ПМТФ, № 4, 1967

РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ

Р. М. Зайдель

(*Москва*)

Исследование устойчивости плоских ударных волн по отношению к неодномерным возмущениям было впервые проделано С. П. Дьяковым [1]. Им были получены критерии устойчивости и показано, что в случае неустойчивости возмущения растут со временем по экспоненциальному закону. С. В. Иорданский [2] показал, что в случае устойчивости возмущения затухают по степеннóму закону. Однако полученные в [2] критерии устойчивости не совпадали с результатами работы [1]. В. М. Конторович [3] выяснил причину имевшихся расхождений и подтвердил правильность критериев, полученных в [2]. В работах [4,5] при несколько иной формулировке граничных условий также был получен степеннóй закон затухания возмущений.

В § 1 данной работы для возмущений рассматривалась задача Коши, получены решения для практически интересных случаев, исследовано их асимптотическое поведение.

В § 2 рассмотрено влияние малой вязкости на развитие возмущений. Показано, что при $t \to \infty$ амплитуда возмущений затухает в основном как $\exp(-\alpha t)$, где $\alpha > 0$ не зависит от вида граничных условий на фронте ударной волны. Результаты § 2 были использованы при обработке экспериментальных данных [6], что позволило определить вязкость ряда веществ при высоких давлениях.

§ 1. Пусть по однородному веществу, заполняющему все пространство, движется с постоянной скоростью v_0 плоская ударная волна. Выберем систему координат, в которой фронт волны покоится и совпадает с плоскостью yz. Ось x направим по движению газа. Перед волной газ имеет давление p_0, плотность ρ_0, скорость звука c_0, массовую скорость v_0. За фронтом волны, соответственно, имеем p, ρ, c, v. Поскольку $v_0 > c_0$, то возмущения, локализованные в конечной области перед фронтом волны, будут поглощены ею за конечное время. Выбрав этот момент за начальный, можем считать, что перед волной возмущений нет. Не уменьшая общности, можно ограничиться случаем, когда все величины не зависят от переменной z, а составляющая скорости вдоль оси z равна нулю. Система уравнений для малых возмущений, отмеченных штрихом, имеет вид

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} + v\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_y'}{\partial t} + v\frac{\partial v_y'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + v\frac{\partial p'}{\partial x} + \rho c^2\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Возмущение плотности ρ' удалось исключить при помощи условия адиабатичности:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v\frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial t} + v\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

Задачу будем решать в предположении, что зависимость всех величин от координаты y определяется множителем $\exp(ik_0 y)$. Введем обозначение

$$\delta = -j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H \tag{1.3}$$

где $j = \rho_0 v_0 = \rho v$ — плотность потока массы через фронт, а производная удельного объема $V = 1/\rho$ по давлению p вычисляется вдоль удар ной адиабаты. Для идеального газа $\delta = 1 / M_0^2$, где $M_0 = v_0 / c_0$ — число Маха, определяемое как отношение скорости волны по холодному веществу к скорости звука в нем. Пусть $\xi(y, t)$ — смещение фронта ударной волны от плоскости $x = 0$, причем $\xi > 0$, если фронт сместился в сторону сжатого газа. Условия на фронте ударной волны, полученные в [1], можно записать при $x = 0$ так:

$$(v_0 - v)\frac{\partial\xi}{\partial y} = v_y', \quad v_x' + \frac{1+\delta}{2\rho v}p' = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1-\delta}{2\rho_0(v_0 - v)}p' = 0 \qquad (1.4)$$

Начальные условия при $t = 0$ задаем в виде: (1.5)

$$p' = \rho v^2 f_1(x)e^{ik_0y}, \qquad v_x' = vf_2(x)e^{ik_0y}, \qquad v_y' = -ivf_3(x)e^{ik_0y}, \qquad \xi = \xi_0 e^{ik_0y}$$

Для того чтобы начальные данные не противоречили краевым условиям, функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ должны удовлетворять соотношениям, которые можно получить из (1.1) и (1.4)

$$f_2(0) + \frac{1+\delta}{2}f_3(0) = 0, \qquad \left(\frac{df_3}{dx}\right)_{x=0} + k_0\left(\frac{1-\delta}{2}\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)f_1(0) = 0 \qquad (1.6)$$

Кроме того, предполагаем, что на больших расстояниях от фронта ударной волны нет источника возмущений, поэтому для конечных моментов времени все возмущения должны обращаться в нуль при $x \to +\infty$. Задача Коши для системы (1.1) легко решается при помощи преобразования Лапласа. Для этого от функции-оригинала $f(x, t)$ переходим к функции-изображению $f(x, s)$

$$f(x, t) \to f(x, s) = \int_0^\infty f(x, t)e^{-st}dt \qquad (1.7)$$

Множитель $\exp(ik_0y)$ всюду, где это не вызовет затруднений, для краткости опускаем. Вместо (1.1) получаем систему для изображений

$$sv_x' + v\frac{dv_x'}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp'}{dx} = vf_2(x) \qquad (1.8)$$

$$sv_y' + v\frac{dv_y'}{dx} + \frac{ik_0}{\rho}p' = -ivf_3(x)$$

$$sp' + v\frac{dp'}{dx} + \rho c^2\left(\frac{dv_x'}{dx} + ik_0v_y'\right) = \rho v^2 f_1(x)$$

