10. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М., Мир, 1977.
11. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана. М., Мир, 1969.
12. **Govindaraju S. P., Saffmen P. G.** Flow in a turbulent trailing vortex.— Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 10.
13. **Prandtl L.** Einfluss stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz.— In: Ludwig **Prandtl** Gesammelte Abhandlungen. Teil 2. Berlin, Springer-Verlag, 1961.
14. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., Наука, 1965.
15. **Bradshow P.** The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, N 1.
16. **Johnston J. P.** Internal flows.— In: Top. Appl. Phys. (Turbulence). Vol. 12. N. Y., 1976.
17. **Mellor G. L.** A comparative study of curved flow and density-stratified flow. —J. Atmos. Sci., 1975, vol. 32, N 7.
18. **Мэррит, Радингер.** Измерение коэффициентов переноса тепла и импульса в турбулентном стратифицированном потоке.— РТК, 1973, т. 11, № 11.
19. **Зельдович Я. Б.** О трении в жидкости между вращающимися цилиндрами. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1979, № 139.
20. **Sallet D., Widmayer R.** Turbulent vortex rings.— Z. Flugwiss., 1974, Bd 22, S. 207—216.

УДК 518.12 : 533.6

ЛОКАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВИХРЕВОГО СЛОЯ СИСТЕМОЙ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Д. Н. Горелов

(*Новосибирск*)

В аэродинамике крыло и вихревая пелена за ним часто моделируются системой дискретных вихрей. Строгое обоснование такого моделирования в случае обтекания тонкого криволинейного профиля стационарным потоком несжимаемой жидкости дано М. А. Лаврентьевым в работе [1].

Идея дискретизации несущей вихревой поверхности, обтекаемой потоком, привела к созданию метода дискретных вихрей, который успешно применяется для расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов [2—5]. Наиболее широкое применение получили расчетные схемы с равномерным распределением дискретных вихрей и контрольных точек, в которых требуется выполнение граничных условий соответствующей краевой задачи. Для этих схем доказана сходимость приближенного решения одномерного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши к точному на любом фиксированном отрезке внутри промежутка интегрирования [6, 7] и сходимость на всем промежутке по норме в L_1 [8] для всех допустимых классов решений. В то же время было выяснено, что равномерная расчетная схема дает неустранимую погрешность приближенного решения вблизи концов интервала [9, 4, 6].

Новые возможности открывает применение расчетных схем с неравномерным распределением дискретных вихрей и контрольных точек, что позволяет в принципе получить равномерное приближение интенсивности дискретных вихрей к соответствующим точным их значениям на всем интервале. Впервые такая схема была предложена, видимо, в работе [9]. Вопросы обоснования неравномерных схем практически не исследованы.

Следует отметить, что ключевым моментом в проблеме построения решения сингулярных интегральных уравнений методом дискретных вихрей является вопрос об аппроксимации интегралов типа Коши соответствующей квадратурной формулой. Исследованию этого вопроса и посвящена данная работа.

1. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$F(x_0) = \int_0^1 \frac{\gamma(x)\,dx}{x - x_0}, \tag{1.1}$$

определенный на отрезке [0,1] действительной оси. Относительно функции $\gamma(x)$ будем предполагать, что она представима в виде

$$\gamma(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\varphi(x), \tag{1.2}$$

где функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α_1 для $x\in[0,\delta]$ и α_2 для $x\in(\delta,1]$, полагая $0<\alpha_p\leqslant 1$, $p=1,2$; $0<\delta<1$.

Разделим отрезок [0,1] точками $c_0=0$, $c_1,\ldots,c_n=1$ на n элементов длиной $h_m=c_m-c_{m-1}$, $m=1,\ldots,n$. Введем величины

$$\Gamma_m=\int\limits_{c_{m-1}}^{c_m}\gamma(x)\,dx,\quad m=1,\ldots,n \tag{1.3}$$

и некоторые два множества точек $x_1,\ldots,x_n$ и $x_{01},\ldots,x_{0n}$, которые удовлетворяют условиям

$$x_m\in[c_{m-1},c_m],\ m=1,\ldots,n; \tag{1.4}$$
$$x_{0k}\in(c_{k-1},c_{k+1}),\ k=1,\ldots,n-1,\ x_{0n}\in(c_{n-1},c_n].$$

В соответствии с этими условиями представим x_m, x_{0k} в виде

$$x_m=c_{m-1}+h_m\mu_m,\quad x_{0k}=c_{k-1}+h_k\nu_k,\ m,k=1,\ldots,n, \tag{1.5}$$

где коэффициенты μ_m, ν_k могут изменяться в пределах $0\leqslant\mu_m\leqslant 1$, $0<\nu_k<2$.

