

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Влияние одиночного включения на напряженное состояние возле изолированной трещины исследовалось в ряде работ, ссылки на которые имеются в [1].

Согласно фрактографическим исследованиям, неоднородность реальных материалов, являющаяся практически неизбежной, в процессе металлургической и технологической обработки приводит к образованию большого количества дефектов (трещины, включения, поры), с которыми в дальнейшем конструкция находится в эксплуатации и которые являются очагом разрушения. Поэтому представляет значительный интерес исследование взаимного влияния хаотически или определенным образом ориентированных трещин и включений.

Рассматривается плоская задача теории упругости для изотропной плоскости с круговыми отверстиями, заполненными упругими шайбами из инородного материала, спаянными вдоль обвода, и ослабленной прямолинейными щелями. Решение этой задачи позволяет оценить влияние взаимного расположения системы трещин и включений на критерий (коэффициент интенсивности напряжений) начала роста трещины. Эта задача представляет интерес также для теории разрушения композитных материалов.

1. Пусть имеется плоскость с круговыми отверстиями, имеющими радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

Круговые отверстия заполнены шайбами из инородного упругого материала, спаянными вдоль обвода. Изотропная плоскость ослаблена периодической системой прямолинейных разрезов, как показано на фиг. 1. Берега разрезов свободны от внешних усилий. В плоскости имеют место средние напряжения $\sigma_x = \sigma_x^\infty$, $\sigma_y = \sigma_y^\infty$, $\tau_{xy} = 0$ (растяжение на бесконечности).

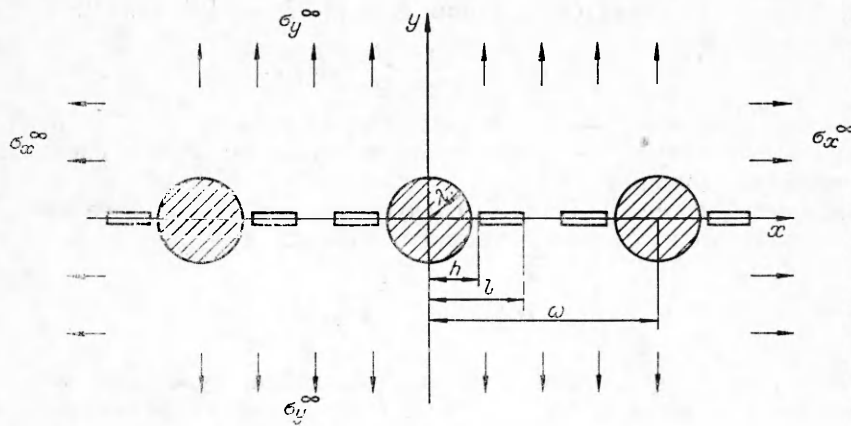
В силу симметрии граничных условий и геометрии области, занятой средой, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω .

Для решения задачи естественным образом объединяется метод, развитый при решении периодической упругой задачи, с методом [2, 3] построения в явной форме потенциалов Колосова—Мухелишвили, соответствующих неизвестным нормальным смещениям вдоль разрезов.

Обозначим через $N - iT$ самоуравновешенную, симметричную относительно координатных осей систему сил, действующую на шайбу со стороны плоскости. Считая, что $N - iT$ на контуре шайбы $|\tau| = \lambda$ разлагается в ряд Фурье, получим

$$(1.1) \quad N - iT = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0.$$

Функции $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$, описывающие напряженно-деформированное состо-



Ф и г. 1

яние включения, аналитичны во внутренней области круга $|\tau| = \lambda$ и могут быть представлены рядами [4]

$$(1.2) \quad \Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k},$$

где

$$a_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_{2k} = \frac{A_{-2k}}{\lambda^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$c_{2k} = -(2k + 1) \frac{A_{-2k-2}}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2}}{\lambda^{2k}} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Потенциалы $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ позволяют найти соотношение

$$(1.3) \quad -2\mu_1 i e^{i\theta} \frac{d}{ds} (u_0 - i v_0) = A_0 \frac{1 - \kappa_1}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_1 A_{-2k} e^{-2ki\theta},$$

где u_0, v_0 — соответствующие смещения точек контура включения; μ_1, κ_1 — коэффициенты, характеризующие материал включения. Для определения неизвестных пока величин A_{2k} ($k = 0, \pm 1, \dots$) рассмотрим решение для плоскости. Комплексные потенциалы $\Phi(z), \Psi(z)$ в плоскости ищем в виде

$$(1.4) \quad \Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z);$$

$$(1.5) \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) \cos \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt;$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_L g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt;$$

$$(1.6) \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} s^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Интегралы в (1.5) берутся по линии $L = \{-l, -h\} + \{h, l\}$,

$$g(x) = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \frac{d}{dx} [h(x)],$$

$h(x) = v(x, +0) - v(x, -0)$ на L (в силу симметрии $h(-x) = h(x)$), $g(x)$ — искомая функция; $\rho(z)$ — периодическая функция; $S(z)$ — специальная мероморфная функция [5].