При помощи (1.4) получим краевые условия для изображений при $x = 0$

$$ik_0(v_0 - v)\xi = v_y', \quad v_x' + \frac{1+\delta}{2\rho v}p' = 0, \quad s\xi + \frac{1-\delta}{2\rho_0(v_0 - v)}p' = \xi_0 \qquad (1.9)$$

Кроме того, при $x \to +\infty$ все функции-изображения должны обращаться в нуль, если $\mathrm{Re}\, s > s_0$, где s_0 — достаточно большое положительное число.

Применяя метод вариации постоянных и возвращаясь к функциям-оригиналам, для амплитуды смещения фронта получим формулу

$$\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{\tau z}}{D(z)}\Big\{\xi_0[(1 + \delta - 2\beta^2)z^2 + (1 - \delta)z\omega - 2(1 - \beta^2)] -$$

$$- \frac{\sigma}{\sigma - 1}(1 - \delta)F(z)\Big\}dz \qquad (1.10)$$

$$\tau = k_0vt, \quad \sigma = \rho/\rho_0, \quad \beta = v/c < 1, \quad z = s/k_0v, \quad \omega = \sqrt{\beta^2z^2 + 1 - \beta^2}$$

Интеграл берется вдоль вертикальной прямой, лежащей справа от всех особенностей подынтегрального выражения, причем выбрана та ветвь, которая для положительных чисел дает арифметическое значение радикала. Функция $F(z)$ определяется профилем начальных возмущений

$$F(z) = \int_0^\infty [\beta^2 (z^2 - 1) f_1(x) + (1 - \omega z) f_2(x) + (\omega - z) f_3(x)] \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\beta^2 z + \omega}{1 - \beta^2} k_0 x\right) dx \quad (1.11)$$

В знаменателе подынтегрального выражения в (1.10) стоит функция

$$D(z) = (1 + \delta - 2\beta^2) z^3 + [\sigma (1 - \delta) - 2 (1 - \beta^2)] z + (1 - \delta)(z - \sigma) \times$$
$$\times \sqrt{\beta^2 z^2 + 1 - \beta^2} \quad (1.12)$$

Расположение нулей $D(z)$ в плоскости комплексного переменного z зависит от трех безразмерных параметров: δ, σ, β. Из формулы (1.11) следует, что ни при каких конечных z из правой полуплоскости функция $F(z)$ не обращается в бесконечность. Поэтому при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть такой частный случай, когда в начальный момент был искривлен только фронт ударной волны, а других возмущений не было для $x > 0$

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0 \quad (1.13)$$

Отметим, что именно такие начальные условия были в опытах [6]. При этом $F(z) = 0$, а формула (1.10) принимает вид (1.14)

$$\varphi(\tau) = \frac{\xi(\tau)}{\xi_0} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{\tau z}}{D(z)} [(1 + \delta - 2\beta^2) z^2 + (1 - \delta) z\omega - 2 (1 - \beta^2)] dz$$

Перейдем к новой комплексной переменной w

$$z = {}^1\!/_2 \mu (w - w^{-1}), \quad w = z / \mu + [(z / \mu)^2 + 1]^{1/2}, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = (1 - \beta^2)/\beta^2$$

Получим (1.15)

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\pi i} \int \exp\left[\frac{1}{2} T \left(w - \frac{1}{w}\right)\right] \frac{(1 + \delta + 2\beta) w^2 - (1 + \delta - 2\beta)}{f(w^2)} dw \quad (1.16)$$

$$f(x) = (1 + \delta + 2\beta) x^2 + [4\sigma\varepsilon^{-1} (1 - \delta) - 2 (1 + \delta)] x + 1 + \delta - 2\beta \quad (1.17)$$

Аргумент T связан с τ соотношением

$$T = \mu\tau = k_0 c t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.18)$$

Скорость распространения малого возмущения вдоль поверхности фронта ударной волны равна $\sqrt{c^2 - v^2} = c \sqrt{1 - \beta^2}$. Поэтому величина T имеет смысл пути, пройденного сигналом вдоль поверхности фронта, измеренного в единицах $\lambda' = \lambda / 2\pi = 1/k_0$, где λ — длина волны возмущений.

В силу свойств отображения (1.15) интеграл (1.16) также можно вычислять вдоль вертикальной прямой, расположенной справа от всех особенностей подынтегральной функции.