Введем функцию

$$G(x_{0k})=\sum_{m=1}^{n}\frac{\Gamma_m}{x_m-x_{0k}}, \tag{1.6}$$

определенную в точках $x_{0k}\in[0,1]$, $k=1,\ldots,n$.

Поставим следующую задачу: построить такую последовательность множеств точек $x_{01},\ldots,x_{0n}$ и $x_1,\ldots,x_n$, удовлетворяющих условиям (1.4), для которой функция (1.6) при неограниченном увеличении n равномерно сходится к интегралу типа Коши (1.1) во всех точках $x_{0k}\in[0,1]$.

Для решения этой задачи можем распоряжаться коэффициентами $\mu_1,\ldots,\mu_n$ и $\nu_1,\ldots,\nu_n$, полагая заданными функцию $\gamma(x)$ и точки c_0, $c_1,\ldots,c_n$.

Отметим, что в терминах гидродинамики функция $\gamma(x)$ — интенсивность вихревого слоя, Γ_m — интенсивность дискретного вихря на элементе $[c_{m-1},c_m]$, x_m — координата этого вихря, x_{0k} — координата контрольной точки, функция $F(x_{0k})$ определяет скорость жидкости, индуцированную непрерывным вихревым слоем в точке x_{0k}, а функция $G(x_{0k})$ — скорость, индуцированную в той же точке системой дискретных вихрей.

2. Ограничимся случаем равномерного разбиения отрезка [0,1] на элементы. Тогда $c_m=mh$, $h=1/n$, $m=0,1,\ldots,n$. Введем на [0,1] две области $[0,\delta_1]$, $[\delta_2,1]$ и отрезок $[0,\delta]$, полагая $0<\delta_2<\delta<\delta_1<1$. Обозначим через N_1, n_1, N_2 соответственно число элементов на отрезках $[0,\delta_1]$, $[0,\delta]$, $[0,\delta_2]$. В соответствии с (1.2) будем предполагать, что в каждой области функция $\gamma(x)$ представима в виде

$$\gamma(x)=\Phi_1(x)/\sqrt{x},\quad \Phi_1(x)=\varphi(x)\sqrt{1-x}\ \text{при}\ x\in[0,\delta_1],$$
$$\gamma(x)=\Phi_2(x)\sqrt{1-x},\quad \Phi_2(x)=\varphi(x)/\sqrt{x}\ \text{при}\ x\in[\delta_2,1], \tag{2.1}$$

где для функций Φ_1, Φ_2 при всех $x \in [c_{m-1}, c_m]$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}|\Phi_1(x) - \Phi_1(x_m)| \leqslant A_1 n^{-\alpha_1}, \quad m = 1, \ldots, N_1,\\ |\Phi_2(x) - \Phi_2(x_m)| \leqslant A_2 n^{-\alpha_2}, \quad m = N_2 + 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь A_1, A_2 — положительные константы. Обозначим далее

$$M_1 = \sup_{[0,\delta_1]} |\Phi_1(x)|, \quad M_2 = \sup_{[\delta_2,1]} |\Phi_2(x)|.$$

Представим функции $F(x_{0k})$, $G(x_{0k})$ в виде

$$F(x_{0k}) = \sum_{m=1}^{n} F_m(x_{0k}), \quad G_m(x_{0k}) = \sum_{m=1}^{n} G_m(x_{0k}); \tag{2.3}$$

$$F_m(x_{0k}) = \int\limits_{c_{m-1}}^{c_m} \frac{\gamma(x)\,dx}{x - x_{0k}}, \quad G_m(x_{0k}) = \frac{\Gamma_m}{x_m - x_{0k}}. \tag{2.4}$$