К соотношениям (1.4)—(1.6) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи:

$$(1.7) \quad \int_{-l}^{-h} g'(t) dt = 0, \quad \int_h^l g(t) dt = 0.$$

Приведем теперь зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты выражений (1.6). Из условий симметрии напряженного состояния в плоскости относительно координатных осей с учетом формул Колосова — Мусхелишвили следует

$$\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}, \quad \Phi(-z) = \Phi(z), \quad \Psi(\bar{z}) = \overline{\Psi(z)}, \quad \Psi(-z) = \Psi(z).$$

Отсюда находим

$$(1.8) \quad \operatorname{Im} \alpha_{2k} = \operatorname{Im} \beta_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Можно убедиться, что соотношения (1.4)—(1.6) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , следует

$$(1.9) \quad \alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

Неизвестная функция $g(x)$ и постоянные α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевых условий

$$(1.10) \quad \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta};$$

$$(1.11) \quad \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + i\Phi'(t) + \overline{\Psi(t)} = 0,$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; t — аффикс точек берегов разрывов.

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} функций $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ представим граничное условие (1.10) в виде

$$(1.12) \quad \Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\tau\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}$$

где

$$(1.13) \quad f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + i[\tau\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}$$

Относительно функции $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ будем считать, что она разлагается на $|\tau| = \lambda$ в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$(1.14) \quad f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ki\theta}. \quad \operatorname{Im} B_{2k} = 0,$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ki\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив сюда выражение (1.13) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью вычетов найдем

$$(1.15) \quad B_{2k} = -\frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt.$$

Функции $f_{2k}(t)$ определяются при $\varepsilon = 1$ соотношениями

$$(1.16) \quad \begin{aligned} f_0(t) &= (1 + \varepsilon) \gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t), \\ f_{2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k} (2k-1)!}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots), \\ f_{-2k}(t) &= \frac{\varepsilon \lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \gamma(t) &= \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t. \end{aligned}$$

Подставив в левую часть краевого условия (1.12) вместо $\Phi_2(\tau), \overline{\Phi_2(\tau)}, \Phi_2'(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$ их разложения [5] в ряды Лорана в окрестности $z=0$, а в правую часть (1.12) вместо $f_1 + if_2$ ряд Фурье (1.14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$, получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k}, β_{2k} . После некоторых преобразований приходим [6] к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k}

$$(1.17) \quad \alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

причем в (1.17) $\varepsilon = 1$.

Коэффициенты $a_{j,k}, b_j$ ввиду их громоздкости не приводятся. Учитывая (1.3), запишем условия равенства производных по дуге от смещений в плоскости и шайбе на контуре $|\tau| = \lambda$

$$(1.18) \quad \begin{aligned} & -\kappa \overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\tau \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = f(\theta), \\ f(\theta) &= \frac{\mu}{\mu_1} \left[A_0 \frac{1-\kappa_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} - \kappa_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k} e^{-2ki\theta} \right]. \end{aligned}$$

Представим граничное условие (1.18) в виде

$$(1.19) \quad -\kappa \overline{\Phi_2(\tau)} + \Phi_2(\tau) - [\tau \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) + f(\theta);$$

$$(1.20) \quad f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) = \kappa \overline{\Phi_1(\tau)} - \Phi_1(\tau) + [\tau \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}.$$

Поступая с функцией (1.20) и с граничным условием (1.19) таким же образом, как это было сделано соответственно с (1.13) и (1.12), получим для определения коэффициентов α_{2k+2} систему (1.17) при $\varepsilon = -\kappa$, в правой части этой системы

$$A'_0 = A_0^* = (\kappa - 1) \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{2} - A_0 \frac{(\kappa_1 - 1)\mu}{2\mu_1} + B'_0,$$

$$A'_2 = A_2^* = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + \frac{\mu}{\mu_1} A_2 + B'_2,$$

$$A'_{2k} = A_{2k}^* = \frac{\mu}{\mu_1} A_{2k} + B'_{2k}, \quad A'_{-2k} = A_{-2k}^* = -\frac{\mu}{\mu_1} A_{-2k} + B'_{-2k}.$$

Величины B'_{2k} определяются формулой (1.15), а функции $f_{2k}(t)$ в этой формуле находятся по соотношениям (1.16) при $\varepsilon = -\kappa$.

