Рассмотрим на D матричный дифференциальный оператор $A = \|A_i \delta_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2$)

$$(1.5) \quad A_i u_i \equiv \sigma_i(-\Delta_i + \tau_i(\xi))u_i(\xi, t), \quad \xi \in \Sigma_i, u_i \in D_i.$$

Здесь Δ_i — оператор Лапласа [6] на поверхности Σ_i , а функция $\tau_i(\xi)$ дается выражением [7]

$$\tau_i(\xi) = \frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - 4H_i^2(\xi) + 2K_i(\xi),$$

где $H_i(\xi)$ — средняя кривизна; $K_i(\xi)$ — гауссова кривизна [6] в данной точке $\xi \in \Sigma_i$.

Пусть L_i — контур, по которому пересекаются поверхности Σ_i и S . Кинематическое условие проскальзывания для смещения $u_i(\xi, t)$ на L_i имеет [1,7] вид

$$(1.6) \quad \partial u_i / \partial \mathbf{e}_i + \chi_i(\xi)u_i = 0, \quad \xi \in L_i (i = 1, 2).$$

Здесь \mathbf{e}_i — орт внешней нормали к контуру L_i , проведенной по касательной к поверхности Σ_i в точке ξ ; функция $\chi_i(\xi)$ определяется [1,7] выражением

$$\chi_i(\xi) = [\kappa_i(\xi) \cos \gamma_i - \eta_i(\xi)] / \sin \gamma_i \quad (\sin \gamma_i \neq 0),$$

где γ_i — краевой угол; $\kappa_i(\xi)$ — кривизна нормального сечения свободной поверхности Σ_i вдоль направления \mathbf{e}_i ; $\eta_i(\xi)$ — аналогично определяемая кривизна нормального сечения смачиваемой поверхности S в точке $\xi \in L_i$ ($i = 1, 2$).

Пусть D_i^x — множество функций u_i из D_i , удовлетворяющих условиям (1.6). Можно показать [8], что операторы A_i (1.5) являются симметричными на множествах D_i^x ($i = 1, 2$). Поэтому матричный оператор A симметричен на $D_1^x \times D_2^x$. Положим $W_0 \equiv D_0 \cap (D_1^x \times D_2^x)$. Поскольку объем Q находится в состоянии устойчивого равновесия, то, учитывая вид второй вариации потенциальной энергии системы двух поверхностей Σ_1, Σ_2 [9], получим ($\mathbf{u} \neq 0$)

$$(1.7) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0, \mathbf{u} \in W_0.$$

Выпишем линеаризованные динамические условия, которым удовлетворяют значения Ψ_1, Ψ_2 потенциала смещений Φ на свободных поверхностях [1, 2, 4] ($k = 1, 2$)

$$(1.8) \quad -\rho(\partial^2 \Psi_k / \partial t^2)(\xi, t) = A_k u_k(\xi, t) + f(t), \quad \xi \in \Sigma_k.$$

Предполагая везде зависимость от времени типа $\exp(i\omega t)$ и учитывая (1.3), соотношение (1.8) можно представить в виде ($f = \text{const}$)

$$\omega^2 \rho G u = A u + f 1,$$

откуда с помощью (1.2), (1.4) и (1.7) получим

$$(1.9) \quad \omega^2 = [(A u, u) / \rho(G u, u)] (> 0), \quad u \in W_0.$$

Следуя [8], для нахождения собственных частот ω_j и форм колебаний z_j , объема Q идеальной жидкости рассмотрим цепочку задач минимизации

$$(1.10) \quad \omega_j^2 = \min_{W_{j-1}} \frac{(A u, u)}{\rho(G u, u)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где W_{j-1} ($j = 2, 3, \dots$) — подпространство пространства W_0 , ортогональное уже известным из решения предыдущих задач векторам $\{z_1, \dots, z_{j-1}\}$, на которых достигаются последовательные минимумы $\{\omega_1^2, \dots, \omega_{j-1}^2\}$ выражения (1.10).