С учетом формул (2.4), (1.3), (2.1) и (2.2)

$$\begin{gathered}F_m(x_{0k}) = \Phi_p(x_m) f_m^{(p)}(x_{0k}) \left[1 + O\left(n^{-\alpha_p}\right)\right],\\ G_m(x_{0k}) = \Phi_p(x_m) g_m^{(p)}(x_{0k}) \left[1 + O\left(n^{-\alpha_p}\right)\right],\end{gathered} \tag{2.5}$$

где индекс $p = 1$ при $m = 1, \ldots, N_1$ и $p = 2$ при $m = N_2 + 1, \ldots, n$, а функции $f_m^{(p)}$, $g_m^{(p)}$ определяются следующими выражениями:

$$f_m^{(1)} = \sqrt{\frac{n}{\sigma_k}} \ln \frac{\left(\sqrt{m} - \sqrt{\sigma_k}\right)\left(\sqrt{m-1} + \sqrt{\sigma_k}\right)}{\left(\sqrt{m} + \sqrt{\sigma_k}\right)\left(\sqrt{m-1} - \sqrt{\sigma_k}\right)}, \quad m \neq k, \quad k+1, \tag{2.6}$$

$$f_k^{(1)} + f_{k+1}^{(1)} = \sqrt{\frac{n}{\sigma_k}} \ln \frac{\left(\sqrt{\sigma_k} + \sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{\sigma_k}\right)}{\left(\sqrt{\sigma_k} - \sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{\sigma_k}\right)};$$

$$\begin{gathered}f_m^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{n-m+1} - \sqrt{n-m} - \frac{\sqrt{\tau_k}}{2} \times\right.\\ \left.\times \ln \frac{\left(\sqrt{\tau_k} - \sqrt{n-m}\right)\left(\sqrt{\tau_k} + \sqrt{n-m+1}\right)}{\left(\sqrt{\tau_k} + \sqrt{n-m}\right)\left(\sqrt{\tau_k} - \sqrt{n-m+1}\right)}\right], \quad m \neq k, \quad k+1,\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}f_k^{(2)} + f_{k+1}^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{n-k+1} - \sqrt{n-k-1} - \frac{\sqrt{\tau_k}}{2} \times\right.\\ \left.\times \ln \frac{\left(\sqrt{\tau_k} - \sqrt{n-k-1}\right)\left(\sqrt{n-k+1} + \sqrt{\tau_k}\right)}{\left(\sqrt{\tau_k} + \sqrt{n-k-1}\right)\left(\sqrt{n-k+1} - \sqrt{\tau_k}\right)}\right], \quad k \neq n,\end{gathered}$$

$$f_n^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{n}}\left[1 - \frac{\sqrt{\tau_k}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\tau_k}}{1 - \sqrt{\tau_k}}\right];$$

$$g_m^{(1)} = 2\sqrt{n}\, \frac{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}}{m - \tau_k - 1 + \mu_m}, \quad g_m^{(2)} = \frac{2}{3\sqrt{n}}\, \frac{(n-m+1)^{3/2} - (n-m)^{3/2}}{m - n + \tau_k - 1 + \mu_m}; \tag{2.8}$$

$$\sigma_k = k - 1 + \nu_k, \quad \tau_k = n - k + 1 - \nu_k. \tag{2.9}$$

Отметим, что при выводе этих формул для $m = k + 1$ в качестве значения $\Phi_p(x_{k+1})$ выбиралось $\Phi_p(x_k)$.

Исследуем теперь разность функций F и G в точках x_{0k}, полагая $k = 1, \ldots, n_1$. С учетом формул (2.3)—(2.8) имеем

$$F(x_{0k}) - G(x_{0k}) = \sum_{m=1}^{N_1} \Phi_1(x_m)\left[f_m^{(1)}(x_{0k}) - g_m^{(1)}(x_{0k})\right] + \sum_{m=N_1+1}^{n} \Phi_2(x_m)\left[f_m^{(2)}(x_{0k}) - g_m^{(2)}(x_{0k})\right]. \tag{2.10}$$

Здесь опущены общие множители $1 + O\left(n^{-\alpha_p}\right)$ $(p = 1{,}2)$ в правой части выражения, которые несущественны в исследовании сходимости функции $G(x_{0k})$ к $F(x_{0k})$. Кроме того, при $\nu_k = 1$ запись первой суммы для $m = k,\ k+1$ имеет условный характер, так как при этих значениях ν_k смысл имеет только сумма $f_k^{(1)} + f_{k+1}^{(1)}$.