Можно показать [1-3], что если

$$\frac{\sigma - \varepsilon}{\sigma + \varepsilon} < \delta < 1 \quad (1.19)$$

то оба нуля x_1, x_2 функции $f(x)$ лежат внутри окружности $|x| = 1$. Подынтегральное выражение в (1.16) удовлетворяет условиям леммы Жордана [7], поэтому в случае (1.19) интеграл (1.16) можно вычислять вдоль единичной окружности $|w| = 1$. Проделав необходимые выкладки, получим

$$\varphi(T) = \frac{4}{\pi}\beta\varepsilon\sigma(1-\delta)\int_0^1 \cos(Tx)\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{A\varepsilon^2x^4 + 2B\varepsilon x^2 + C} \tag{1.20}$$

$$A = (1+\delta)^2, \quad B = 2(1-\beta^2) - \sigma(1-\delta^2), \quad C = \sigma^2(1-\delta)^2 \tag{1.21}$$

Знаменатель в (1.20) на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ не обращается в нуль, если выполнено условие (1.19). Очевидно, что функция $\varphi(T)$, определяемая формулой (1.20), стремится к нулю при $T \to \infty$. Поэтому (1.19) обеспечивает устойчивость ударной волны. Окружности $|w| = 1$ в силу (1.15) соответствуют в плоскости z два берега разреза, проведенного на отрезке $(-i\mu, i\mu)$ мнимой оси. Концами разреза служат точки ветвления функции $\omega = \sqrt{\beta^2z^2 + 1 - \beta^2}$. Область $|w| > 1$ отображается на нижний лист римановой поверхности, на котором находится контур интегрирования в формуле (1.14). Область $|w| < 1$ отображается на верхний лист. Оба листа склеиваются вдоль отрезка $(-i\mu, i\mu)$ мнимой оси плоскости z. Таким образом, в случае устойчивости асимптотическое поведение возмущений определяется положением точек ветвления подынтегрального выражения в (1.14); полюса же, находящиеся на другом листе, вклада в асимптотику не дают.

Отметим здесь, что, как следует из [1-3], при выполнении одного из условий: $\delta > 1$ или $\delta < -(1 + 2\beta)$, нули $f(x)$ удовлетворяют неравенствам $x_1 > 1$ и $-1 < x_2 < 1$. Из (1.16) следует, что при этом происходит экспоненциальное нарастание возмущений (абсолютная неустойчивость). Если же

$$-(1+2\beta) < \delta < (\sigma - \varepsilon)/(\sigma + \varepsilon) \tag{1.22}$$

то $x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 1$. В работах [1-3] показано, что при этом фронт излучает звуковые волны, а поверхность фронта колеблется по гармоническому закону.

Асимптотическое поведение $\varphi(T)$ проще всего получить из (1.11) методом перевала

$$\varphi(T\to\infty) \sim \frac{4\beta\varepsilon\sigma(1-\delta)}{[(1+\delta)\varepsilon - \sigma(1-\delta)]^2}\,\frac{\sin(T - {}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi T^3}} \tag{1.23}$$

Если вещество, по которому распространяется ударная волна, представляет собой идеальный газ с показателем изэнтропы γ, то формула (1.23) примет вид

$$\varphi(T\to\infty) \sim \frac{4}{\delta^2}\left(\frac{1+(h-1)\delta}{h+1-\delta}\right)^{1/2}\frac{\sin(T-{}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi T^3}} \qquad \left(h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \tag{1.24}$$

Для сильной ударной волны ($\delta = 0$) выражение (1.24) расходится. Это свидетельствует о том, что асимптотическое поведение $\varphi(T)$ для сильной волны будет существенно иным, а именно: затухание будет более медленным. Точная формула (1.20) для сильной волны запишется таким образом

$$\varphi(T) = \frac{4}{\pi}\sqrt{h+1}\int_0^1 \frac{\cos(Tx)\,dx}{[h+1-(h-3)x^2]\sqrt{1-x^2}} \tag{1.25}$$

Отсюда находим, что в случае сильной волны

$$\varphi(T\to\infty) \sim \left(\frac{h+1}{2\pi T}\right)^{1/2}\cos\left(T - \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.26}$$

Любопытно, что для $\gamma = 2$ ($h = 3$) формула (1.25) принимает простой вид

$$\varphi(T) = J_0(T) \tag{1.27}$$

где J_0 — функция Бесселя. Видимо, это связано с тем, что в данном случае $u = v_0 - v = c$.

В случае идеального газа при $\delta \ll 1$ и $T \gg 1$ поведение $\varphi(T)$ зависит от соотношения между δ и T. Аналогично тому как это сделано в [4,5], найдем, что при $\delta \ll 1$ и $T \gg 1$ верна формула

$$\varphi(T) \sim \sqrt{\frac{h+1}{2\pi T}} \left\{ \cos\left(T - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\pi q} \cos(T + q) + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{q} \left[S(\sqrt{q}) \cos\left(T + q - \frac{\pi}{4}\right) - C(\sqrt{q}) \sin\left(T + q - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$S(z) = \int_0^z \sin(t^2)\,dt, \qquad C(z) = \int_0^z \cos(t^2)\,dt, \qquad q = {}^1/_8 (h+1) T\delta^2 \tag{1.28}$$

Здесь $S(z)$ и $C(z)$— интегралы Френеля.

