УДК 539.3

О ДАВЛЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА УПРУГУЮ ПЛАСТИНКУ

И. И. Аргатов

Государственная морская академия им. С. О. Макарова, 199106 Санкт-Петербург

Изучена задача о давлении на упругую пластинку штампа в форме эллиптического параболоида в предположении малости площадки контакта. Воздействие штампа на пластинку моделируется действием сосредоточенных силы и моментов. Методом сращиваемых асимптотических разложений сформулирована задача одностороннего контакта для внутреннего асимптотического представления; ее решение получено на основе результатов Л. А. Галина. Определены координаты центра эллиптического пятна контакта, его размеры и угол поворота. Вычислены моменты, обеспечивающие поступательное вдавливание штампа, и выведено уравнение, связывающее перемещение штампа с действующей на него силой.

1. Постановка задачи. Пусть на упругую пластинку Ω с изгибной жесткостью D, закрепленную по краю $\partial\Omega$, давит штамп в форме эллиптического параболоида

$$\Phi(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x}) = (2R_1)^{-1}(x_1 - x_1^0)^2 + (2R_2)^{-1}(x_2 - x_2^0)^2. \tag{1.1}$$

Здесь R_1 и R_2 — радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности штампа в его вершине $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega$. Через δ_0 обозначим поступательное перемещение штампа.

Функция прогиба пластинки является решением задачи (см., например, [1])

$$u(\boldsymbol{x}) > \delta_0 - \Phi(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x}) \quad\Longrightarrow\quad D\Delta_x\Delta_x u(\boldsymbol{x}) = 0; \tag{1.2}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \delta_0 - \Phi(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x}) \quad\Longrightarrow\quad D\Delta_x\Delta_x u(\boldsymbol{x}) \geqslant 0; \tag{1.3}$$

$$u(\boldsymbol{x}) \geqslant \delta_0 - \Phi(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega; \tag{1.4}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \partial_n u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{1.5}$$

Область контакта Σ (где выполняется равенство (1.3)) априори неизвестна. В соответствии с принятой формой штампа (1.1) давление $p(x_1, x_2) = -D\Delta_x\Delta_x\Phi(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x})$, передаваемое штампом на пластинку, сосредоточено на контуре $\partial\Sigma$ площадки контакта.

Исследуем задачу (1.2)–(1.5) в предположении малости площадки Σ. Ясно, что ее размерами "управляют" величины δ_0 и R_1, R_2. Обозначим через ε малый положительный параметр и положим

$$R_1 = \varepsilon R_1^*, \qquad R_2 = \varepsilon R_2^*, \qquad \delta_0 = \varepsilon\delta_0^*, \tag{1.6}$$

где величины δ_0^* и R_1^*, R_2^* сравнимы с расстоянием d_0 от точки $\boldsymbol{x}^0$ до границы $\partial\Omega$.

Рассматриваемая задача с односторонними связями и родственные ей изучались в рамках теории вариационных неравенств (см., например, [1, 2]). Алгоритмы численного решения предложены в [3, 4] и др. Асимптотические методы исследования вариационных неравенств развивались в [5] и др. Задачи оптимального управления решались в [6] и др. В работе [7] получено приближенное решение задачи о давлении штампа (1.1) на круговую пластинку в предположении, что на достаточном удалении от площадки контакта прогиб пластинки определяется решением задачи о действии сосредоточенной силы на центр пластинки. Осесимметричная задача изучена в [8, 9]. Контактная задача для свободно опертой пластинки с полигональным контуром рассматривалась в [10].

Если вершина штампа не совпадает с центром пластинки, то для обеспечения поступательного перемещения к нему следует приложить некоторые моменты. Приближенное их вычисление, а также распространение результатов [7] на общий случай являются целью данной работы. Решение задачи (1.1)–(1.5) строится методом сращиваемых асимптотических разложений [11]. Способом, изложенным в [12], формулируется задача одностороннего контакта для пограничного слоя, решение которой выписывается по формулам [7]. В [13] методом сращиваемых асимптотических разложений изучена задача вибрации упругой пластинки с малым жестким включением, движение которого полагалось заданным.