Оценим в выражении (2.10) каждое слагаемое в отдельности. Рассмотрим сначала первую сумму. С учетом сделанных замечаний эту сумму можно преобразовать к виду

$$\sum_{m=1}^{N_1} \Phi_1(x_m)\left[f_m^{(1)}(x_{0k}) - g_m^{(1)}(x_{0k})\right] = \Phi_1(x_{N_1})\, S_{N_1}^{(1)}(\sigma_k) + {\sum_{r=1}^{N_1-1}}' \left[\Phi_1(x_r) - \Phi_1(x_{r+1})\right] S_r^{(1)}(\sigma_k),$$

где штрихом обозначено суммирование по всем r, кроме $r = k$, а

$$S_r^{(1)}(\sigma_k) = \sum_{m=1}^{r}\left[f_m^{(1)}(x_{0k}) - g_m^{(1)}(x_{0k})\right].$$

Из формул (2.6), (2.8) следует, что при $|m - k| \gg 1$

$$f_m^{(1)}(x_{0k}) - g_m^{(1)}(x_{0k}) = O\left(\frac{\sqrt{n/m}}{(m-k)^2}\right).$$

Это позволяет сделать вывод, что

$${\sum_{r=1}^{N_1-1}}' \left|S_r^{(1)}(\sigma_k)\right| \leqslant \frac{B_1\sqrt{n}}{k^{\beta}},$$

где B_1 — некоторая постоянная; β — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \beta < 0{,}5$. Отсюда, учитывая неравенства (2.2), получаем оценку

$$\left|{\sum_{r=1}^{N_1-1}}' \left[\Phi_1(x_r) - \Phi_1(x_{r+1})\right] S_r^{(1)}(\sigma_k)\right| \leqslant \frac{2A_1B_1}{k^{\beta} n^{\alpha_1 - 0{,}5}}. \tag{2.11}$$

Выберем теперь коэффициенты $\nu_1, \ldots, \nu_{n_1}$ и $\mu_1, \ldots, \mu_{N_1}$ таким образом, чтобы $S_{N_1}^{(1)} = 0$. Тогда оценка первой суммы в правой части выражения (2.10) совпадает с оценкой (2.11).

Требование $S_{N_1}^{(1)} = 0$ приводит к следующему трансцендентному уравнению:

$$\ln\frac{\sqrt{N_1} + \sqrt{\sigma_k}}{\sqrt{N_1} - \sqrt{\sigma_k}} - 2\sqrt{\sigma_k}\sum_{m=1}^{N_1}\frac{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}}{\sigma_k - m + 1 - \mu_m} = 0, \quad k = 1, \ldots, n_1. \tag{2.12}$$

При заданных значениях коэффициентов μ_m корнями этого уравнения являются величины σ_k, связанные с коэффициентами ν_k соотношением (2.9). Допустимо также задание коэффициентов ν_k или σ_k с определением μ_m как решения системы уравнений (2.12). Примеры этих решений приведены ниже.

Оценим вторую сумму в выражении (2.10). Формулы (2.7), (2.8) позволяют получить следующие асимптотические выражения при $n-m \gg 1$, $m-k \gg 1$:

$$f_m^{(2)}(x_{0k}) - g_m^{(2)}(x_{0k}) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}\sqrt{n-m}}\right).$$

Отсюда следуют оценки

$$\sum_{m=N_1+1}^{n} \left| f_m^{(2)}(x_{0k}) - g_m^{(2)}(x_{0k}) \right| \leqslant \frac{C_2}{n^{\beta+0,5}}, \quad C_2 = \text{const} > 0,\ 0 < \beta < 0,5,$$

$$\left| \sum_{m=N_1+1}^{n} \Phi_2(x_m)\left[f_m^{(2)}(x_{0k}) - g_m^{(2)}(x_{0k})\right] \right| \leqslant \frac{M_2 C_2}{n^{\beta+0,5}}.$$

Собирая вместе все оценки, получим, что при $k = 1, \ldots, n_1$

$$(2.13) \qquad |F(x_{0k}) - G(x_{0k})| \leqslant \frac{2A_1B_1}{k^{\beta} n^{\alpha_1 - 0,5}} + \frac{M_2C_2}{n^{\beta+0,5}} + O\left(\frac{1}{k^{\beta} n^{\alpha_1+0,5}}\right).$$