Пусть достаточно сильная ($\delta \ll 1$) волна прошла большой путь, так что $T \gg 1$. Если δ настолько мало́, что при этом $q \ll 1$, то на данной стадии затухание возмущений будет происходить по закону сильной волны (1.26). С ростом T параметр q увеличивается. При $q \sim 1$ будет заметное отклонение от формулы (1.26), хотя затухание возмущений будет продолжаться. На этой стадии асимптотики нужно пользоваться более общей формулой(1.28). При еще бо́льших значениях T, когда параметр q станет достаточно большим: $q \gg 1$, затухание возмущений происходит по закону (1.24).

В общем случае, при наличии распределенных по пространству начальных возмущений, смещение фронта ударной волны описывается формулой

$$\xi(T) = \xi_0 \varphi(T) + \psi(T) \tag{1.29}$$

причем, в соответствии с (1.10),

$$\psi(T) = -\frac{\sigma(1-\delta)}{\sigma - 1} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z)}{D(z)} \exp\left(\frac{Tz}{\mu}\right) dz \tag{1.30}$$

Асимптотическое поведение функций $\varphi(T)$ и $\psi(T)$ качественно одинаково, но формулы для $\psi(T)$,разумеется, более громоздки. Приведем лишь асимптотическую формулу для $\psi(T)$ в случае сильной волны в идеальном газе

$$\psi(T) \sim \frac{1}{h-1}\left(\frac{h+1}{2\pi T}\right)^{1/2} \operatorname{Re}\int_0^\infty [f_2(x) - f_1(x) - i\sqrt{h} f_3(x)] \exp\left[i\left(T - \frac{\pi}{4} - \frac{k_0 x}{\sqrt{h}}\right)\right] dx \tag{1.31}$$

§ 2. Полученная в § 1 зависимость $\varphi(T)$ (см. формулу (1.20)) проверялась на опыте [6]. В ходе эксперимента было замечено, что изменение линейных размеров при сохранении геометрического подобия не приводит к полному совпадению кривых в координатах (φ, T). Это означает, что заметную роль играет такой немоделируемый параметр, как вязкость сжатого вещества. Оказалось, однако, что наблюдаемые при подобном преобразовании системы кривые $\varphi(T)$ не сильно различаются между собой. Поэтому вязкие члены в уравнениях движения можно рассматривать как поправку. Вещество, по которому прошла ударная волна, будем считать лишенным прочности. Предположим также, что коэффициент теплопроводности и вторая вязкость равны нулю. В невозмущенном течении за фронтом волны все величины не зависят от координат и времени, поэтому в линейном приближении условие адиабатичности не изменится. При наличии вязкости вместо (1.1) получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_x'}{\partial t} + v\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = \nu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_y'}{\partial x \partial y}\right) \\
\frac{\partial v_y'}{\partial t} + v\frac{\partial v_y'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = \nu\left(\frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y'}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_y'}{\partial y^2}\right) \\
\frac{\partial p'}{\partial t} + v\frac{\partial p'}{\partial x} + \rho c^2\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y}\right) = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Как обычно, ν — кинематический коэффициент вязкости. Рассмотрим порядок малости входящих сюда величин. Если искривление фронта ударной волны характеризуется амплитудой ξ и длиной волны λ, то возмущения имеют порядок ξ/λ по отношению к соответствующим невозмущенным величинам. При написании системы (2.1) были отброшены члены порядка $(\xi/\lambda)^2$. Отношение правых частей уравнений (2.1) к левым по порядку величины равно $\nu/(v\lambda) = 1/R$, где R — число Рейнольдса. Предлагаемый способ учета вязкости состоит в том, что правые части в (2.1) считаются малыми

$$1/R = \nu/(v\lambda) \ll 1 \tag{2.2}$$

Если, кроме того,

$$\xi/\lambda \ll 1 \tag{2.3}$$

то вязкие и нелинейные члены могут рассматриваться как поправки, взаимное отношение которых может быть произвольным. Для учета каждой из этих поправок можно использовать метод последовательных приближений. При полном геометрическом подобии смещение кривой $\varphi(T)$ происходит только благодаря вязкости поэтому далее рассматриваются лишь поправки, обусловленные вязкостью. Отметим, что условие (2.2) выполняется, если при заданных ν и v взять достаточно большое λ, а условие (2.3) будет выполнено, если при выбранном λ взять достаточно малое ξ.