Используя прием [7], получим для определения постоянных A_{2k} бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$(1.21) \quad A_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{j,k} A_{2k+2} + T_j \quad (j = 0, 1, \dots),$$

а также соотношения, позволяющие найти коэффициенты α_{2k} , A_{-2k} , A_0 через величины A_{2k} . Наконец, с помощью перечисленных коэффициентов находятся коэффициенты β_{2k} через величины A_{2k} . В системе (1.21) величины $d_{j,k}$ и T_j в виду громоздкости не приводятся. Требуя, чтобы функции (1.4) удовлетворяли краевому условию на берегу разреза L , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$

$$(1.22) \quad \frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = 0,$$

$$H(x) = 2\Phi_2(x) + x\Phi_2'(x) + \Psi_2(x).$$

Соотношения, связывающие α_{2k} и β_{2k} через A_{2k} , и система (1.21) совместно с сингулярным уравнением (1.22) являются основными уравнениями задачи, позволяющими определить функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k+2} , β_{2k+2} .

Напомним, что функция $H(x)$, а также системы (1.17) и (1.21) содержат коэффициенты B_{2k} и B'_{2k} , зависящие от искомой функции $g(t)$. Система (1.21) и уравнение (1.22) оказались связанными и должны решаться совместно.

Зная функции $g(x)$, $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$, можно найти напряженно-деформированное состояние пластины. Меняя отношение жесткости включения к жесткости плоскости, можно получить все варианты, начиная со свободного от сил кругового отверстия и кончая абсолютно жестким включением.

Для коэффициента интенсивности напряжений [8] K_I у вершин трещины будем иметь формулу

$$K_I = \pm \lim_{x \rightarrow c} [\sqrt{2\pi|x-c|} g(x)],$$

верхний знак берется при $c = h$, нижний — при $c = l$.

При $h = l$ поведение нормальных напряжений зависит от вида граничных условий, задаваемых вдоль обвода круговых отверстий. Здесь следует различать два основных случая.

1. Отверстие заполнено упругим ядром, т. е. трещина выходит на границу включения. В этом случае особенность в кончике ($x = h$) зависит [8, 9] от коэффициента Пуассона ν_1 и модуля сдвига μ_1 материала включения.

2. Отверстие ничем не заполнено. В рассматриваемом случае трещина одним концом $x = h$ выходит на поверхность отверстия, свободного от внешних усилий. В этом случае напряжения в кончике $x = h$ ограничены и имеют особенность на другом конце.

Если воспользоваться разложением функции $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z$, учитывая $g(x) = -g(-x)$ и применяя замену переменных, то уравнению (1.22) можно придать стандартную форму

$$(1.23) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_*(\eta) = 0,$$

где

$$p(\tau) = g(t); \quad H_*(\eta) = H(x); \quad B(\eta, \tau) = -d \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j;$$

$$d = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^2); \quad u = d(\tau + 1) + \lambda_1^2; \quad u_0 = d(\eta + 1) + \lambda_1^2; \quad \lambda_1 = \frac{h}{l};$$

$$A_j = \left[(2j + 1) + \frac{(2j + 1)(2j)(2j - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right].$$

Для решения уравнения (1.23) применяется способ, развитый в [10]. Решение представим в виде $p(\eta) = p_0(\eta)/\sqrt{1 - \eta^2}$.

Функция $p_0(\eta)$ заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам. Использование квадратурных формул

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} = \frac{1}{n \sin \theta} \sum_{\nu=1}^n p_{\nu}^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\theta_{\nu} \sin m\theta,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B_{\nu}^0(\eta, \tau) d\tau = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n p_{\nu}^0 B(\eta, \tau_{\nu}), \quad p_{\nu}^0 = p_0^r(\eta_{\nu}), \quad \eta_m = \cos \theta_m,$$

$$B_{2k} = -\frac{d}{2n} \sum_{\nu=1}^n p_{\nu}^0 f_{2k}^*(\tau_{\nu}), \quad \tau_{\nu} = \eta_{\nu}, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\sqrt{d(1+\tau) + \lambda_1^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{p_{\nu}^0}{\sqrt{d(1+\tau_{\nu}) + \lambda_1^2}}$$

позволяет заменить основные уравнения бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений p_{ν}^0 искомой функции в узловых точках, а также коэффициентов A_{2k} . При этом с помощью соотношений, связывающих α_{2k} и β_{2k} через A_{2k} , из выражения $H_*(\eta)$ исключаются постоянные α_{2k} , β_{2k} .

