

О НЕСТАЦИОНАРНОМ КОНВЕКТИВНОМ МАССО- И ТЕПЛООБМЕНЕ КАПЛИ ПРИ СОИЗМЕРИМЫХ ФАЗОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ

А. Д. Полянин
(Москва)

Линейная задача о конвективном массо- и теплообмене капли при соизмеримых фазовых сопротивлениях в случае больших чисел Пекле исследовалась в [1—8]. В [1—7] считалось, что по обе стороны от раздела фаз существует тонкий диффузионный пограничный слой; при этом в [1, 2, 5] задача рассматривалась в стационарной постановке. Полученные в [3, 4, 6, 7] решения выходили на стационарный режим, соответствующий некоторому неоднородному распределению концентрации в пограничных слоях, который определял отличное от нуля и пропорциональное $\sqrt{\text{Pe}}$ среднее число Шервуда. В [8] полная задача о массообмене капли при соизмеримых фазовых сопротивлениях моделировалась уравнением переноса внутри капли с граничным условием на поверхности, отражающим характер массообмена в сплошной фазе.

В данной работе показано, что, во-первых, результаты [3, 4, 6, 7] применимы лишь на начальной быстропротекающей стадии процесса (до начала взаимодействия внутреннего диффузионного пограничного слоя с порожденным им диффузионным следом) и неприменимы на промежуточной и заключительной стадиях процесса и, во-вторых, результаты моделирования [8] плохо отражают динамику процесса массо- и теплопереноса внутри капли на начальной и промежуточной стадиях процесса и хорошо — на заключительной стадии.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарный конвективный массо- и теплообмен между каплей и сплошной средой в случае соизмеримых фазовых сопротивлений. Считаем, что на поверхности капли выполняется условие фазового равновесия в виде

$$(1.1)' \quad C_2 = \alpha F(C_1) \quad (F(0) = 0, F'_c \geq 0, \alpha \geq 0),$$

где C_1 и C_2 — концентрации в сплошной и дисперсной фазах; $\Psi = -\alpha F(C_1)C_1^{-1}$ — коэффициент распределения [8]. Обычно считается, что функция F линейным образом зависит от концентрации $F(C_1) = C_1$ [1—7]. В [8, 9] было показано, что в ряде случаев следует использовать степенную зависимость $F(C_1) = C_1^n$, где, например, $n \approx 0,6$ [9]. Ниже будет рассматриваться наиболее общий случай произвольной зависимости $F = F(C_1)$ (1.1)′.

В безразмерных переменных соответствующая краевая задача имеет вид

$$(1.1) \quad \partial c_i / \partial t + (\mathbf{v}_i \nabla) c_i = (\kappa_i / \text{Pe}) \Delta c_i, \quad i = 1, 2, \kappa_1 = \kappa, \kappa_2 = 1;$$

$$(1.2) \quad t = 0, c_1 = 1, c_2 = 0; \quad r \rightarrow \infty, c_1 \rightarrow 1;$$

$$(1.3) \quad r = 1, c_2 = f(c_1), \quad \kappa \partial c_1 / \partial r = \partial c_2 / \partial r,$$

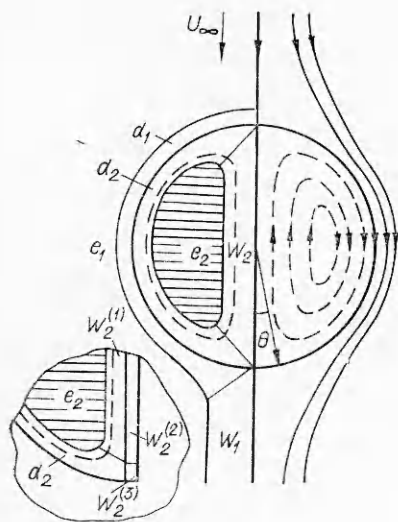
$$c_1 = 1 + C_*^{-1}(C_1 - C_{10}), \quad c_2 = C_*^{-1}(C_2 - C_1), \quad \text{Pe} = aUD_2^{-1}, \quad t = a^{-1}Ut',$$

$$\kappa = D_1D_2^{-1}, \quad f(c_1) \equiv -C_{20}C_*^{-1} + \alpha C_*^{-1}F(C_*(c_1 - 1) + C_{10}),$$

где C_{10} и C_{20} — начальные концентрации вне и внутри капли; D_i — коэффициенты диффузии; Pe — число Пекле; a — радиус капли; U — характерная скорость потока; C_* — характерная концентрация, которая выбирается из соображений удобства (в линейном случае $F(C_1) = C_1$ удобно положить $C_* = C_{10} - \alpha^{-1}C_{20}$, тогда первое граничное условие (1.3) принимает вид $r = 1, c_2 = \alpha c_1$); t' — размерное время; при записи уравнений, начальных и граничных условий (1.1)—(1.3) за характерный масштаб длины и времени выбирались величины a и aU^{-1} .

Для определенности далее считаем, что распределения скоростей жидкости \mathbf{v}_i вне и внутри капли соответствуют решению Адамара—Рыбчинского

$$(1.4) \quad \psi^{(1)} = (1/4)(1 - r)[2(\beta + 1)r - \beta - \beta r^{-1}] \sin^2 \theta, \quad r \geq 1,$$



$$\psi^{(2)} = (1/4)r^2(1 - r^2) \sin^2 \theta, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$\mathbf{v}_i = (v_r^{(i)}, v_\theta^{(i)}), \quad v_r^{(i)} = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta},$$

$$v_\theta^{(i)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r}.$$

При записи (1.1)–(1.4) за характерную скорость потока для удобства принималась величина $U = U_\infty(\beta + 1)^{-1}$, где U_∞ — скорость потока на бесконечности, β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости; угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности (см. фигуру).

Следует отметить, что предельные случаи лимитирующего сопротивления внешней или внутренней фазы соответствуют предельным переходам в (1.1)–(1.4)

при $\alpha \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$. Далее будет рассмотрен наиболее важный случай соизмеримых фазовых сопротивлений, который, например, имеет место в соответствующей тепловой задаче, где всегда выполняются равенства $\alpha = 1$, $F(C_1) = C_1$ в (1.1)' (здесь C_1 и C_2 — температура вне и внутри капли).