При выводе краевых условий на фронте ударной волны следует в возмущенной области учесть потоки импульса и энергии, обусловленные вязкостью; при $x = 0$

$$\begin{gathered}
v_y' - (v_0 - v)\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\nu}{v}\left(\frac{\partial v_x'}{\partial y} + \frac{\partial v_y'}{\partial x}\right) \\
\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1-\delta}{2\rho_0(v_0 - v)}\,p' = \frac{\nu}{v}\,\frac{\sigma(1-\delta)}{3(\sigma-1)(1-\beta^2)}\left(2\frac{\partial v_x'}{\partial x} - \frac{\partial v_y'}{\partial y}\right) \\
v_x' + \frac{1+\delta}{2\rho_0 v_0}\,p' = \frac{\nu}{v}\,\frac{1+\delta-2\beta^2}{3(1-\beta^2)}\left(2\frac{\partial v_x'}{\partial x} - \frac{\partial v_y'}{\partial y}\right)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Так как фронт ударной волны имеет конечную ширину a, то соотношения (2.4) будут верны лишь в том случае, когда размеры переходной зоны будут малы по сравнению с радиусом кривизны r фронта волны: $a \ll r$. Для синусоиды с длиной волны λ и амплитудой ξ (так что $\xi/\lambda \ll 1$) наименьший радиус кривизны по порядку величины равен λ^2/ξ, так что условие $a \ll r$ можно заменить неравенством $a \ll \lambda^2/\xi$.

Ширина переходной зоны зависит от состояния вещества за фронтом волны, например, от давления: $a = a(p)$. При изменении давления на величину p' ширина фронта изменится на величину $a' = p'\,da/dp$. Зависимость $a(p)$ достаточно плавная, так что производную $d \ln a / d \ln p$ можно считать величиной порядка единицы. Тогда по порядку величины

$$a' / a \sim p'/p \sim \xi/\lambda \tag{2.5}$$

Для того чтобы можно было следить за смещением фронта при изменении давления, должно выполняться условие $a' \ll \xi$. В силу (2.5) это неравенство можно заменить на $a \ll \lambda$. Очевидно, что условие $a \ll \lambda$ обеспечивает выполнение неравенства $a \ll \lambda^2/\xi$. В опытах, описанных в [6], условия (2.2), (2.3) и $a \ll \lambda$ выполнялись с хорошей точностью.

В недавно опубликованной работе [8] отмечается, что в соотношениях (2.4) должны присутствовать члены порядка R^{-1} (по отношению к левым частям), учитывающие структуру ударной волны. Авторы работы [8], следуя методу Жермена и Гиро, обозначают эти поправки как $R^{-1}f^*$, где f^* — эффективное значение некоторой величины f (давление, скорость и т. д.) в переходной зоне. В работе [8] величины f^* вычислены в предположении, что уравнение Навье — Стокса описывает структуру ударной волны. Однако уравнения гидродинамики в этой области неприменимы. Более того, расчет величин f^*, использующий более строгое, кинетическое уравнение, не может быть проделан, пока не только вязкость и теплопроводность как функции давления и температуры, но также все типы взаимодействий между молекулами вещества остаются неизвестными.

В этих условиях существенным будет то обстоятельство, что коэффициент вязкости резко возрастает с давлением. Сильная зависимость коэффициента вязкости от давления приводит к тому, что ширина переходной зоны a будет мала по сравнению с $\nu/v = \lambda/R$, где ν — значение коэффициента вязкости в сжатом веществе вдали от фронта. Это подтверждается экспериментами [9], в которых изучалось отражение света от фронта ударной волны. В граничных условиях (2.4) слагаемые типа f^* можно при этом не учитывать, так как их вклад будет порядка av/ν.

В указанных предположениях любую величину f будем записывать в виде $f + f_1$, где f дает решение задачи при $\nu = 0$, а f_1 — поправка, обусловленная вязкостью. В правые части (2.1) и (2.4) можно подставлять величины типа f, которые считаем известными (см. § 1), а в левых частях останутся лишь искомые величины типа f_1, так как вычисленные без учета вязкости величины типа f удовлетворяют такой же системе линейных уравнений, но без правых частей. Начальные условия для всех величин типа f_1 будут нулевыми, так как вязкость еще не могла сказаться.

Практически возмущения возникали в момент прохождения ударной волной стыка двух массивных образцов, сделанных из одинакового материала. Один из образцов на стыкующейся поверхности имел цилиндрические выточки с синусоидальным профилем. Глубина выточек мала по сравнению с периодом синусоиды. Это обеспечивает относительную малость возмущений. В момент прохождения ударной волной границы между образцами все возмущения сосредоточены в узкой зоне, ширина которой порядка глубины выточек. Поскольку сами возмущения первого порядка, то функция $\psi(T)$ (см. (1.30)) будет второго порядка малости. Поэтому дальнейшие вычисления проведены для случая, когда в начальный момент $t = 0$ искривлен только фронт ударной волны. При этом амплитуда ξ_1 дополнительного смещения $\xi_1 \exp(ik_0 y)$ фронта ударной волны, обусловленного вязкостью, в результате элементарных, но довольно длинных вычислений может быть представлена в виде