После нахождения значений p_{ν}^0 коэффициент интенсивности напряжений K_I определится следующими соотношениями:

$$K_{I_s}^h = \sqrt{\frac{\pi l (1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1}} \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+n} p_{\nu}^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_{\nu}}{2},$$

$$K_{I_s}^l = \sqrt{\pi l (1 - \lambda_1^2)} \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu} p_{\nu}^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_{\nu}}{2}.$$

Во втором случае, когда трещина выходит на поверхность свободного отверстия, решение уравнения (1.23) ищем в виде

$$p(\eta) = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} p_0(\eta).$$

Величины B_{2k} даются на этот раз формулами

$$B_{2k} = -\frac{d}{2n} \sum_{v=1}^n P_v^0 (1 + \tau_v) f_{2k}^*(\tau_v),$$

а коэффициент интенсивности напряжений определяется соотношением

$$K_I^l = \sqrt{\pi l (1 - \lambda_1^2)} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (-1)^v P_v^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_v}{2}.$$

Для численной реализации изложенного способа выполнены расчеты. Исследовалось растяжение пластины постоянными усилиями σ_y^{∞} ($\sigma_x^{\infty} = 0$) в направлении, перпендикулярном линии разрезом. Полагалось $n = 20$ и 30, что отвечает разбиению интервала на 20 и 30 чебышевских узлов соответственно. Система (1.21) урезалась до пяти уравнений. Указанные системы решались методом Гаусса. Решения совпадают с точностью до шестого знака.

В первом случае для коэффициента интенсивности напряжений имеем

$$K_I^h = \sigma_y^{\infty} \sqrt{\pi l} \sqrt{\frac{(1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1}} F_1(\lambda, h, l),$$

$$\kappa_I^l = \sigma_y^{\infty} \sqrt{\pi l} \sqrt{1 - \lambda_1^2} F_2(\lambda, h, l).$$

В табл. 1 приводятся результаты расчетов функций $F_1(\lambda, h, l)$ и $F_2(\lambda, h, l)$ при изменении расстояния h для двух предельных случаев: абсолютно жесткое включение (значения даны в числителе) и абсолютно гибкое включение (отверстия ничем не заполнены). В расчетах длина трещин принималась постоянной $l - h = 0,3$. Для любого упругого включения картина напряженного состояния будет занимать промежуточное положение между этими двумя предельными случаями. Исследование показало, что учет взаимодействия системы трещин и включений значительно увеличивает коэффициент интенсивности напряжений по сравнению с одиночным включением и изолированной трещиной.

Таблица 1

λ		h							
		0,21	0,25	0,29	0,33	0,37	0,41	0,45	0,49
0,2	$F_1(\lambda, h, l)$	0,243	0,519	0,650	0,717	0,762	0,798	0,825	0,849
		3,169	1,528	1,249	1,153	1,101	1,069	1,051	1,042
	$F_2(\lambda, h, l)$	0,963	1,045	1,074	1,089	1,097	1,104	1,112	1,123
		1,723	1,542	1,454	1,391	1,346	1,315	1,295	1,285
λ		h							
		0,31	0,35	0,39	0,43	0,47	0,51	0,55	0,59
0,3	$F_1(\lambda, h, l)$	0,219	0,501	0,616	0,659	0,713	0,758	0,797	0,834
		6,948	2,553	1,618	1,421	1,329	1,274	1,241	1,225
	$F_2(\lambda, h, l)$	0,894	0,921	0,962	0,997	1,024	1,049	1,078	1,117
		2,007	1,724	1,609	1,544	1,497	1,469	1,459	1,473

Таблица 2

$l \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,15	2,828				
0,20	2,420				
0,25	2,274	3,351			
0,30	2,218	2,863			
0,35	2,203	2,622	3,666		
0,40	2,213	2,500	3,199		
0,45	2,244	2,445	2,929	3,929	
0,50	2,286	2,432	2,789	3,486	
0,55	2,346	2,452	2,717	3,237	4,233
0,60	2,427	2,501	2,699	3,095	3,803
0,65	2,531	2,581	2,728	3,032	3,586
0,70	2,667	2,696	2,804	3,039	3,479
0,75	2,849	2,860	2,935	3,116	3,469
0,80	3,099	3,094	3,140	3,276	3,563
0,85	3,459	3,344	3,457	3,555	3,789
0,90	4,011	3,969	3,963	4,027	4,221