Асимптотический анализ задачи (1.1)–(1.4) при больших числах Пекле ($Pe \gg 1$) (считается, что $f(c_1) = O(1)$ при $c_1 = O(1)$) показывает, что во всей области течения вне и внутри капли можно выделить ядра потока e_i , области диффузионного пограничного слоя d_i и области диффузионного следа W_i , $i = 1, 2$ (см. фигуру).

2. Начальная стадия процесса. При $t \ll 1$ конвективным членом в уравнениях (1.1) можно пренебречь, и решение здесь соответствует тонкому «ударному» сферическому слою, расположенному вне и внутри капли вблизи ее поверхности (который является следствием несогласованности начальных и граничных условий (1.2), (1.3) при $f(1) \neq 0$).

При $t = O(1)$ конвективные члены в уравнениях (1.1) будут того же порядка, что и нестационарный член, при этом концентрация в ядрах потока остается равной начальной концентрации $c_1^{(e)} = 1$ и $c_2^{(e)} = 0$, а вблизи поверхности капли формируются диффузионные пограничные слои $d_i = \{|r - 1| \leq O(Pe^{-1/2}), O(Pe^{-1/2}) \leq \theta, O(Pe^{-1/2}) \leq \pi - \theta\}$ (здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области), которые пока ведут себя качественно одинаково по разные стороны от поверхности капли. Введение новой «растянутой» погранслоевой координаты Y в уравнения, начальные и граничные условия (1.1)–(1.4) с последующим выделением старших членов разложения по малому параметру $Pe^{-1/2}$ приводит к следующей краевой задаче:

$$(2.1) \quad \frac{\partial c_i^{(d)}}{\partial t} = \Lambda^{(i)} \cdot c_i^{(d)}, \quad \Lambda^{(i)} \equiv \kappa_i \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - Y \mu \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad i = 1, 2;$$

$$(2.2) \quad t = 0, \quad c_1^{(d)} = 1, \quad c_2^{(d)} = 0; \quad Y \rightarrow -\infty, \quad c_1^{(d)} \rightarrow 1; \quad Y \rightarrow +\infty, \quad c_2^{(d)} \rightarrow 0;$$

$$(2.3) \quad Y = 0, \quad c_2^{(d)} = f(c_1^{(d)}), \quad \kappa \frac{\partial c_1^{(d)}}{\partial Y} = \frac{\partial c_2^{(d)}}{\partial Y},$$

$$Y = Pe^{1/2}(1 - r), \quad \mu = \cos \theta \quad (\kappa_1 = \kappa, \quad \kappa_2 = 1).$$

Решение (2.1)–(2.3) ищем в виде

$$(2.4) \quad c_i^{(d)} = c_i^{(d)}(\zeta, \mu, \omega) = A_i + B_i \operatorname{erf} \left\{ \frac{|\zeta|}{2\kappa_i^{1/2} [\sigma(\mu) - \sigma(S(\omega))]^{1/2}} \right\},$$

$$\zeta = \text{Pe}^{1/2} \psi = \frac{4}{2} Y (1 - \mu^2), \quad \sigma(\mu) = \frac{4}{6} (2 - \mu)(1 + \mu)^2,$$

$$\omega = t - \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu}, \quad S(\omega) = -\text{th} \frac{\omega}{2}.$$

Можно показать, что выражение (2.4) является решением уравнений (2.1) при любых постоянных A_i и B_i , явный вид которых получается путем подстановки (2.4) в начальные и граничные условия (2.2), (2.3). В результате имеем

$$(2.5) \quad A_1 = 1 - \lambda \kappa^{-1/2}, \quad B_1 = \lambda \kappa^{-1/2}, \quad A_2 = \lambda, \quad B_2 = -\lambda;$$

$$(2.6) \quad \lambda = f(1 - \lambda \kappa^{-1/2}).$$

Здесь параметр λ определяется путем решения (трансцендентного) уравнения (2.6). В линейном случае $f(c) = c$ формулы (2.4)–(2.6) переходят в формулы [4, 6].

Можно показать, что выражения (2.4) становятся непригодными в окрестности точки вытекания $\theta = 0$ ($\mu = 1$), где происходит формирование внутреннего и внешнего диффузионного следа W_i . Во внешнем следе W_1 обедненное за счет диффузии вещество уносится потоком от поверхности капли на бесконечность и не оказывает обратного влияния на порождающий его внешний диффузионный пограничный слой. Существенно более сложная ситуация имеет место внутри капли. При $t = 0$ распределение концентрации внутри капли однородно и диффузионный след W_2 отсутствует; при $t > 0$ диффузионный след начинает формироваться и, постепенно «продвигаясь» вдоль оси потока, «прорастает» через весь объем капли, после чего начинает взаимодействовать с внутренним диффузионным пограничным слоем d_2 , оказывая на него обратное влияние.

Диффузионный след W_2 существенно неоднороден и состоит из области задней критической точки $W_2^{(3)} = \{1 - r \leq O(\text{Pe}^{-1/2}), \theta \leq O(\text{Pe}^{-1/2})\}$, конвективно-погранслошной области следа $W_2^{(1)} = \{O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq 1 - r, O(\text{Pe}^{-1}) \leq \psi^{(2)} \leq O(\text{Pe}^{-1/2})\}$, внутренней области следа $W_2^{(2)} = \{O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq 1 - r, 0 \leq \psi^{(2)} \leq O(\text{Pe}^{-1})\}$ и области передней критической точки $b = \{1 - r \leq O(\text{Pe}^{-1/2}), \pi - \theta \leq O(\text{Pe}^{-1/2})\}$ (см. фигуру). Процедура получения уравнений и граничных условий для распределения концентрации в указанных областях полностью аналогична [10, 11]. Основной перенос поступающего из погранслоя вещества происходит в конвективно-погранслошной области диффузионного следа $W_2^{(1)}$, распределение концентрации в котором определяется уравнением

$$(2.7) \quad \frac{\partial c_z^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{2}(1 - z^2) \frac{\partial c_z^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{2} z \eta \frac{\partial c_z^{(1)}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = \text{Pe}^{1/4} \rho,$$

где $z = r \cos \theta$, $\rho = r \sin \theta$ — цилиндрическая система координат, связанная с центром капли; η — «растянутая» координата. Уравнение (2.7) получено введением новых переменных z и η в (1.1) с последующим выделением старших членов разложения по малому параметру $\text{Pe}^{-1/2}$ (при этой процедуре, как всегда, считается, что $\eta = O(1)$, $\partial/\partial \eta = O(1)$, $\partial^2/\partial \eta^2 = O(1)$).