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = -\frac{\nu k_0}{v}\sigma(1-\delta)\frac{1}{2\pi i}\int e^{\tau z}\left[\frac{q(z)}{P(z)} + 2z\sqrt{\beta^2 z^2 + 1 - \beta^2}\,\frac{1+Q(z)}{P(z)}\right]dz$$

$$P(z) = Az^4 - 2Bz^2 + C, \qquad Q(z) = \frac{A_1 z^4 - 2B_1 z^2 + C_1}{3(1-\beta^2)P(z)} \tag{2.6}$$

Здесь $q(z)$ — полином третьей степени, точный вид которого оказывается несущественным. Постоянные A, B, C определяются формулами (1.21),

$$A_1 = -8\beta^4 + 2\beta^2(1+\delta)(11+5\delta) - 3(1+\delta)^3$$

$$B_1 = 2\beta^2(1-\delta) - 6(1+\delta) - 4\beta^4 + \sigma(1-\delta)[3(1+\delta)^2 - 4\beta^2(4+\delta)] \tag{2.7}$$

$$C_1 = \sigma(1-\delta)\{8(3-\beta^2) - \sigma(1-\delta)[2\beta^2 + 3(1+\delta)]\}$$

При выводе (2.6) числители и знаменатели дробей умножались на величину $D^*(z)$, получающуюся из (1.12) изменением знака перед радикалом. В частности, $P(z) = D(z)D^*(z)$. Поэтому подынтегральные выражения в (2.6) и (1.14) имеют одни и те же особые точки. При выполнении условия устойчивости (1.19) (только такой случай встречается на практике) интеграл в (2.6) можно вычислять по обоим берегам разреза, проведенного на отрезке $(-i\mu, i\mu)$ мнимой оси плоскости z. Первое слагаемое, содержащее $q(z)$, дает нуль. Вводя новую переменную $x = z/i\mu$, получим

$$\varphi_1(T) = \frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\nu k_0}{v}\frac{4}{\pi}\sigma\varepsilon(1-\delta)\sqrt{1-\beta^2}\int_0^1 \sin(Tx)\frac{1+Q(x)}{P(x)}x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$P(x) = A\varepsilon^2 x^4 + 2B\varepsilon x^2 + C, \qquad Q(x) = \frac{A_1\varepsilon^2 x^4 + 2B_1\varepsilon x^2 + C_1}{3(1-\beta^2)P(x)} \tag{2.8}$$

Аргумент T определен формулой (1.18).

Суммарное смещение фронта ударной волны, отнесенное к его начальному значению ξ_0, равно $\varphi(T) + \varphi_1(T)$, где $\varphi(T)$ определяется формулой (1.20). Предполагается, что φ_1 мало по сравнению с φ, поэтому всюду, где $d\varphi/dT \neq 0$, наличие малой поправки к функции $\varphi(T)$ можно рассматривать, как изменение фазы

$$\varphi(T) + \varphi_1(T) = \varphi(T-\theta), \quad \theta = -\varphi_1(T)(d\varphi/dT)^{-1} \tag{2.9}$$

Выделяя безразмерный множитель, содержащий коэффициент вязкости, представим сдвиг фазы в виде

$$\theta = \frac{\nu}{\lambda v_0}S \qquad \left(\lambda = \frac{2\pi}{k_0}\right) \tag{2.10}$$

Здесь λ — длина волны возмущений, v_0 — скорость ударной волны по холодному веществу.

Величина S, зависящая от времени, при помощи (1.20) и (2.8) может быть записана в следующем виде:

$$S(T) = 2\pi\sigma\mu \int_0^1 \sin(Tx)\,[1+Q(x)]\,x\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{P(x)} \left[\int_0^1 \sin(Tx)\,x\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{P(x)}\right]^{-1} \qquad (2.11)$$

Формулы (1.20), (2.8) и (2.11) были использованы при обработке экспериментальных данных [6].

Перейдем к рассмотрению асимптотического закона затухания возмущений при наличии вязкости. Естественно ожидать, что если при $\nu = 0$ затухание возмущений происходит по степенному закону, то при $\nu \neq 0$ будет иметь место более сильный экспоненциальный закон затухания.

В системе (2.1) перейдем к изображениям, как было сделано при составлении системы (1.18); без потери общности можно ограничиться рассмотрением случая, когда распределенные по пространству начальные возмущения отсутствуют. По-прежнему считаем, что от координаты y все величины зависят посредством множителя $\exp(ik_0 y)$. Система уравнений для изображений примет вид

$$\begin{gathered} sv_x' + v\frac{dv_x'}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp'}{dx} = \nu\left(\frac{4}{3}\frac{d^2v_x'}{dx^2} - k_0^2 v_x' + \frac{ik_0}{3}\frac{dv_y'}{dx}\right) \\ sv_y' + v\frac{dv_y'}{dx} + \frac{ik_0}{\rho}p' = \nu\left(\frac{ik_0}{3}\frac{dv_x'}{dx} + \frac{d^2v_y'}{dx^2} - \frac{4}{3}k_0^2 v_y'\right) \\ sp' + v\frac{dp'}{dx} + \rho c^2\left(\frac{dv_x'}{dx} + ik_0 v_y'\right) = 0 \end{gathered} \qquad (2.12)$$