2. Укажем один из возможных способов построения и решения последовательности задач (1.10). Обозначим через φ_k, ψ_j собственные функции операторов A_1, A_2 на множествах D_1^X, D_2^X , а через ν_k, μ_j ($k, j = 1, 2, \dots$) — соответствующие собственные числа

$$(2.1) \quad \begin{aligned} A_1 \varphi_k &= \nu_k \varphi_k, \quad \varphi_k \in D_1^X; \\ A_2 \psi_j &= \mu_j \psi_j, \quad \psi_j \in D_2^X. \end{aligned}$$

Поскольку каждый оператор A_i симметричен на D_i^X [8], числа ν_k, μ_k ($k = 1, 2, \dots$) вещественны, а системы функций $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ являются ортогональными на соответствующем D_i^X . Без потери общности системы $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ считаем нормированными, а наборы чисел $\{\nu_k\}, \{\mu_k\}$ — упорядоченными.

Пусть N — некоторое натуральное число. Рассмотрим конечномерное подпространство W_0^N пространства W_0 ($D_0 \cap (D_1^X \times D_2^X)$) такое, что любой элемент $u \in W_0^N$ имеет вид

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k; \sum_{k=1}^N b_k \psi_k \right\}.$$

Для элементов множества W_0^N по определению выполнено условие сохранения объема (1.2)

$$(2.2) \quad (u, 1) = \sum_{k=1}^N a_k \int_{\Sigma_1} \varphi_k d\Sigma_1 + \sum_{k=1}^N b_k \int_{\Sigma_2} \psi_k d\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k w_k = 0,$$

где

$$(2.3) \quad \alpha_{2k-1} = a_k; \quad \alpha_{2k} = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N);$$

$$w_{2k-1} = \int_{\Sigma_1} \varphi_k d\Sigma_1, \quad w_{2k} = \int_{\Sigma_2} \psi_k d\Sigma_2.$$

Зная набор чисел (2.3) $\{w_k\}$, можно построить фундаментальную систему решений $Y_N = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ уравнения (2.2). Векторы y_k , входящие в Y_N , имеют размерность $2N$, а их количество n определяется числом отличных от нуля коэффициентов w_k (2.3) и кинематическими ограничениями, наложенными на колебания объема Q . Можно показать, что $2(N-1) \leq n \leq 2N$. В частности, если на обеих поверхностях допустимы смещения u_i с ненулевыми объемами и среди чисел w_k есть хотя бы два отличные от нуля, то $n = 2N - 1$.

Каждому вектору $y_k (\in Y_N)$ отвечает определенный элемент v_k пространства $W_0^N (k = 1, 2, \dots, n)$

$$(2.4) \quad v_k = \left\{ \sum_{i=1}^N y_{2i-1,k} \varphi_i, \sum_{i=1}^N y_{2i,k} \psi_i \right\}.$$

Векторы v_k образуют базис в W_0^N , поэтому любой элемент $u \in W_0^N$ имеет вид

$$(2.5) \quad u = \sum_{i=1}^n c_i v_i.$$

Обозначим через Φ_k решение задачи (1.4) с граничными условиями, заданными вектором v_k (2.4). На свободной поверхности $\Sigma_i (i = 1, 2)$ потенциал смещений Φ_k переходит в функцию $\Psi_{i,k}$, причем векторы v_k и $\Psi_k = \{\Psi_{1,k}, \Psi_{2,k}\} (1 \leq k \leq n)$ связаны соотношением (1.3).

Подставляя (2.5) в (1.9), получим

$$(2.6) \quad \omega^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} c_i c_k \left[\rho \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n g_{jl} c_j c_l \right]^{-1},$$

где

$$(2.7) \quad a_{ik} = a_{ki} = \sum_{l=1}^N v_l y_{2l-1,i} y_{2l-1,k} + \sum_{l=1}^N \mu_l y_{2l,i} y_{2l,k};$$

$$g_{ik} = g_{ki} = \sum_{l=1}^N \left[y_{2l-1,i} \int_{\Sigma_1} \Psi_{1,k} \varphi_l d\Sigma_1 + \sum_{l=1}^N y_{2l,i} \int_{\Sigma_2} \Psi_{2,k} \psi_l d\Sigma_2 \right].$$

Обе квадратичные формы являются положительно определенными, поэтому можно указать [10] такое линейное преобразование переменных $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

$$(2.8) \quad c_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} x_j,$$

что выражение (2.6) примет вид

$$(2.9) \quad \omega^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \left[\rho \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{-1}$$