2. Внешнее и внутреннее асимптотические представления. Обозначим через $\Gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x})$ решение задачи изгиба пластинки Ω, нагруженной в точке $\boldsymbol{x}^0$ сосредоточенной силой:

$$\Gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi D}\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|^2 \ln\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|}{r_0} + \gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}). \tag{2.1}$$

Здесь r_0 — постоянная, имеющая размерность длины;

$$\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = \gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) - \gamma_2(\boldsymbol{x}^0)(x_1-x_1^0) + \gamma_1(\boldsymbol{x}^0)(x_2-x_2^0) + \\ + \sum_{i,j=1}^{2}\gamma_{ij}(\boldsymbol{x}^0)(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0) + O(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|^3), \quad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Если $G(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x})$ — гармоническая функция Грина для задачи Дирихле, то $G(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = -(2\pi)^{-1}\ln(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|/r_0) + o(1)$ при $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0$. В случае односвязной области Ω величина r_0 является внутренним конформным радиусом области Ω относительно точки $\boldsymbol{x}^0$ (см., например, [14]). Можно показать (см. [14], задача 122), что $r_0 \geqslant d_0$. Бигармоническая функция Грина (2.1) представима в виде $\Gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = -(4D)^{-1}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|^2 G(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) + \tilde\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x})$, где $\tilde\gamma$ — регулярная функция. Заметим, что величина $4\sqrt{\pi D\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0)}$ интерпретируется как внутренний бигармонический радиус.

Введем также решения задачи о действии на пластинку Ω в точке $\boldsymbol{x}^0$ сосредоточенных моментов

$$\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi D}\,(x_2-x_2^0)\ln\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|}{r_0} + \gamma^{(1)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}); \tag{2.3}$$

$$\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi D}\,(x_1-x_1^0)\ln\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|}{r_0} + \gamma^{(2)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}). \tag{2.4}$$

Для регулярных частей функций (2.3), (2.4) справедлива формула

$$\gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) = \gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + O(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|), \quad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0 \qquad (i=1,2). \tag{2.5}$$

На удалении от зоны контакта действие штампа на упругую пластинку моделируем сосредоточенными в точке $\boldsymbol{x}^0$ реакциями:

$$v(\boldsymbol{x}) = P\Gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{2} M_i\Gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}). \tag{2.6}$$

В первом приближении $P\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) = \delta_0$, поэтому согласно (1.6) следует положить

$$P = \varepsilon P^*. \tag{2.7}$$

В окрестности площадки контакта $\Sigma(\varepsilon)$ перейдем к “растянутым” координатам

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2), \qquad \xi_i = \varepsilon^{-1}(x_i - x_i^0). \tag{2.8}$$

Тогда внутреннее асимптотическое представление $w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi})$ решения исходной задачи согласно (1.2)–(1.4) и (2.8) удовлетворяет соотношениям

$$w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) > \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi})) \implies \Delta_\xi\Delta_\xi w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = 0; \tag{2.9}$$

$$w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi})) \implies \Delta_\xi\Delta_\xi w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0; \tag{2.10}$$

$$w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) \geqslant \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^2; \qquad \Phi^*(\boldsymbol{\xi}) = (2R_1^*)^{-1}\xi_1^2 + (2R_2^*)^{-1}\xi_2^2. \tag{2.11}$$

При учете изменившегося масштаба расстояние от вершины штампа до края пластинки становится равным $\varepsilon^{-1}d_0$, и, следовательно, для малых ε формулы (2.9), (2.10) справедливы на всей плоскости. Асимптотические условия для $w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi}\to\infty$ заменяют отброшенные краевые условия (1.5).