Систему (1.8) при $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ разрешим относительно производных

$$\begin{gathered} \frac{dv_x'}{dx} = \frac{k_0}{1-\beta^2}\left[\beta^2 z\left(v_x' - \frac{p'}{\rho v}\right) - iv_y'\right], \qquad \frac{dv_y'}{dx} = -k_0\left(\frac{ip'}{\rho v} + zv_y'\right) \\ \frac{1}{\rho v}\frac{dp'}{dx} = \frac{k_0}{1-\beta^2}\left[z\left(\beta^2\frac{p'}{\rho v} - v_x'\right) + iv_y'\right] \qquad \left(z = \frac{s}{k_0 v}\right) \end{gathered} \qquad (2.13)$$

Дифференцируя по x эту систему нулевого приближения, получающиеся выражения для вторых производных подставим в правые части (2.12), содержащие малую вязкость в качестве множителя

$$\begin{gathered} sv_x' + v\frac{dv_x'}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp'}{dx} = \nu k_0\left[\frac{4\beta^2 z}{3(1-\beta^2)}\left(\frac{dv_x'}{dx} - \frac{1}{\rho v}\frac{dp'}{dx}\right) - \right. \\ \left. - k_0 v_x' - \frac{i(3+\beta^2)}{3(1-\beta^2)}\frac{dv_y'}{dx}\right] \\ sv_y' + v\frac{dv_y'}{dx} + \frac{ik_0}{\rho}p' = \nu k_0\left[\frac{i}{3}\frac{dv_x'}{dx} - \frac{4}{3}k_0 v_y' - \frac{i}{\rho v}\frac{dp'}{dx} - z\frac{dv_y'}{dx}\right] \\ sp' + v\frac{dp'}{dx} + \rho c^2\left(\frac{dv_x'}{dx} + ik_0 v_y'\right) = 0 \end{gathered} \qquad (2.14)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\frac{p'}{\rho v} = Ae^{\alpha k_0 x}, \qquad v_x' = Be^{\alpha k_0 x}, \qquad v_y' = Ce^{\alpha k_0 x} \qquad (2.15)$$

Для амплитуд A, B, C получается алгебраическая система

$$\begin{gathered} \left[\alpha + \frac{1}{R}\frac{4\beta^2 z\alpha}{3(1-\beta^2)}\right]A + \left[z + \alpha + \frac{1}{R}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\beta^2 z\alpha}{1-\beta^2}\right)\right]B + \frac{1}{R}\frac{(3+\beta^2)\alpha}{3(1-\beta^2)}iC = 0 \\ -\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right)A + \frac{1}{R}\frac{\alpha}{3}B + \left[z + \alpha + \frac{1}{R}\left(\frac{4}{3} + z\alpha\right)\right]iC = 0 \\ \beta^2(z+\alpha)A + \alpha B + iC = 0 \qquad \left(R = \frac{v}{\nu k_0}\right) \end{gathered} \qquad (2.16)$$

Здесь R — число Рейнольдса.

Исключим амплитуду C из первых двух уравнений при помощи третьего; получим

$$\left\{\alpha+\frac{1}{R}\left[\frac{1}{3}\beta^2 z\alpha-\frac{(3+\beta^2)\beta^2}{3(1-\beta^2)}\alpha^2\right]\right\}A+\left[z+\alpha+\frac{1}{R}(1+\alpha z)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R}\frac{3+\beta^2}{3(1-\beta^2)}\alpha(z+\alpha)\right]B=0 \qquad (2.17)$$

$$\left\{1+\beta^2(z+\alpha)^2+R^{-1}\left[\alpha+\beta^2(z+\alpha)\left(\frac{4}{3}+z\alpha\right)\right]\right\}A+\alpha\left[z+\alpha+R^{-1}(1+\alpha z)\right]B=0$$

Имея в виду получить результат лишь с точностью до R^{-1} включительно, коэффициент при B в первом уравнении (2.17) уменьшим на

$$\frac{1}{R^2}\frac{3+\beta^2}{3(1-\beta^2)}\alpha(1+\alpha z)$$

Определитель системы (2.17) после этого распадается на множители, один из которых имеет вид $z+\alpha+R^{-1}(1+\alpha z)$ и для выяснения асимптотики несуществен. Приравняв второй множитель нулю, получим квадратное уравнение

$$a\alpha^2-2b\alpha-c=0 \qquad (2.18)$$

$$a=1-\beta^2+\frac{4}{3R}\frac{\beta^2(1+\beta^2)z}{1-\beta^2},\quad b=\beta^2\left[z-\frac{2}{3R}\frac{\beta^2(z^2+1)}{1-\beta^2}\right],\quad c=1+\beta^2z^2+\frac{4}{3R}\beta^2 z \qquad (2.19)$$