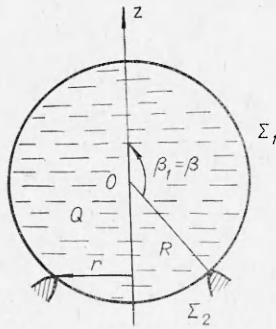
Здесь $\{\lambda_n\}$ — расположенные в порядке возрастания корни уравнения [10],

$$\det \|a_{ik} - \lambda g_{ik}\| = 0.$$

Решая задачу (1.10) минимизации выражения (2.9), получим приближенные значения частот $\omega_{j,N}$ и форм $\mathbf{z}_{j,N}$ собственных колебаний объема Q

$$\omega_{j,N} = \sqrt{\lambda_j}, \quad \mathbf{z}_{j,N} = \sum_{i=1}^n U_{ij} \mathbf{v}_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3. Пусть в условиях невесомости ($\Pi \equiv 0$) объем Q идеальной жидкости имеет форму шара радиуса R . Предположим, что жидкий шар соприкасается (без изменения формы) с контуром круглого отверстия радиуса $r < R$. Окружность, по которой происходит касание, делит поверхность шара на две части Σ_1, Σ_2 (фиг. 2). Угол полураствора сферического мениска Σ_i ($i = 1, 2$) обозначим через β_i . Положим $\beta_1 = \beta$ (см. фиг. 2), тогда $\beta_2 = \pi - \beta$.



Фиг. 2

Смачиваемость контура отверстия предполагаем абсолютной, тогда краевые условия (1.6) имеют вид

$$u_1|_{L_1} = u_2|_{L_2} = 0.$$

Считаем, что коэффициенты поверхностного натяжения на Σ_1 и Σ_2 совпадают ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$). Тогда можно показать [9], что при любых значениях β , отличных от $\pi/2$, выполнено неравенство (1.7) и объем Q находится в положении устойчивого равновесия.

Введем на каждом мениске Σ_i ($i = 1, 2$) свою криволинейную систему координат $\{\varphi, s\}$, φ — угол поворота вокруг оси симметрии, а s — длина дуги, отсчитываемая вдоль меридиана от полюса мениска ($s = 0$) до контура отверстия ($s = R\beta_i$). Рассмотрим только осесимметричные колебания жидкого шара Q . Задача определения собственных значений и функций оператора A_i (1.5) на множестве D_i^x принимает вид [9]

$$(3.1) \quad -(\sigma/R^2)(d^2u/d\alpha^2 + \operatorname{ctg} \alpha du/d\alpha + 2u) = \lambda u, \quad 0 < \alpha < \beta_i, \\ |u(0)| < +\infty, \quad u(\beta_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Собственными функциями задач (3.1) являются [11] функции Лежандра первого рода $P_{\gamma_k}(\cos \alpha)$, $P_{\eta_k}(\cos \alpha)$ ($k = 1, 2, \dots$), где γ_k , η_k — последовательные корни уравнений

$$(3.2) \quad P_{\gamma}(\cos \beta_1) = 0; \quad P_{\eta}(\cos \beta_2) = 0.$$

Для упрощения выкладок далее полагаем $\rho, \sigma, R = 1$, что отвечает переходу к безразмерному параметру ω^2 в (2.6). Можно, показать, что размерная частота колебаний связана с безразмерной соотношением

$$(3.3) \quad \omega^2(\rho, \sigma, R) = (\sigma/\rho R^3)\omega^2(1, 1, 1).$$

Собственные числа ν_k, μ_k (2.1) операторов A_1, A_2 определяются выражениями [11]

$$(3.4) \quad \nu_k = \gamma_k(\gamma_k + 1) - 2; \quad \mu_k = \eta_k(\eta_k + 1) - 2.$$

Нормированные собственные функции $\varphi_k(\alpha), \psi_k(\alpha)$ операторов A_1, A_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_k(\alpha) &= P_{\gamma_k}(\cos \alpha) N_k^{-1}, \quad \alpha \in (0, \beta_1); \\ \psi_k(\alpha) &= \bar{P}_{\eta_k}(\cos \alpha) M_k^{-1}, \quad \alpha \in (0, \beta_2), \end{aligned}$$

где

$$N_k^2 = \int_0^{\beta_1} (P_{\gamma_k}(\cos \alpha))^2 \sin \alpha d\alpha; \quad M_k^2 = \int_0^{\beta_2} (\bar{P}_{\eta_k}(\cos \alpha))^2 \sin \alpha d\alpha.$$