Общее решение уравнения (2.7) имеет вид

$$(2.8) \quad c_z^{(1)} = \Phi(\zeta, \omega^{(1)}), \quad \zeta = \text{Pe}^{1/2} \psi^{(2)} = \frac{1}{4} \eta^2 (1 - z^2), \quad \omega^{(1)} = t + \ln \frac{1 + z}{1 - z},$$

где Φ — произвольная функция обоих аргументов ζ и $\omega^{(1)}$.

Условие асимптотического сращивания решений в области диффузионного пограничного слоя (2.4)–(2.6) и конвективно-погранслошной области диффузионного следа (2.8) записывается в форме

$$c_z^{(1)}|_{\mu \rightarrow 1} = c_z^{(1)}|_{z \rightarrow 1}$$

и определяет явный вид функции Φ , а следовательно, и распределение концентрации в области $W_2^{(1)}$

$$(2.9) \quad c_2^{(1)} = c_2^{(d)} \left(\zeta, 1, \omega^{(1)} - \frac{1}{2} \ln \text{Pe} + \ln \zeta - 4 \ln 2 \right).$$

Проведение процедуры сращивания в данном случае наиболее просто понять, если вместо двух локальных координат μ (в области d_2) и z (в области $W_2^{(1)}$) ввести одну непрерывную сквозную координату s , которая отсчитывается по течению вдоль линий тока, где начало отсчета координаты s ведется от миделева сечения капли $\theta = \pi/2$, s — расстояние от поверхности $\theta = \pi/2$ вдоль фиксированной линии тока $\psi^{(2)} = \text{const}$. Можно убедиться, что в диффузионном пограничном слое d_2 локальная координата выражается через непрерывную следующим образом: $\mu = \sin s$ ($0 \leq s \leq \pi/2$), а в конвективно-погранслоевой области следа $W_2^{(1)}$ справедливо соотношение $z = \pi/2 + 1 - s$ ($\pi/2 \leq s \leq \pi/2 + 2$). Заметим далее, что локальные переменные ω и $\omega^{(1)}$ являются характеристиками укороченных уравнений (2.1), (2.7) при $\partial/\partial Y = \partial^2/\partial Y^2 = \partial/\partial \eta = 0$. Учитывая равенство $(\nabla \nabla) c_2 = v_s \partial c_2 / \partial s$, нетрудно проверить, что вместо локальных переменных ω и $\omega^{(1)}$, соответствующих локальным координатам μ и z , можно ввести одну непрерывную циклическую переменную

$$(2.10) \quad \bar{\omega} = i - \int_0^s \frac{ds}{v_s}, \quad v_s = |\mathbf{v}|,$$

с помощью которой решения в диффузионном пограничном слое и конвективно-погранслоевой области следа внутри капли могут быть записаны в виде

$$(2.11) \quad c_2^{(d)} = c_2^{(d)}(\zeta, \mu, \bar{\omega}), \quad c_2^{(1)} = \Phi(\zeta, \bar{\omega}).$$

Сращивание выражений (2.11) (в отличие от (2.4) и (2.8)) уже не представляет никаких трудностей и проводится элементарно; при этом прямое вычисление $\bar{\omega}$ в области $W_2^{(1)}$ с последующим переходом от непрерывной координаты s к локальной координате z приводит к формуле (2.9). Наличие логарифмических членов в представлении (2.9) обусловлено особенностью подынтегрального выражения (2.10) в окрестности точки вытекания, где скорость жидкости v_s близка к нулю и существенно неоднородна по ψ^2 .

Уравнение (2.7) соответствует чисто конвективному переносу вещества без изменения вдоль линий тока. Профиль концентрации в $W_2^{(1)}$ определяется распределением концентрации на «выходе» из диффузионного погранслоя d_2 . Из формулы (2.9) видно, что в конвективно-погранслоевой области диффузионного следа $W_2^{(1)}$ имеет место существенное запаздывание с характерным временем $\ln \text{Pe}/2$ (в $W_2^{(1)}$, как всегда, считается, что $\zeta = O(1)$) и это запаздывание различно на разных линиях тока $\zeta = \text{const}$. Такая дисперсия времени запаздывания обусловлена неоднородностью распределения скоростей жидкости вблизи критической точки вытекания $\theta = 0$, при этом, как следует из (2.9), вблизи оси потока ($\zeta \ll 1$) перенос вещества практически отсутствует и запаздывание очень велико. При увеличении расстояния от оси потока скорость жидкости в окрестности точки вытекания возрастает и запаздывание уменьшается.

Для того чтобы диффузионный след полностью сформировался (т. е. «пророс» через весь объем капли) и начал взаимодействовать с диффузионным погранслоем d_2 , непрерывная координата s , «продвигаясь» вдоль фиксированной линии тока вблизи оси потока и «пройдя» окрестность передней критической точки ($\theta \approx \pi$), должна попасть в область d_2 . При этом ввиду полной тождественности особенностей поля скоростей жидкости в окрестностях передней ($\theta \approx \pi$) и задней ($\theta \approx 0$) критических точек время запаздывания должно удвоиться.