Новую точку ветвления найдем, приравняв нулю дискриминант b^2+ac уравнения (2.18). Из получившегося уравнения с нужной точностью находим, что при $\nu\neq 0$ положение точки ветвления в плоскости z дается формулой

$$z^*=\pm i\mu-\frac{2}{3(1-\beta^2)}\frac{\nu k_0}{v} \qquad (2.20)$$

Присутствие здесь отрицательной поправки приводит к тому, что абсолютная величина возмущений будет затухать в основном по закону

$$F(t)=\exp\left(-\frac{2}{3(1-\beta^2)}k_0^2\nu t\right) \qquad (2.21)$$

Этот результат имеет простой физический смысл.

Из системы (1.8) при нулевых правых частях найдем, что одним из решений будет звуковая волна $\exp(z\tau+ik_0y+ikx)$, где

$$ik=k_0\frac{\beta^2 z-\sqrt{\beta^2z^2+1-\beta^2}}{1-\beta^2} \qquad (2.22)$$

Точке $z=-i\mu$ соответствует волновой вектор $\vec{k}$ с составляющими

$$k_x=-k_0/\mu,\ k_y=k_0 \qquad (2.23)$$

В системе координат, в которой сжатое вещество покоится, частота звука Ω, модуль $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ волнового вектора и скорость звука c связаны соотношением $\Omega=ck$.

При помощи (2.23) находим

$$k^2=\frac{k_0^2}{1-\beta^2}=\frac{\Omega^2}{c^2} \qquad (2.24)$$

Звук с волновым вектором (2.23) распространяется вдоль фронта. В самом деле, скорость звуковой волны относительно фронта равна

$$u=v+ck_x/k \qquad (2.25)$$

Подставляя сюда (2.23) и (2.24), найдем, что $u=0$. Естественно, что затухание волн, направление которых близко к указанному, и определяет асимптотику возмущений на фронте волны. При помощи (2.24) формула (2.21) может быть переписана так:

$$F(t)=\exp\left\{-\frac{2}{3}\nu\frac{\Omega^2}{c^2}t\right\} \qquad (2.26)$$

Сопоставим этот результат с общим законом затухания звука, который при помощи формулы (77,6) из [10] запишем в виде

$$\Phi(t) = \exp\left\{-\frac{\Omega^2}{2c^2}\left[\frac{4}{3}\nu + \frac{\zeta}{\rho} + \chi(\gamma - 1)\right]t\right\} \qquad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{2.27}$$

Здесь ζ — второй коэффициент вязкости, χ — коэффициент температуропроводности, c_p и c_v — теплоемкости. Очевидно, что (2.26) будет частным случаем формулы (2.27) при $\zeta = 0$ и $\chi = 0$. Используя это обстоятельство, можно сразу, без дополнительных вычислений обобщить (2.21) на случай, когда $\zeta \neq 0$ и $\chi \neq 0$

$$\Phi(t) = \exp\left\{-\frac{k_0^2}{2(1-\beta^2)}\left[\frac{4}{3}\nu + \frac{\zeta}{\rho} + \chi(\gamma - 1)\right]t\right\} \tag{2.28}$$

По такому в основном закону (если не учитывать колебаний и слабого степенного затухания) будет происходить уменьшение амплитуды возмущений на фронте ударной волны, когда диссипативные факторы (вязкость и теплопроводность) достаточно малы. Отметим, что полученный результат (формулы (2.21) и (2.28)) не связан с видом граничных условий (2.4).

В заключение благодарю А. Д. Сахарова за ценные советы, А. Г. Олейника и В. Н. Минеева за полезные обсуждения. Автор также благодарит Г. И. Баренблатта, Л. А. Галина и других участников семинара при Институте проблем механики за интересную дискуссию и ценные замечания.

Поступила 5 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн. Журнал экспер. и теор. физики, 1954, т. 27, № 3(9).
2. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
3. Конторович В. М. К вопросу об устойчивости ударных волн. Журнал эксперим. и теор. физики, 1957, т. 33, № 6 (12).
4. Freeman N. C. Theory of Stability of the Plane Shock Waves. Proc. Roy. Soc., A. vol. 228, p. 341, 1955.
5. Зайдель Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
6. Сахаров А. Д., Зайдель Р. М., Минеев В. Н., Олейник А. Г. Экспериментальное исследование устойчивости ударных волн и механических свойств вещества при высоких давлениях и температурах. ДАН СССР, 1964, т. 159, вып. 5.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, 2-е изд., 1958.
8. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. Я. Б. Зельдович, С. Б. Кормер, М. В. Синицын, К. Б. Юшко. Исследование оптических свойств прозрачных веществ при сверхвысоких давлениях. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 6.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, 1953.