На основании (2.1)–(2.5), (2.7), (2.8) для функции (2.6) имеем разложение

$$v(\boldsymbol{x}^0+\varepsilon\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon P^*\Bigl\{(8\pi D)^{-1}\varepsilon^2|\boldsymbol{\xi}|^2\ln\frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|}{r_0} + \gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + \varepsilon[-\gamma_2(\boldsymbol{x}^0)\xi_1 + \gamma_1(\boldsymbol{x}^0)\xi_2] +$$
$$+\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\gamma_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\xi_i\xi_j\Bigr\} + \sum_{i=1}^{2}M_i\gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + \varepsilon(4\pi D)^{-1}(M_2\xi_1 - M_1\xi_2)\ln\frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|}{r_0} + \ldots. \tag{2.12}$$

Здесь многоточием обозначены несущественные (для дальнейших построений) члены. Заметим, что порядок при $\varepsilon\to 0$ моментов M_i априори установить не удается. Положим

$$M_i = \varepsilon^2 M_i^* \qquad (i=1,\,2). \tag{2.13}$$

В дальнейшем будет показано, что $M_i = O(\varepsilon^3)$, поэтому при выводе формулы (2.12) отбрасывались члены порядка $O(\varepsilon^3|\boldsymbol{\xi}|^3)$ и $O(\varepsilon^3|\boldsymbol{\xi}|\,)$ по сравнению с единицей (см., в частности, выражение в фигурных скобках в (2.12)).

Методом сращиваемых асимптотических разложений соотношение (2.12) позволяет сформулировать условие на бесконечности для пограничного слоя, который будем искать в виде

$$w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon[V^*(\boldsymbol{\xi}) + W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi})]; \tag{2.14}$$

$$V^*(\boldsymbol{\xi}) = P^*\Bigl\{\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + \varepsilon[-\gamma_2(\boldsymbol{x}^0)\xi_1 + \gamma_1(\boldsymbol{x}^0)\xi_2] + \varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\gamma_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\xi_i\xi_j\Bigr\} +$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}M_i^*\gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0). \tag{2.15}$$

Из (2.12) для функции W вытекает следующее представление при $|\boldsymbol{\xi}|\to\infty$:

$$W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon^2\Bigl[\frac{P^*}{8\pi D}\,|\boldsymbol{\xi}|^2\ln\frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|}{r_0} + \frac{1}{4\pi D}\,(M_2^*\xi_1 - M_1^*\xi_2)\ln\frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|}{r_0}\Bigr] + \ldots. \tag{2.16}$$

Соотношения (2.9)–(2.11), (2.14)–(2.16) образуют модельную задачу одностороннего контакта для бесконечной пластинки. Ее решение построим на основе результатов [7].

3. Определение моментов, действующих на штамп. Подставляя (2.14) в (2.9)–(2.11), находим, что функция W помимо условия (2.16) должна удовлетворять соотношениям

$$W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) > \delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi}) - V^*(\boldsymbol{\xi}) \implies \Delta_\xi\Delta_\xi W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = 0; \tag{3.1}$$

$$W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi}) - V^*(\boldsymbol{\xi}) \implies \Delta_\xi\Delta_\xi W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0; \tag{3.2}$$

$$W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) \geqslant \delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi}) - V^*(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

Предположим, что $\gamma_{12}(\boldsymbol{x}^0) = \gamma_{21}(\boldsymbol{x}^0) = 0$. Тогда после выделения полных квадратов получим

$$\delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi}) - V^*(\boldsymbol{\xi}) = O_0^* - \sum_{i=1}^{2} \Big[\frac{1}{2R_i^*} + \varepsilon^2 P^* \gamma_{ii}(\boldsymbol{x}^0)\Big](\xi_i - \xi_i^c)^2; \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} O_0^* = \delta_0^* - P^*\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) - \varepsilon \sum_{i=1}^{2} M_i^* \gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{2} (2R_i^*)^{-1} (\xi_i^c)^2, \\ \xi_1^c = \varepsilon P^* R_1^* \gamma_2(\boldsymbol{x}^0), \qquad \xi_2^c = -\varepsilon P^* R_2^* \gamma_1(\boldsymbol{x}^0). \end{gathered} \tag{3.5}$$

При выводе (3.4) отбрасывались члены порядка $O(\varepsilon^3)$, поскольку именно с такой точностью были выписаны формулы (2.12), (2.15).