Из проведенного анализа следует, что область применимости решения (2.4) — (2.6) ограничена интервалом $0 \leq t < t_*$, где t_* — характерное время запаздывания

$$(2.12) \quad t_* = O(\ln \text{Pe}).$$

Характерное время запаздывания t_* имеет простой физический смысл, а именно: определим t_* по формуле

$$(2.13) \quad t_* = J(\psi^{(2)}) = \oint \frac{ds}{v_s},$$

соответствующей времени, за которое элемент жидкости внутри капли совершит полный оборот вдоль замкнутой линии тока $\psi^{(2)} = \text{const}$, проходящей через область диффузионного погранслоя d_2 и конвективно-пограничную область диффузионного следа $W_2^{(1)}$, т. е. в пределе при

$$(2.14) \quad \text{Pe} \rightarrow \infty, \quad \psi^{(2)} = \text{Pe}^{-1/2} \zeta, \quad \zeta = O(1).$$

Из формул (2.13), (2.14) в результате разложения $J(\psi^{(2)})$ получаем выражение (2.12).

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Так как скорость течения жидкости внутри капли конечна, то сначала при небольших временах $t < t_*$ в область передней критической точки b_2 поступает однородная концентрация, приходящая из толщи жидкости. Это происходит до тех пор, пока попавший из «конца» погранслоя d_2 в диффузионный след W_2 обогащенный (за счет притока вещества извне через поверхность капли) раствор, пройдя весь путь вблизи оси потока, не дойдет до «начала» диффузионного погранслоя. Характерное время переноса вещества в диффузионном следе капли определяет область применимости решения (2.4) — (2.6), которое при $t > t_*$ перестает правильно описывать распределение концентрации в диффузионном следе (ввиду изменения условия натекания).

Формула (2.12) позволяет сделать следующее замечание относительно качественного поведения основных характеристик массопереноса вне и внутри капли. При очень больших числах Пекле, таких, что $\ln \text{Pe} > O(1)$, из выражения (2.12) имеем $t_* > O(1)$. Характерное время релаксации t_p решения диффузионного пограничного слоя (2.4) — (2.6) $t_p = O(1)$ и меньше характерного времени запаздывания $t_p < t_*$. Последнее означает, что при очень больших числах Пекле диффузионные пограничные слои, расположенные по разные стороны от поверхности капли, успевают установиться раньше, чем начнется взаимодействие внутреннего погранслоя с порожденным им внутренним диффузионным следом (т. е. стационарное решение $c_i^{(d)} = \lim_{t \rightarrow \infty} c_i^{(d)}(\zeta, \mu, \omega(t, \mu))$ может рассматриваться как промежуточная асимптотика решения общей нестационарной задачи в областях d_i). Это обстоятельство придает некоторый смысл стационарным решениям [1, 2, 5]. Из сказанного следует, что зависимость среднего диффузионного потока на поверхности капли от времени должна иметь характерный плоский участок, соответствующий промежуточному «стационарному» режиму.

На промежуточном этапе процесса массо- и теплопереноса при $O(\ln \text{Pe}) \leq t < O(\text{Pe})$ уравнения диффузионного пограничного слоя (2.1) все еще остаются справедливыми, однако решение здесь в отличие от (2.4) — (2.6) уже не является автомодельным, так как необходимо учитывать взаимное влияние диффузионного следа W_2 и пограничного слоя d_2 внутри капли. В результате взаимодействия внутренний диффузионный след сильно «размывает» диффузионный пограничный слой d_2 (здесь уже погранслои, расположенные вне и внутри капли, начинают существенно различаться). Это постепенно приводит к значительному увеличению

толщины внутреннего пограничного слоя со временем, так что линейная аппроксимация функции тока вблизи поверхности капли, а следовательно, и уравнения (2.1) становятся уже непригодными для правильного описания процесса.

Далее промежуточный интервал времен не рассматривается, а будет исследована асимптотика решения задачи (1.1) — (1.3) на заключительном этапе развития процесса при $t \geq O(Re)$.

3. Соответствие асимптотических разложений образа и оригинала.

Многие качественные и количественные особенности асимптотического поведения нестационарных задач с малым или большим параметром могут быть выявлены путем применения преобразования Лапласа — Карлсона в виду следующего полезного замечания.

Пусть имеется (произвольная) функция $x = x(t, \epsilon)$, зависящая от времени и малого (большого) параметра ϵ (для сокращения записи зависимость функции x от пространственных координат опускается), которая в пределе

$$(3.1) \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \tau = \delta(\epsilon)t = O(1)$$

разлагается в асимптотический ряд по параметру ϵ (τ фиксировано):

$$(3.2) \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad x \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\epsilon) x_n(\tau), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0.$$

Переменная τ соответствует «быстрому» или «медленному» времени в зависимости от выбора вида функции $\delta(\epsilon)$ (наиболее часто встречается зависимость $\delta(\epsilon) = \epsilon^k$). Естественно, разложений типа (3.2) можно построить сколь угодно много, выбирая по-разному $\delta(\epsilon)$. В конкретных случаях, когда функция $x = x(t, \epsilon)$ является решением некоторой краевой задачи, выбор зависимости $\delta = \delta(\epsilon)$, как правило, не вызывает трудностей [12, 13].

Поставим в соответствие функции $x(t, \epsilon)$ образ $\bar{x}(p, \epsilon)$, полученный преобразованием Лапласа — Карлсона

$$(3.3) \quad \bar{x} = \bar{x}(p, \epsilon) = \mathbf{L} \cdot x, \quad \mathbf{L} \cdot x = p \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t, \epsilon) dt.$$

В пространстве образов ряду (3.2) ввиду свойств оператора \mathbf{L} формально соответствует ряд

$$(3.4) \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \bar{x} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\epsilon) \bar{x}_n(q), \quad q = \frac{p}{\delta(\epsilon)}.$$