Во втором случае, когда трещина одним концом $x = h$ выходит на поверхность отверстия, свободного от внешних усилий, для коэффициента интенсивности напряжений имеем

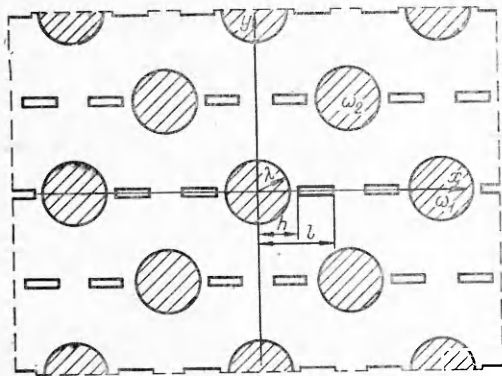
$$K_I^l = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi l} \sqrt{1 - \lambda_1^2} F_3(\lambda, l).$$

В табл. 2 даны результаты расчетов для функции $F_3(\lambda, l)$. Взаимодействие системы трещин и отверстий в отличие от случая двух трещин, исходящих из одиночного отверстия, приводит к возрастанию коэффициента интенсивности при увеличении длины трещины.

2. Пусть имеется двоякопериодическая решетка с круговыми отверстиями, имеющими радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2le^{i\alpha}, \quad l > 0, \quad \text{Im}\omega_2 > 0.$$



Фиг. 2

Круговые отверстия решетки заполнены шайбами из инородного упругого материала, спаянными вдоль обвода. Решетка ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных щелей, как показано на фиг. 2. Берега разрезов свободны от внешних усилий. В решетке имеют место средние напряжения $\sigma_x = \sigma_x^\infty$, $\sigma_y = \sigma_y^\infty$, $\tau_{xy} = 0$ (растяжение на бесконечности).

В силу симметрии граничных условий и геометрии обла-

сти D , занятой средой, напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2 .

Для решения задачи естественным образом объединяется метод [7], развитый при решении двоякопериодической упругой задачи с методом [2, 3, 11] построения в явной форме потенциалов Колосова—Мухелишвили, соответствующих неизвестным нормальным смещениям вдоль разрезов.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в решетке ищем в виде (1.4), где

$$(2.1) \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) \zeta(t-z) dt + A,$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) [\zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B;$$

$$(2.2) \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{2h+2} \frac{\lambda^{2h+2} \gamma^{(2h)}(z)}{(2h+1)!},$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{2h+2} \frac{\lambda^{2h+2} \gamma^{(2h)}(z)}{(2h+1)!} - \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{2h+2} \frac{\lambda^{2h+2} Q^{(2h+1)}(z)}{(2h+1)!}.$$

Здесь $\gamma(z)$ и $\zeta(z)$ — функции Вейерштрасса; $Q(z)$ — специальная мероморфная функция [7]; A и B — константы. В рассматриваемом случае сохраняют силу соотношения (1.1)—(1.3), (1.7), (1.8).

Условие постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , с учетом (1.7) и свойств функций $\gamma(z)$, $\zeta(z)$ и $Q(z)$ в конгруэнтных точках приводит к соотношениям

$$(2.3) (A + \bar{A})\omega_k + \bar{B}\bar{\omega}_k = \delta_k a + \bar{\gamma}_k a + \bar{\delta}_k(a + \bar{a}) + \alpha_2 \lambda^2 (\delta_k + \bar{\gamma}_k) + \beta_2 \lambda^2 \bar{\delta}_k$$

$$(k = 1, 2),$$

$$a = -\frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{tg}(t) dt.$$

Обозначения постоянных двоякопериодической решетки соответствуют употребляемым в [7]. Из системы (2.3) определяются постоянные A и B , причем A и B вещественны.

Можно убедиться, что функции (1.4), (2.1), (2.2) при условии (1.8) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений. Неизвестная $g(x)$ и постоянные α_{2k} и β_{2k} должны быть определены из краевых условий (1.10), (1.11), где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для получения основных уравнений задачи следует повторить рассуждения п. 1.