На данном шаге определяются моменты M_i^*. Заметим, что поведение W на бесконечности определяется быстро растущим первым слагаемым в квадратных скобках в (2.16). Значит, согласно (3.4) центр площадки контакта смещается в точку с координатами (3.5). Требуя, чтобы для W выполнялось условие

$$W(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \frac{\varepsilon^2 P^*}{8\pi D} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|^2 \ln \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|}{r_0/\varepsilon} + O\Big(\ln \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|}{r_0/\varepsilon}\Big), \qquad |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c| \to \infty, \tag{3.6}$$

приходим к следующим равенствам:

$$M_1^* = P^* \xi_2^c, \qquad M_2^* = -P^* \xi_1^c. \tag{3.7}$$

С учетом (3.5), (3.7), (2.13) заключаем, что M_i порядка $O(\varepsilon^3)$. Наконец, возвращаясь к реальному масштабу, согласно (1.6), (2.7), (2.8) найдем

$$x_1^c = x_1^0 + PR_1\gamma_2(\boldsymbol{x}^0), \qquad x_2^c = x_2^0 - PR_2\gamma_1(\boldsymbol{x}^0). \tag{3.8}$$

На основе результатов [7] построим решение модельной задачи (3.1)–(3.3), (3.6). Введем комплексную переменную $z = \xi_1 - \xi_1^c + i(\xi_2 - \xi_2^c)$. Так как в правой части (3.4) присутствует многочлен второй степени, область контакта Σ^* оказывается эллиптической, причем ее дополнение до расширенной комплексной плоскости представляет собой образ внешности единичного круга при конформном отображении

$$z = \omega(\zeta), \qquad \omega(\zeta) = c^*(\zeta + m\zeta^{-1}); \tag{3.9}$$

$$c^* = \frac{r_0}{\varepsilon} \exp\Big\{ -\frac{4\pi D}{\varepsilon^2 P^*} \frac{R_1^* + R_2^*}{2R_1^* R_2^*} - 4\pi D[\gamma_{11}(\boldsymbol{x}^0) + \gamma_{22}(\boldsymbol{x}^0)] - 1\Big\}; \tag{3.10}$$

$$m = \frac{8\pi D}{\varepsilon^2 P^*} \frac{R_1^* - R_2^*}{2R_1^* R_2^*} + 8\pi D[\gamma_{22}(\boldsymbol{x}^0) - \gamma_{11}(\boldsymbol{x}^0)]. \tag{3.11}$$

Согласно формуле Гурса внутреннее асимптотическое представление (2.14) запишем в виде

$$w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon(\delta_0^* - \Phi^*(\boldsymbol{\xi})) + \varepsilon \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \tag{3.12}$$

Для производных комплексных потенциалов имеем следующие выражения [7]:

$$\varphi'[\omega(\zeta)] = \frac{\varepsilon^2 P^*}{8\pi D} \ln \zeta, \qquad \chi''[\omega(\zeta)] = -\frac{\varepsilon^2 P^*}{8\pi D} \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}. \tag{3.13}$$

Согласно равенству

$$\varphi[\omega(\zeta)] = \int \varphi'[\omega(\zeta)] \frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} d\zeta$$

с учетом (3.9), (3.13) находим

$$\varphi[\omega(\zeta)] = \frac{\varepsilon^2 P^*}{8\pi D}\, c^* \Big[\Big(\zeta + \frac{m}{\zeta}\Big) \ln\, \zeta - \zeta + \frac{m}{\zeta}\Big]. \tag{3.14}$$

В результате двух операций интегрирования из второй формулы (3.13) выводим

$$\chi[\omega(\zeta)] = \frac{\varepsilon^2 P^*}{8\pi D}\, (c^*)^2 \Big[(1+m^2) \ln\, \zeta - \frac{m}{2}\Big(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\Big)\Big] + C. \tag{3.15}$$

Постоянная интегрирования в (3.15) определяется из условия обращения в нуль на контуре $\partial\Sigma^*$ площадки контакта (при $|\zeta| = 1$) второго слагаемого в (3.12) и равна $C = \varepsilon^2 P^*(8\pi D)^{-1}(c^*)^2(1-m^2)$.