Заметим, что асимптотическое разложение функции $\bar{x} = \bar{x}(p, \epsilon)$ (3.3) при $\epsilon \rightarrow 0$ и $p = \delta(\epsilon)q$, $|q| = O(1)$ для заданной асимптотической последовательности $\alpha_n(\epsilon)$ единственно [13] и, следовательно, совпадает с (3.4). Из сопоставления рядов (3.2) и (3.4) с учетом сделанного замечания и соотношений (3.1) следует, что асимптотическому разложению функции \bar{x} в ряд в пространстве образов при $\epsilon \rightarrow 0$ и $|p| = O(\delta)$, $\delta = \delta(\epsilon)$ соответствует разложение оригинала x при $\epsilon \rightarrow 0$ и $t = O(1/\delta)$, и наоборот. Указанные свойства асимптотических разложений позволяют элементарно переносить результаты, полученные в пространстве образов, на оригинал (некоторые общие утверждения относительно соответствия сходимости рядов (3.2) и (3.4) могут быть получены простой переформулировкой теоремы, приведенной в [14] на с. 172). Применительно к задачам конвективного тепло- и массопереноса сказанное означает, что «сжатие» («растяжение») комплексного параметра p в пространстве образов соответствует «растяжению» («сжатию») времени t в пространстве оригиналов; при этом выполняется соответствие $t = O(Re^k) \leftrightarrow |p| = O(Re^{-k})$ (здесь приведен наиболее простой случай степенной зависимости δ от Re).

4. **Заключительная стадия процесса.** Задача (1.1)–(1.4) после преобразования Лапласа — Карлсона по времени принимает вид

$$(4.1) \quad p(u_1 - 1) + (\mathbf{v}_1 \nabla) u_1 = \kappa \text{Pe}^{-1} \Delta u_1 \quad (1 < r);$$

$$(4.2) \quad p u_2 + (\mathbf{v}_2 \nabla) u_2 = \text{Pe}^{-1} \Delta u_2 \quad (0 \leq r < 1);$$

$$(4.3) \quad r \rightarrow \infty, \quad u_1 \rightarrow 1; \quad r = 1, \quad u_2 = \mathbf{L} \cdot f(c_1), \quad \kappa \partial u_1 / \partial r = \partial u_2 / \partial r, \\ u_i = u_i(\mathbf{r}, p) = \mathbf{L} \cdot c_i(\mathbf{r}, t).$$

Для анализа задачи (1.1) — (1.3) воспользуемся замечанием, сделанным в п. 3, которое устанавливает соответствие между асимптотическими разложениями краевых задач для изображения (4.1) — (4.3) и оригинала (1.1) — (1.3). Рассмотрим предельный случай

$$(4.4) \quad \text{Pe} \rightarrow \infty, \quad p = q \text{Pe}^{-1}, \quad |q| = O(1),$$

который в силу результатов п. 3 будет соответствовать поведению оригинала c_i при больших временах $t = O(\text{Pe})$.

Решения в ядрах потока ищем в виде регулярного разложения по обратным степеням числа Пекле ($i = 1, 2, j = 0, 1$)

$$(4.5) \quad u_i = u_{i0}^{(e)} + \text{Pe}^{-1} u_{i1}^{(e)} + \dots, \quad u_{i0}^{(e)} / u_{i1}^{(e)} = O(1), \quad u_{ij}^{(e)} = u_{ij}^{(e)}(r, \theta).$$

Подставляя (4.5) с учетом (4.4) в уравнения и граничные условия (4.1) — (4.3) и выделяя члены при одинаковых степенях числа Пекле, для первых членов разложения в ядре потока получаем

$$(4.6) \quad (\mathbf{v}_1 \nabla) u_{10}^{(e)} = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad u_{10}^{(e)} \rightarrow 1;$$

$$(4.7) \quad (\mathbf{v}_1 \nabla) u_{11}^{(e)} = \kappa \Delta u_{10}^{(e)} - q (u_{10}^{(e)} - 1), \quad r \rightarrow \infty, \quad u_{11}^{(e)} \rightarrow 0;$$

$$(4.8) \quad (\mathbf{v}_2 \nabla) u_{20}^{(e)} = 0;$$

$$(4.9) \quad (\mathbf{v}_2 \nabla) u_{21}^{(e)} = \Delta u_{20}^{(e)} - q u_{20}^{(e)}.$$

Во внешнем и внутреннем диффузионных пограничных слоях d_i , как и ранее, вводится «растянутая» переменная Y и решение ищется в виде разложений

$$(4.10) \quad u_i = u_{i0}^{(d)} + \text{Pe}^{-1/2} u_{i1}^{(d)} + \dots, \quad u_{i0}^{(d)} / u_{i1}^{(d)} = O(1), \quad u_{ij}^{(d)} = u_{ij}^{(d)}(Y, \mu), \\ Y = \text{Pe}^{1/2}(1 - r), \quad \mu = \cos \theta \quad (i = 1, 2, j = 0, 1).$$

Подстановка (4.10) в (4.1) — (4.3) с учетом (4.4) и последующим разложением в ряд по малому параметру $\text{Pe}^{-1/2}$ приводит к погранслойным уравнениям и граничным условиям (дифференциальный оператор $\Lambda^{(i)}$ определен в (2.1)):

$$(4.11) \quad \Lambda^{(i)} \cdot u_{i0}^{(d)} = 0, \quad i = 1, 2;$$

$$(4.12) \quad \Lambda^{(1)} \cdot u_{11}^{(d)} = \left(1 - \frac{3}{2} \beta\right) \mu Y^2 \frac{\partial u_{10}^{(d)}}{\partial Y} - \frac{3}{2} \beta Y (1 - \mu^2) \frac{\partial u_{10}^{(d)}}{\partial \mu} - 2\kappa \frac{\partial u_{10}^{(d)}}{\partial Y};$$

$$(4.13) \quad \Lambda^{(2)} \cdot u_{21}^{(d)} = -\frac{1}{2} \mu Y^2 \frac{\partial u_{20}^{(d)}}{\partial Y} - \frac{3}{2} Y (1 - \mu^2) \frac{\partial u_{20}^{(d)}}{\partial \mu} - 2 \frac{\partial u_{20}^{(d)}}{\partial Y};$$

$$(4.14) \quad Y = 0, \quad u_{20}^{(d)} = \mathbf{L} \cdot f(c_{10}^{(d)}), \quad u_{21}^{(d)} = \mathbf{L} \cdot (\gamma c_{11}^{(d)}), \quad \gamma = \frac{\partial f}{\partial c_1} \Big|_{c_1 = c_{10}^{(d)}},$$

$$Y = 0, \quad \kappa \frac{\partial u_{1j}^{(d)}}{\partial Y} = \frac{\partial u_{2j}^{(d)}}{\partial Y}, \quad j = 0, 1.$$