Аналогичным образом получается оценка разности функций F и G в точках x_{0k} при $k = n_1 + 1, \ldots, n$:

$$(2.14) \qquad |F(x_{0k}) - G(x_{0k})| \leqslant \frac{2A_2B_2}{n^{\alpha_2+\beta-0,5}} + \frac{M_1C_1}{n^{\beta+0,5}} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+\alpha_2+0,5}}\right),$$

где B_2, C_1 — соответствующие константы. При этом уравнение (2.12) переходит в уравнение

$$(2.15) \qquad \sqrt{n-N_2} - \frac{\sqrt{\tau_k}}{2}\ln\frac{\sqrt{n-N_2}+\sqrt{\tau_k}}{\sqrt{n-N_2}-\sqrt{\tau_k}} -$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{m=N_2+1}^{n}\frac{(n-m+1)^{3/2}-(n-m)^{3/2}}{n-m-\tau_k+1-\mu_m} = 0, \quad k = n_1+1, \ldots, n.$$

Решение этого уравнения позволяет определить коэффициенты ν_k, связанные с τ_k соотношением (2.9) при заданных μ_m, либо коэффициенты μ_m при заданных значениях ν_k.

Из полученных оценок (2.13), (2.14) следует

Т е о р е м а. Пусть функция $\gamma(x)$ при $x \in [0, 1]$ представима в виде (1.2), где $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α_1, $0,5 < \alpha_1 \leqslant 1$, для $x \in [0, \delta]$ и α_2, $0 < \alpha_2 \leqslant 1$, для $x \in (\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$. Тогда существует последовательность множеств точек $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ и $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям (1.4), для которой функция (1.6) при неограниченном увеличении n равномерно сходится к интегралу типа Коши (1.1) во всех точках $x_{0k} \in [0, 1]$.

3. Анализ уравнений (2.12), (2.15) показывает, что существует бесконечное число множеств точек x_{0k}, x_m ($k, m = 1, \ldots, n$), удовлетворяющих уравнениям (2.12), (2.15) и условиям (1.4). Рассмотрим некоторые из них.

Предположим, что все коэффициенты $\mu_m = \mu = \text{const}$. Тогда при $N \to \infty$ ($N = N_1$, $n - N_2$) решения уравнений (2.12), (2.15) имеют вид

$$\nu_k(\mu) = \nu_k(0) + \mu, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Расчет показывает, что зависимость (3.1) практически выполняется и при конечном значении $N \gg 1$. Поэтому в случае $\mu_m = \text{const}$ достаточно вычислять коэффициенты $\nu_k(0)$. Результаты такого расчета для $N = 100$ с округлением до двух десятичных знаков приведены в табл. 1.

Таблица 1

k	$\nu_k(0)$
1	0,55
2	0,52
3	0,51
4	0,51
5	0,5
$n-1$	0,5
n	0,38

Те же результаты дает расчет при $N = 1000$. В соответствии с формулами (1.5), (3.1) координаты дискретных вихрей и контрольных точек определяются выражениями

$$x_m = (m - 1 + \mu)/n, \quad x_{0k} = (k - 1 + \nu_k(0) + \mu)/n, \quad m, k = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Отметим, что при $\mu > 1 - \nu_k(0)$ контрольная точка выходит за пределы элемента $[c_{k-1}, c_k]$, $k = 1, 2, \ldots$

Пример расчета погрешности аппроксимации интеграла типа Коши (1.1) формулой (1.6) в случае $\gamma(x) = \sqrt{(1-x)/x}$ для равномерного распределения дискретных вихрей на отрезке $[0,1]$ приведен в табл. 2. Величина

$$\varepsilon_k = [1 - G(x_{0k})/F(x_{0k})]\cdot 100\%, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Расчет проводился по двум схемам выбора координат дискретных вихрей и контрольных точек: $\mu = 1/4$, $\nu_k = 3/4$ и локальная аппроксимация.

Первая схема широко применяется в методе дискретных вихрей [2—5], а вторая основана на формулах (3.1), (3.2) и данных табл. 1. Отметим, что расчет по второй схеме для $\mu = 0$; 0,25 и 0,5 дал идентичные результаты, которые отражены в табл. 2.