4. Зависимость перемещения штампа от действующей на него силы. Подставив (3.14), (3.15) в (3.12), исследуем поведение $w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$. После несложных вычислений приходим к соотношению

$$\begin{aligned} w(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) &= \varepsilon\delta_0^* - \varepsilon\Big(\frac{\xi_1^2}{2R_1^*} + \frac{\xi_2^2}{2R_2^*}\Big) + \frac{\varepsilon^3 P^*}{8\pi D}|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|^2 \ln\, \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|}{r_0/\varepsilon} + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \Big(\frac{1}{2R_i^*} + \varepsilon^2 P^* \gamma_{ii}(\boldsymbol{x}^0)\Big)(\xi_i - \xi_i^c)^2 + \frac{\varepsilon^3 P^*}{8\pi D}\, (c^*)^2(1+m^2) \ln\, \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|}{c^*} + \\ &+ \frac{\varepsilon^3 P^*}{8\pi D}\, (c^*)^2 m\, \frac{(\xi_1 - \xi_1^c)^2 - (\xi_2 - \xi_2^c)^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|^2} + \frac{\varepsilon^3 P^*}{8\pi D}\, (c^*)^2\Big(1 - \frac{m^2}{2}\Big) + O(|\boldsymbol{\xi}|^{-1}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \to \infty. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Сопоставим разложение (4.1) с (2.12). Во-первых, при использовании метода сращиваемых разложений наличие в (4.1) $\ln\,(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|/c^*)$ приводит к необходимости уточнения внешнего асимптотического представления (2.6) соответствующим сингулярным решением. Однако согласно (3.10) величина $\varepsilon c^*/r_0$ оказывается экспоненциально малой при $\varepsilon \to 0$. В то же время, так как $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^c|^2 = |\boldsymbol{\xi}|^2 - 2\sum_{i=1}^{2} \xi_i\xi_i^c + |\boldsymbol{\xi}^c|^2$, в разложение третьего слагаемого в правой части (4.1) входит член $\varepsilon^3 P^*(8\pi D)^{-1}\varepsilon^2(P^*)^2[(R_1^*)^2\gamma_2(\boldsymbol{x}^0)^2 + (R_2^*)^2\gamma_1(\boldsymbol{x}^0)^2]\ \ln\,(\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|/r_0)$.

Таким образом, указанное сингулярное решение бигармонического уравнения с логарифмической особенностью должно иметь коэффициент порядка $O(\varepsilon^5)$ и, следовательно, не влияет на разложение (2.12).

Во-вторых, в области сращивания $\sqrt{\varepsilon}\, d_0/2 \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, d_0$ (или, в растянутых координатах, $d_0/(2\sqrt{\varepsilon}) \leqslant |\boldsymbol{\xi}| \leqslant d_0/\sqrt{\varepsilon})$ будет выполняться соотношение $v(\boldsymbol{x}) - w(\varepsilon;\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)) = O(\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$, если будет выполнено условие

$$\varepsilon P^*\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} M_i^*\gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) = \varepsilon\delta_0^* + \varepsilon\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2R_i^*}\, (\xi_i^c)^2. \tag{4.2}$$

С учетом (1.6), (2.7) и зависимостей (3.5) и (3.7) уравнение (4.2), связывающее силу P, действующую на штамп, с его перемещением δ_0, запишем в окончательной форме

$$\begin{gathered} P\gamma(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) - P^2 k(R_1, R_2;\boldsymbol{x}^0) = \delta_0, \\ k(R_1, R_2;\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{2} R_{3-i}\gamma_i(\boldsymbol{x}^0)\Big[\gamma^{(i)}(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{x}^0) + \frac{1}{2}\,\gamma_i(\boldsymbol{x}^0)\Big]. \end{gathered} \tag{4.3}$$

С той же точностью, с которой было получено уравнение (4.3), обратную зависимость можно представить в виде

$$P = \frac{\delta_0}{\gamma(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x}^0)} + \frac{\delta_0^2}{\gamma(\boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{x}^0)^3}\, k(R_1, R_2; \boldsymbol{x}^0). \tag{4.4}$$