В конвективно-погранслойной области диффузионного следа $W_2^{(1)}$ внутри капли решение ищется в виде разложения

$$(4.15) \quad u_2 = u_{20}^{(1)} + \text{Pe}^{-1/2} u_{21}^{(1)} + \dots, \quad u_{20}^{(1)} / u_{21}^{(1)} = O(1),$$

$$u_{2j}^{(1)} = u_{2j}^{(1)}(z, \eta), \quad \eta = \text{Pe}^{1/4} \rho,$$

члены которого удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(4.16) \quad (1 - z^2) \frac{\partial u_{20}^{(1)}}{\partial z} + \eta z \frac{\partial u_{20}^{(1)}}{\partial \eta} = 0,$$

$$(1 - z^2) \frac{\partial u_{21}^{(1)}}{\partial z} + \eta z \frac{\partial u_{21}^{(1)}}{\partial \eta} = 2\eta^2 \frac{\partial u_{20}^{(1)}}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 u_{20}^{(1)}}{\partial \eta^2}.$$

Уравнения и граничные условия (4.6) — (4.9), (4.11) — (4.14), (4.16) следует дополнить условиями асимптотического срачивания решений на общих границах [12, 13]: решения в ядрах внешнего и внутреннего потока e_i должны срачиваться с решениями внешнего и внутреннего диффузионного пограничного слоя d_i ; решение в конвективно-погранслоистой области внутреннего диффузионного следа $W_2^{(1)}$ должно срачиваться с решением погранслоя d_2 и с решением в ядре потока внутри капли e_2 . Для главных членов асимптотических разложений (4.5), (4.10), (4.15) указанные условия срачивания записываются в виде

$$(4.17) \quad u_{10}^{(e)}(r \rightarrow 1) = u_{10}^{(d)}(\bar{Y} \rightarrow -\infty), \quad u_{20}^{(e)}(r \rightarrow 1) = u_{20}^{(d)}(Y \rightarrow +\infty),$$

$$u_{20}^{(e)}(\rho \rightarrow 0) = u_{20}^{(1)}(\eta \rightarrow \infty), \quad u_{20}^{(d)}(\mu \rightarrow \pm 1) = u_{20}^{(1)}(z \rightarrow \pm 1).$$

Из уравнений (4.6), (4.8) следует, что нулевые члены разложения во внешнем и внутреннем ядре потока зависят только от функции тока

$$(4.18) \quad u_{i0}^{(e)} = u_{i0}^{(e)}(\psi^{(i)}), \quad i = 1, 2.$$

Асимптотическое решение задачи (4.1) — (4.3) будем строить последовательно, начиная с ядра внешнего потока $e_1 \rightarrow d_1 \rightarrow d_2 \rightarrow e_2 \rightleftharpoons W_2^{(1)}$.

С учетом (4.18) из граничных условий на бесконечности (4.6), (4.7) и уравнения (4.17) следует, что первые члены разложения в ядре потока вне капли имеют вид

$$(4.19) \quad u_{10}^{(e)} = 1, \quad u_{11}^{(e)} = 0.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что старший член разложения внешнего диффузионного пограничного слоя, являющийся решением уравнения (4.11) при $i = 1$ и удовлетворяющий условию срачивания с решением в ядре потока (4.17), (4.19), имеет вид

$$(4.20) \quad u_{10}^{(d)} = 1.$$

Учитывая равенство $u_{10}^{(e)} = 1$ (которое является следствием (4.20)), аналогичным образом можно убедиться, что главный член разложения внутреннего диффузионного погранслоя, который является решением уравнения (4.11) при $i = 2$ и удовлетворяет граничным условиям на поверхности капли (4.14), определяется выражением

$$(4.21) \quad u_{20}^{(d)} = f(1).$$

Распределение концентрации в конвективно-погранслоистой области диффузионного следа внутри капли $W_2^{(1)}$ определяется решением уравнения (4.16) с граничным условием $|z| \rightarrow 1$, $u_{20}^{(1)} = f(1)$ (которое является следствием условия срачивания решений $u_{20}^{(d)}$ и $u_{20}^{(1)}$ (4.17)) и имеет вид

$$(4.22) \quad u_{20}^{(1)} = f(1).$$

Условие срачивания решений в областях d_2 , $W_2^{(1)}$ и e_2 (4.17) в силу (4.21), (4.22) в явном виде задает граничное условие для уравнения в ядре потока внутри капли

$$(4.23) \quad \psi^{(2)} = 0, \quad u_{20}^{(e)} = f(1).$$

Уравнения (4.8), общее решение которого имеет вид (4.18), и граничного условия (4.23) оказывается недостаточно для определения поля концентрации в ядре потока. Для получения необходимой дополнительной

информации о функции $u_{20}^{(e)}$ воспользуемся уравнением для следующего члена разложения (4.9). Для удобства анализа введем новую ортогональную систему координат ξ, η, φ , связанную с линиями тока (фиксированные кривые $\eta = \text{const}$ ортогональны линиям тока $\psi^{(2)} = \text{const}$), которая использовалась в [15]:

$$\begin{aligned} \xi &= 16\psi^{(2)} \equiv 4r^2(1-r^2)\sin^2\theta, & \eta &= \frac{r^4 \cos^4\theta}{2r^2-1}, \\ g_{\xi\xi} &= \frac{1}{64r^3 \sin^2\theta \Xi}, & g_{\eta\eta} &= \frac{(2r^2-1)^4}{16r^6 \cos^4\theta \Xi}, & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2\theta, \\ \Xi &= \Xi(r, \theta) = (1-r^2)^2 \cos^2\theta + (2r^2-1)^2 \sin^2\theta, & g &= g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} g_{\varphi\varphi} \\ & & & (0 \leq \xi \leq 1, -\infty < \eta < +\infty). \end{aligned}$$