Расчет показал, что в средней части интервала $[0,1]$ погрешность аппроксимации интеграла (1.1) формулой (1.6) практически одинакова по обеим схемам. Вблизи концов интервала первая схема дает высокую погрешность, которая вблизи конца $x = 0$ увеличивается с ростом n. Локальная аппроксимация при рассматриваемых значениях n на два порядка уменьшает погрешность расчета интеграла (1.1) вблизи концов интервала, и эта погрешность убывает с ростом n.

Другим примером локальной аппроксимации является расчетная схема, предложенная в работе [9]. Согласно этой схеме, дискретные вихри помещаются в «центре тяжести» вихревого слоя на каждом отрезке $[c_{m-1}, c_m]$, а контрольные точки выбираются, как показал дополнительный анализ, в соответствии с решением уравнений (2.12), (2.15).

Таблица 2

	n	ε_1	ε_2	ε_3	$\varepsilon_{n/2}$	ε_{n-2}	ε_{n-1}	ε_n
$\mu=1/4$, $\nu_k=3/4$	25	97	19	6,1	0,40	0,11	0,09	—4,3
	50	137	27	11	0,15	0,03	0,02	—3,1
	100	194	38	16	0,06	—0,01	—0,01	—2,2
Локальная аппроксимация	25	2,2	0,66	0,34	0,11	0,21	0,18	0,17
	50	1,8	0,39	0,12	0,15	0,03	0,02	—0,08
	100	1,7	0,17	—0,08	0,06	—0,01	—0,01	—0,07

Приведенные примеры иллюстрируют широкие возможности локальной аппроксимации вихревого слоя системой дискретных вихрей. Основной особенностью такой аппроксимации является решение задачи для некоторого участка вихревого слоя независимо от влияния остальной его части.

В связи с этим полученные результаты могут быть применены для аппроксимации вихревых слоев с иным характером поведения интенсивности $\gamma(x)$ вблизи концов слоя. Однако при этом следует иметь в виду, что число контрольных точек и их положение зависят от вида функции $\gamma(x)$. Например, в случае ограниченной на обоих концах вихревого слоя функции $\gamma(x) = \sqrt{x(1-x)}\varphi(x)$ равномерная сходимость функции (1.6) к интегралу (1.1) имеет место в $n+1$ точках при n дискретных вихрях, расположенных в середине каждого элемента $[c_{m-1}, c_m]$ вихревого слоя. Координаты контрольных точек определяются вблизи концов интервала $[0,1]$ решением уравнения (2.15). В соответствии с данными табл. 1

$$x_{01} = 0{,}12/n,\ x_{0k} = (k-1)/n,\ k = 2, \ldots, n,\ x_{0n+1} = 1 - x_{01}.$$

Для функции $\gamma(x) = \varphi(x)/\sqrt{x(1-x)}$, не ограниченной на обоих концах интервала $[0,1]$, равномерная сходимость функции (1.6) к интегралу (1.1) имеет место в $n-1$ точках. При этом дискретные вихри должны быть снова расположены в середине каждого элемента, а координаты контрольных точек

$$x_{0k} = (k - 0{,}5 + \nu_k(0))/n,\ k = 1, \ldots, n_1,\ x_{0k} = (k + 0{,}5 - \\ -\nu_{n-k}(0))/n,\ k = n_1 + 1, \ldots, n-1,$$

где коэффициенты $\nu_k(0)$ определяются табл. 1.

Поступила 19 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** О построении потока, обтекающего дугу заданной формы.— Труды ЦАГИ, 1932, вып. 118.
2. **Белоцерковский С. М.** Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., 1965.
3. **Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.** Крыло в нестационарном потоке газа. М., 1971.
4. **Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К.** Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М., 1975.
5. **Белоцерковский С. М., Ништ М. И.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М., 1978.
6. **Лифанов И. К., Полонский Я. Е.** Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
7. **Лифанов И. К.** О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— ДАН СССР, 1978, т. 239, № 2.
8. **Сарен В. Э.** О сходимости метода дискретных вихрей.— Сибирский математический журнал, 1978, т. 19, № 2.
9. **Горелов Д. Н., Куляев Р. Л.** Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6.