При $\gamma_{12}(\boldsymbol{x}^0) = \gamma_{21}(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$ справедливы формулы (3.5), (3.8) и (3.10), (3.11) для координат центра пятна контакта и его размеров, выражения (3.7) для моментов, действующих на штамп, соотношения (4.2)–(4.4) между силой и перемещением. При этом эллиптическая площадка контакта оказывается повернутой относительно координатных осей на некоторый угол φ. Если $R_1^* = R_2^*$, то φ определяется квадратичной формой $\sum\limits_{i,j=1}^{2} \gamma_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\xi_i\xi_j$. Если, например, $R_1^* > R_2^*$, то с точностью до членов порядка ε^3 (с этой погрешностью получена формула (3.4))

$$\varphi = -\varepsilon^2\, \frac{2R_1^* R_2^*}{R_1^* - R_2^*}\, P^* \gamma_{12}(\boldsymbol{x}^0). \tag{4.5}$$

Согласно (2.8), (3.10), (3.11) в реальных координатах эллиптическое пятно контакта имеет полуоси $c(1+m)$ и $c(1-m)$, причем

$$c = r_0 \exp\Big\{ -\frac{4\pi D}{P}\, \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2} - 4\pi D[\gamma_{11}(\boldsymbol{x}^0) + \gamma_{22}(\boldsymbol{x}^0)] - 1\Big\}; \tag{4.6}$$

$$m = \frac{8\pi D}{P}\, \frac{R_1 - R_2}{2R_1R_2} + 8\pi D[\gamma_{22}(\boldsymbol{x}^0) - \gamma_{11}(\boldsymbol{x}^0)]. \tag{4.7}$$

Формулы (4.6), (4.7) обобщают результаты, полученные Л. А. Галиным [7]. Для защемленной круговой пластинки $\gamma_{11}(0) = \gamma_{22}(0) = -(16\pi D)^{-1}$ и соотношения (4.6), (4.7) совпадают с формулами в [7].

Отметим, что предположение о защемлении края пластинки сделано только для простоты изложения. Например, для пластинки со свободно опертым краем $\gamma_{11}(0) = \gamma_{22}(0) = -(16\pi D)^{-1}(3+\nu)(1+\nu)^{-1}$, где ν — коэффициент Пуассона.

Заключение. Дальнейшее усложнение конструкции асимптотики (см. п. **4**) приводит к отклонению формы площадки от эллиптической. Асимптотика области контакта изучалась в [5, 15].

Следует отметить, что в случае $R_1^* \neq R_2^*$ величина m (см. формулу (3.11)) не ограничена при уменьшении ε, хотя по своему геометрическому смыслу по модулю не должна быть больше единицы. Этот парадокс можно, по-видимому, объяснить тем, что с увеличением различия между радиусами кривизны R_1 и R_2 площадка контакта переходит от вытянутой узкой эллиптической области к отрезку. Заметим, что задача о защемлении бесконечной упругой пластинки вдоль линии обсуждается в [9, § 8.7].

Из формул (3.8), (4.5)–(4.7) следует, что параметры пятна контакта зависят от размеров и формы пластинки, а также от положения центра штампа.

Автор выражает благодарность С. А. Назарову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. **Кравчук А. С.** Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Моск. акад. приборостроения и информатики, 1997.

3. **Головински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
4. **Ковтуненко В. А.** Метод численного решения задачи о контакте упругой пластины с препятствием // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 142–146.
5. **Назаров С. А.** О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 115–126.
6. **Хлуднев А. М.** Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, № 2. С. 318–326.
7. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
8. **Розенберг Л. А.** О давлении твердого тела на пластинку // Инж. сб. 1955. Т. 21. С. 151–155.
9. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
10. **Черепанов Г. П.** Давление твердого тела на пластины и мембраны // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, № 2. С. 282–290.
11. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
12. **Аргатов И. И.** Вдавливание штампа в форме эллиптического параболоида в плоскую границу упругого тела // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 4. С. 671–679.
13. **Campbell A., Nazarov S. A.** Une justification de la méthode de raccordement des développements asymptotiques appliquée a un probléme de plaque en flexion. Estimation de la matrice d'impédance // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. P. 15–54.
14. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2.
15. **Аргатов И. И., Назаров С. А.** Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 3–32.

Поступила в редакцию 11/X 1999 г.