Уравнение (4.9) в системе координат ξ, η, φ принимает вид

$$(4.24) \quad \frac{\partial u_{21}^{(e)}}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{g} \frac{\partial u_{20}^{(e)}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{g} \frac{\partial u_{20}^{(e)}}{\partial \eta} \right) \right] - q \sqrt{g} u_{20}^{(e)}.$$

Используемая далее процедура аналогична последовательному исключению вековых (растущих) членов при применении метода растянутых координат и метода многих масштабов [12, 13]. Ввиду непрерывности решения исходной задачи (1.1) — (1.3) вдоль фиксированной линии тока $\xi = \text{const}$ должно выполняться равенство

$$(4.25) \quad c_2(\xi, \eta = -\infty) = c_2(\xi, \eta = +\infty),$$

которое означает, что разные точки $(\xi, -\infty)$ и $(\xi, +\infty)$ в новой системе координат ξ, η соответствуют одной и той же точке $(1/\sqrt{2}, \theta)$ в старой сферической системе координат r, θ . Интегрирование уравнения (4.24) по φ ($-\infty < \varphi < +\infty$) с учетом равенства (4.25) (следствием которого являются аналогичные соотношения для всех членов разложения образа решения в ядре потока) приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(4.26) \quad \frac{d}{d\xi} \left[\Gamma(\xi) \frac{du_{20}^{(e)}}{d\xi} \right] - qJ(\xi) u_{20}^{(e)} = 0, \quad \xi = 0, \quad u_{20}^{(e)} = f(1),$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi) &= \frac{2}{3} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}} \left[(4 - 3\xi) E \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}{1 + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}} \right) - (4\sqrt{\xi} - 3\xi) \times \right. \\ &\quad \left. \times K \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}{1 + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}} \right) \right], \quad J(\xi) = \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}} K \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}{1 + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}}} \right). \end{aligned}$$

Здесь E и K — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Коэффициенты уравнения (4.26) имеют следующие особенности: $\xi \rightarrow 0$, $J(\xi) = O(\ln \xi)$; $\xi \rightarrow 1$, $\Gamma(\xi) = O(1 - \xi)$. Локальный анализ уравнения (4.26) показывает, что первая производная $u_{20}^{(e)}$ в нуле конечна, а вторая бесконечна и имеет логарифмическую особенность; вторая особенность в точке вырождения $\xi = 1$ определяет два линейно-независимых решения, одно из которых не ограничено при $\xi \rightarrow 1$. Последнее означает, что, помимо граничного условия (4.23), для уравнения (2.26) следует выставить еще условие ограниченности решения при $\xi = 1$.

Разложение решения задачи (4.26) при $\psi^{(2)} \rightarrow 0$ имеет вид $u_{20}^{(e)} = f(1) + A\psi^{(2)} + o(\psi^{(2)})$ (где $A = A(q)$ — образ средней концентрации в ядре потока). Поэтому с учетом (4.20) и второго равенства (4.19) граничные условия на поверхности капли (4.14) ($j = 1$) и на бесконечности (соответствующие асимптотическому сращиванию в областях e_1, d_1 и e_2, d_2)

для вторых членов разложений в областях внутреннего и внешнего диффузионных пограничных слоев имеют вид

$$(4.27) \quad Y = 0, \quad u_{21}^{(d)} = \gamma u_{11}^{(d)}, \quad \kappa \frac{\partial u_{11}^{(d)}}{\partial Y} - \frac{\partial u_{21}^{(d)}}{\partial Y} \left(\gamma = \frac{\partial f}{\partial c_1} \Big|_{c_1=1} \right),$$

$$Y \rightarrow -\infty, \quad u_{11}^{(d)} \rightarrow 0; \quad Y \rightarrow +\infty, \quad u_{21}^{(d)} \rightarrow \frac{1}{2} AY (1 - \mu^2).$$

Уравнения (4.12), (4.13), правые части которых в силу (4.20), (4.21) обращаются в нуль, с граничными условиями (4.27) определяют вторые члены разложения во внешнем и внутреннем пограничных слоях капли.

Следует отметить, что старший член разложения в ядре потока, который определяется путем решения задачи (4.26), в силу равенств (4.21), (4.22) равномерно-пригоден (по большому числу Пекле) во всей области течения внутри капли. В силу этого обстоятельства далее вместо $c_{20}^{(e)}$ будем писать просто c_2 .

Обратный переход от изображений к оригиналу приводит к следующему нестационарному уравнению для распределения концентрации внутри капли (t' — размерное время):

$$(4.28) \quad J(\xi) \frac{\partial c_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Gamma(\xi) \frac{\partial c_2}{\partial \xi}, \quad \tau = \text{Pe}^{-1} t \equiv a^{-2} D_2 t',$$

$$\tau = 0, \quad c_2 = 0; \quad \xi = 0, \quad c_2 = f(1); \quad \xi = 1, \quad c_2 < \infty.$$

Уравнение (4.28) при $f(1) = 1$ в точности совпадает с уравнением для чисто внутренней задачи, рассмотренной в [15]. Поэтому для средней концентрации, соответствующей решению (4.28), имеем

$$(4.29) \quad \langle c_2 \rangle = f(1) \left[1 - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp(-\lambda_k \tau) \right],$$

$$\alpha_1 = 0,4554, \quad \alpha_2 = 0,0654, \quad \alpha_3 = 0,0542, \quad \alpha_4 = 0,0412, \quad \alpha_5 = 0,0038,$$

$$\lambda_1 = 26,844, \quad \lambda_2 = 137,91, \quad \lambda_3 = 315,66, \quad \lambda_4 = 724,98, \quad \lambda_5 = 1205,2.$$

Здесь коэффициенты α_n и λ_n приведены по данным [8]; при $n = 1, 2$ близкие к выписанным значения этих коэффициентов были вычислены в [15].