В данном случае

$$B_0 = -2A + B_0^*, \quad B_2 = B + B_2^*, \quad B_{2k} = B_{2k}^* \quad (k = -1, \pm 2, \pm \dots),$$

$$B_{2k}^* = -\frac{1}{2\pi} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt, \quad f_0(t) = (1 + \varepsilon) \zeta(t),$$

$$f_2(t) = \frac{\lambda^2}{2} \gamma'(t) + t\gamma(t) - \zeta(t) - Q(t),$$

$$f_{2k}(t) = \frac{(2k-1)! \lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [\gamma^{(2k-3)}(t) -$$

$$- Q^{(2k-2)}(t) + t\gamma^{(2k-2)}(t)] \quad (k = 2, 3, \dots).$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\varepsilon \lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Сингулярное интегральное уравнение имеет вид

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) K(t-x) dt + H(x) = 0 \text{ на } L,$$

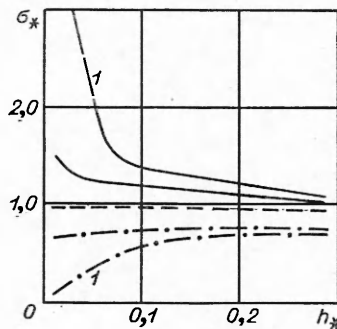
где

$$\begin{aligned} K(x) &= 3\zeta(x) + Q(x) - x\gamma(x); \\ H(x) &= 2A + B + 2\Phi_2(x) + x\Phi_2(x) + \Psi_2(x); \\ 2A + B &= \frac{1}{\omega_1} [(a + \alpha_2 \lambda^2)(\delta_1 + \gamma_1) + (2a + \beta_2 \lambda^2)\delta_1], \end{aligned}$$

а система относительно A_{2k} формально остается прежней (1.21). Используя разложения $\gamma(z)$, $\zeta(z)$ и $Q(z)$ в основном параллелограмме периодов [7], а также учитывая $g(x) = -g(-x)$ и применяя замену переменных, уравнение (2.4) приводим к виду (1.23).

Для реализации изложенного способа были выполнены расчеты. Исследовалось растяжение правильной треугольной решетки $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{(1/3)i\pi}$ постоянными усилиями σ_y^∞ ($\sigma_x^\infty = 0$) в направлении, перпендикулярном линии разрезов. Определялись значения предельных (разрушающих) усилий в зависимости от геометрических и физических параметров задачи. На основании полученных результатов на фиг. 3 в случае жесткого включения при $\nu = 0,3$ показаны зависимости критической нагрузки $\sigma_* = \sigma_y^\infty \sqrt{\omega_1/2}/K_{Ic}$ от расстояния $h_* = h - \lambda$ для обоих концов трещины (кривая 1 соответствует левому концу) при $\lambda = 0,3$. Штриховой линией для сравнения показана зависимость σ_* при отсутствии включений (материал включения и решетки одинаков) при той же геометрии трещин, вычисленная по описанной методике; штрихпунктирной — зависимость в случае абсолютно гибкого включения (отверстия ничем не заполнены). Для любого упругого включения картина напряженного состояния будет занимать промежуточное положение между этими двумя предельными случаями. Исследование показало, что взаимное влияние системы трещин и включений значительно увеличивает коэффициент интенсивности напряжений по сравнению с одиночным включением и изолированной трещиной. В случае трещин, выходящих одним концом на свободную поверхность кругового отверстия ($h = \lambda$) при некоторых значениях λ наблюдается устойчивое развитие системы трещин (их взаимное упрочнение). Любопытно отметить, что для дwoякопериодической системы трещин с той же геометрией, но без круговых отверстий ($\lambda = 0$) возможность стабилизации развития трещин отсутствует.

Автор выражает благодарность Ю. Н. Работнову за полезное обсуждение полученных результатов.



Ф и г. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Жоржолиани Г. Т., Каландия А. И. Влияние жесткого включения на интенсивность напряжений около концов разреза.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
 2. Bueckner H. F. Some stress singularities and their computation by means of integral equations.— In: Boundary problems in differential equations. Madison Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 215.
 3. Дачишви А. П., Саврук М. П. Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
 4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
 5. Мирсалимов В. М. Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослабленной периодической системой круглых отверстий.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
 6. Шерман Д. И. Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой формы. Ч. 1. Т. 31. Инж. сб., 1961.
 7. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
 8. Черепанов Г. И. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
 9. Zak A. R., Williams M. L. Crack point stress singularities at bi-material interface.— «Trans. ASME», ser. E, «J. Appl. Mech.», 1963, vol. 30, N 1, p. 142.
 10. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 4.
 11. Фильштинский Л. А. Взаимодействие двойкопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
-