Объемы w_k (2.3) функций (3.4) получим интегрированием по поверхности сферы (единичного радиуса)

$$(3.5) \quad w_{2k-1} = 2\pi \int_0^{\beta_1} \varphi_k(\alpha) \sin \alpha d\alpha; \quad w_{2k} = 2\pi \int_0^{\beta_2} \psi_k(\alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Вычисления [9] показали, что числа w_k отличны от нуля при любых углах полураствора сферических менисков, поэтому в качестве базисных векторов \mathbf{v}_k (2.4) пространства W_0^N можно взять следующие:

$$(3.6) \quad \mathbf{v}_{2j-1} = \left\{ \frac{w_{2j}\varphi_j}{\sqrt{w_{2j-1}^2 + w_{2j}^2}}; \frac{-w_{2j-1}\psi_j}{\sqrt{w_{2j-1}^2 + w_{2j}^2}} \right\}, \quad 1 \leq j \leq N;$$

$$\mathbf{v}_{2j} = \left\{ \frac{w_{2j}\varphi_{2j+1}}{\sqrt{w_{2j}^2 + w_{2j+1}^2}}; \frac{-w_{2j+1}\psi_j}{\sqrt{w_{2j}^2 + w_{2j+1}^2}} \right\}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

Фундаментальная система решений уравнения (2.2), отвечающая векторам (3.6), состоит из элементов

$$(3.7) \quad y_{ik} = \begin{cases} 0, & i < k \text{ или } i > k + 1 \\ (-1)^{k+1} w_{k+1} (w_k^2 + w_{k+1}^2)^{-1/2}, & i = k \\ (-1)^k w_k (w_k^2 + w_{k+1}^2)^{-1/2}, & i = k + 1, \\ i = 1, 2, \dots, 2N; \quad k = 1, \dots, 2N - 1. \end{cases}$$

Используя (3.3), (3.7), можно непосредственной подстановкой в (2.7) получить коэффициенты $a_{ik} (1 \leq i, k \leq 2N - 1)$

$$(3.8) \quad a_{ik} = a_{ki} = 2\pi \sum_{l=1}^N (\nu_l y_{2l-1,i} y_{2l-1,k} + \mu_l y_{2l,i} y_{2l,k}).$$

Чтобы определить компоненты матрицы g_{ik} (2.7), построим решения задачи (1.1) с краевыми условиями, задаваемыми векторами (3.6). Пусть θ — угол, отсчитываемый вдоль меридиана сферы ($R = 1$) от полюса мениска Σ_1 ($\theta = 0$) до полюса мениска Σ_2 ($\theta = \pi$). Воспользовавшись из-

вестным [5] решением внутренней задачи Неймана (1.1) для шара, получим выражение для потенциала смещений Φ_k на поверхности

$$(3.9) \quad \Phi_k(1, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (1 + 1/2l) P_l(\cos \theta) \int_0^{\pi} f_k(\alpha) P_l(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha, \\ k = 1, 2, \dots, 2N - 1,$$

где $P_l(\cos \alpha)$ — полиномы Лежандра [5, 11], а $f_k(\alpha)$ — возмущение поверхности шара Q , заданное вектором \mathbf{v}_k (3.6)

$$(3.10) \quad f_k(\theta) = \begin{cases} v_{1, k}(\theta), & \theta \in (0, \beta), \\ v_{2, k}(\pi - \theta), & \theta \in (\beta, \pi). \end{cases}$$

Введем набор чисел ($j = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots$)

$$(3.11) \quad p_{j, l} = \int_0^{\beta} \varphi_j(\alpha) P_l(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha; \\ q_{j, l} = \int_0^{\pi - \beta} \psi_j(\alpha) P_l(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha.$$

Замечая, что

$$q_{i, l} = (-1)^l \int_{\pi - \beta}^{\pi} \psi_j(\pi - \alpha) P_l(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

и используя для \mathbf{v}_k в (3.10) выражение (2.4), соотношения (3.9) можно привести к виду ($k = 1, 2, \dots, 2N - 1$)

$$\Phi_k(1, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (1 + 1/2l) V_{k, l} P_l(\cos \theta),$$