5. Обсуждение результатов. Некоторые обобщения. Отметим следующие важные обстоятельства:

1) решение (2.4) — (2.6), которое в линейном случае $f(c_1) = \alpha c_1$ было получено в [3, 4, 6], справедливо лишь на начальном интервале времени $0 \leq t < O(\ln \text{Pe})$ (который определяет также область применимости результатов [7]);

2) уравнение (4.28), соответствующее нестационарному массообмену капли и сплошной среды при соизмеримых фазовых сопротивлениях (1.1) — (1.3), справедливо лишь на заключительном этапе развития процесса при $t \geq O(\text{Pe})$ и по форме (при $f(1) = 1$) совпадает с уравнением Кронига и Бринка [15], полученным для чисто внутренней задачи;

3) уравнение (4.28) равномерно-пригодно (по большому числу Пекле) во всей области внутри капли вплоть до ее границы (включая также область диффузионного следа).

Справедливость уравнения (4.28) при $t \geq O(\text{Pe})$ физически означает, что при достаточно больших временах ($t \geq O(\text{Pe})$) вне капли фактически уже установился стационарный режим, соответствующий однородному распределению концентрации в потоке, а внутри капли протекает существенно нестационарный процесс при поддержании на ее поверхности постоянной концентрации, определяемой условием фазового равновесия (1.1) со стационарным однородным полем концентрации вне капли. Из равенства (4.22), кроме того, следует, что концентрация на оси потока внутри капли при $t \geq O(\text{Pe})$ уже стала равной концентрации на ее по-

верхности (за счет многократной циркуляции растворенного в жидкости вещества по замкнутым линиям тока).

Следует отметить, что, хотя уравнения и граничные условия (1.1) — (1.3) были сформулированы для концентрационной задачи, все полученные результаты легко переносятся на соответствующую тепловую задачу $c_1 \equiv T_1$, $c_2 \equiv T_2$ (T_1 и T_2 — безразмерная температура вне и внутри капли), которая отличается от (1.1) — (1.3) только граничными условиями (1.3), в данном случае имеющими вид

$$r = 1, \quad T_1 = T_2, \quad (\lambda_1/\lambda_2) \partial T_1/\partial r = \partial T_2/\partial r \quad (T_* = T_{10} - T_{20}),$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности жидкости вне и внутри капли. В частности, для распределения средней температуры внутри капли при $t \geq O(\text{Pe})$ остается справедливой формула (4.29) при $\langle c_2 \rangle \equiv \langle T_2 \rangle$ и $f(1) = 1$.

Исследуем теперь поведение решения задачи (1.1) — (1.3) в зависимости от изменения отношения вязкостей капли и окружающей жидкости β . Проведенный анализ соответствовал случаю $\beta = O(1)$, и поэтому конечные результаты не зависели от параметра β . В предельном случае $\beta \gg 1$ течение внутри капли практически отсутствует ($\beta = \infty$ соответствует твердой частице). Можно показать, что при $\text{Re}_\infty = aU_\infty D_1^{-1} \gg 1$ (отметим, что Re_∞ отличается множителем $\kappa(\beta + 1)$ от использованного в (1.1) — (1.3) Re) и $\tau = a^{-2} D_2 t' \geq O(1)$ распределение концентрации (температуры) в потоке вне частицы является однородным (естественно, в главном приближении): $c_1 = 1$, а распределение концентрации внутри частицы определяется обычным нестационарным уравнением теплопроводности (которое соответствует $v_2 = 0$ в уравнении (1.1) при $i = 2$):

$$(5.1) \quad \frac{\partial c_2}{\partial \tau} = \Delta c_2, \quad \tau = 0, \quad c_2 = 0, \quad r = 1, \quad c_2 = f(1).$$

Решение задачи (5.1) приводит к следующему выражению для средней концентрации внутри капли [8]:

$$(5.2) \quad \langle c_2 \rangle = f(1) \left[1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp(-\pi^2 k^2 \tau) \right].$$

Сопоставление формул (4.29) и (5.2) показывает, что порядок характерных времен установления нестационарного процесса массо- и теплообмена для капли умеренной ($\beta = O(1)$) и предельно большой ($\beta \gg 1$) вязкости один и тот же и определяется величиной $\sim a^2 D_2^{-1}$. Однако декременты затухания решения при $\tau \rightarrow \infty$ (существенно) различаются в 2,72 раза. Последнее означает, что наличие циркуляции жидкости внутри капли при $\beta = O(1)$ интенсифицирует процесс конвективного массо- и теплопереноса по сравнению с «твердой» каплей ($\beta = \infty$), где отсутствует перенос вещества за счет циркуляции. Следует отметить также, что даже значительное увеличение скорости внешнего потока U_∞ ($\text{Pe} \rightarrow \infty$) слабо влияет на степень извлечения вещества из капли, которая при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ ограничена сверху и пропорциональна декременту затухания средней концентрации (4.29); поэтому относительное приращение степени извлечения за счет увеличения числа Пекле стремится к нулю при $\text{Pe} \rightarrow \infty$.

Следует отметить, что результаты проведенного асимптотического анализа легко распространяются на общий случай конвективного массо- и теплообмена капли любой формы, обтекаемой произвольным двумерным потоком несжимаемой (идеальной, вязкой и др.) жидкости при соизмеримых фазовых сопротивлениях. В частности, при $\tau = \text{Pe}^{-1} t = a^{-2} D_2 t' \geq O(1)$ распределение концентрации вне капли практически однородно и определяется соответствующим значением на бесконечности, а внутри капли протекает нестационарный процесс, описываемый следующей кра-

$$\Gamma(\psi) = \oint \frac{\partial \psi}{g_{\psi\psi}} \sqrt{g} d\chi, \quad J(\psi) = \oint \sqrt{g} d\chi, \quad g = g_{\psi\psi} g_{\chi\chi} g_{\varphi\varphi}.$$

$\Omega_j,$