где

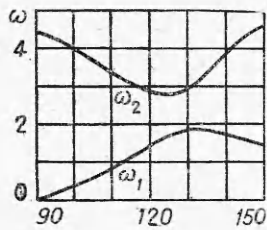
$$V_{k, l} = \sum_{j=1}^N (y_{2j-1, k} p_{j, l} + (-1)^l y_{2j, k} q_{j, l}),$$

откуда, вычисляя в выражении (2.7) для коэффициентов g_{ik} интегралы по поверхности единичной сферы, получим ($i, k = 1, 2, \dots, 2N - 1$)

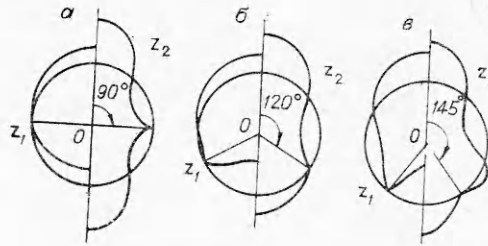
$$(3.12) \quad g_{ik} = g_{ki} = 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} (1 + 1/2l) V_{il} V_{kl}.$$

Зафиксируем некоторый угол полураствора $\beta (> \pi/2)$ сферического мениска Σ_1 (см. фиг. 2). Задаваясь числом N функций φ_k, ψ_k на поверхностях Σ_1, Σ_2 и делая необходимые вычисления по приведенным выше формулам, находим коэффициенты a_{ik} (3.8) и g_{ik} (3.12). Минимизируя выражение (2.6), в котором $n = 2N - 1$, получим приближенные значения безразмерных частот $\omega_{j, N}$ и соответствующих форм $\mathbf{z}_{j, N}$ осесимметричных колебаний шара Q . Переход к размерным частотам дается соотношением (3.3).

Расчеты проводились с помощью ЭЦВМ. Были использованы затабулированные [9] значения корней уравнений (3.2) и объемов (3.5). Для получения хорошего приближения первых двух форм колебаний (при $90^\circ < \beta < 150^\circ$) оказалось достаточным взять $N = 4$. При вычислении



Фиг. 3



Фиг. 4

величин $q_{j,l}$, $p_{j,l}$ (3.11) ($j = 1, 2, 3, 4$, $l = 1, 2, \dots, m$) проводилось численное интегрирование с контролем точности. Число m учитываемых в (3.12) полиномов Лежандра менялось с увеличением β от 10 до 50. Для приведения минимизируемого выражения (2.6) к виду (2.8) и вычисления корней уравнения (2.9) использовался метод вращений.

На фиг. 3 приведены зависимости первых двух частот ω_1 , ω_2 осесимметричных собственных колебаний жидкого шара Q от угла закрепления $\beta \in (90, 150^\circ)$.

На фиг. 4, а — б показаны формы z_1 , z_2 собственных колебаний шара Q соответственно при углах $\beta = 90, 120, 145^\circ$. Вычисления показали, что первая форма осесимметричных колебаний шара является знакопостоянной на меньшем мениске (Σ_2) при любых значениях угла β . На большем мениске (Σ_1) первая форма z_1 знакопостоянна при $\beta \in (90, 115^\circ)$, при $\beta > 115^\circ$ появляется одна перемена знака; вторая форма z_2 собственных колебаний при $\beta < 108^\circ$ один раз меняет знак на меньшем мениске, а при $\beta > 108^\circ$ вторая форма знакопостоянна на Σ_2 (фиг. 4, б, в). На мениске Σ_1 при $\beta \in (90, 139^\circ)$ вторая форма колебаний один раз меняет свой знак (фиг. 4, а, б); при $\beta > 139^\circ$ (фиг. 4, в) вторая форма меняет знак дважды.

В заключение автор благодарит Ф. Л. Черноушко за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 22 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Черноушко Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. — ЖВММФ, 1965, № 6.
2. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. Малые колебания идеальной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
3. Копачевский Н. Д. О колебаниях несмешивающихся жидкостей. — ЖВММФ, 1973, № 5.
4. Микишев Г. Н., Рабинович Б. Н. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
6. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1935.
7. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
9. Орел В. Р. Об устойчивости несжимаемой жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения. Случай двусвязной равновесной поверхности. — ПМТФ, 1974, № 6.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
11. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.