15. Немчинов И. В., Светцов В. В., Шувалов В. В. О структуре прогревного слоя перед фронтом сильной интенсивно излучающей ударной волны // ПМТФ.— 1978.— № 5.— С. 86—92.
16. Немчинов И. В., Светцов В. В., Шувалов В. В. О яркости ударных волн в воздухе пониженной плотности // ЖПС.— 1979.— Т. 30, № 6.— С. 1086—1092.
17. Немчинов И. В., Полозова И. А., Светцов В. В., Шувалов В. В. Численный расчет одномерного взрыва с излучением // Динамика излучающего газа.— М.: ВЦ АН СССР, 1980.— Вып. 3.— С. 33—45.
18. Лосев С. А., Пилюгин Н. Н., Суржиков С. Т. Моделирование радиационных процессов в механике сплошной среды.— М.: Изд-во МГУ, 1990.
19. Каськова С. И., Романов Г. С., Степанов К. Л., Станчиц Л. К. Таблицы теплофизических характеристик, состава и радиационных потерь многозарядной плазмы воздуха в состоянии локально-ионизационного равновесия // ЖПС.— 1991.— Т. 54, № 1.— М., 1991.— Деп. в ВИНИТИ, № 5268 — В90.
20. Романов Г. С., Станчиц Л. К., Степанов К. Л. Таблицы среднегрупповых коэффициентов поглощения плазмы углерода.— Деп. в Бел. НИИНТИ, 1984, № 838 — Бе Д84.
21. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.
22. Мороз В. И.. Кержанович В. В., Краснопольский В. А. Инженерная модель атмосферы, Марс-94 (МА-90) // Космич. исслед.— 1991.— Т. 29, вып. 1.— С. 3—84.
23. Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения.— М.: Мир, 1974.
24. Артемьев В. И., Бергельсон В. И., Немчинов И. В. и др. Формирование новых структур газодинамических течений при возмущении плотности в тонких протяженных каналах перед фронтами ударных волн // Математическое моделирование.— 1989.— Т. 1, № 8.— С. 1—11.
25. Немчинов И. В., Светцов В. В. Радиационно-газодинамические процессы в атмосфере при ударе кометы о поверхность Земли // Метеоритика.— 1989.— Вып. 48.— С. 141—149.

г. Москва *Поступила 12/X 1992 г.*

УДК 624.131+532.215+534.22

С. Л. Гаврилюк, В. Ф. Нестеренко

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ «ЗВУКОВОГО ВАКУУМА»

В данной работе методом Уизема доказана модуляционная устойчивость периодического решения для одной модели «звукового вакуума», представляющей собой систему упругих гранул, взаимодействующих по закону Герца. Найдено соотношение между фазовой скоростью волны огибающей и соответствующей скоростью звука.

В [1, 2] в длинноволновом приближении получено нелинейное уравнение, описывающее распространение волн в одномерной цепочке сферических гранул, и найдено (в явном виде) частное точное периодическое решение этого уравнения. Показано, что при определенных условиях существует также качественно новое солитоноподобное решение, являющееся для данной системы несущим тоном («нестоном») вместо звукового возмущения. В [3] аналогичные результаты получены для целого класса подобных существенно нелинейных систем. Характерное свойство таких сред — равенство нулю длинноволновой скорости звука при нулевой начальной деформации. Это и послужило основой введения в [3] понятия «звуковой вакуум» для выделения класса данных систем. Отметим, что «нестоны» были обнаружены и в экспериментах [2], в [4] приведены и другие практически реализуемые примеры «звукового вакуума». В настоящей работе на базе вариационной формулировки соответствующего длинноволнового приближения для системы гранул показана модуляционная устойчивость полученного точного периодического решения: доказано, что соответствующая система уравнений модуляций является гиперболической.

В длинноволновом приближении уравнение, описывающее волны в одномерной цепочке сферических гранул, имеет вид [1, 2]

$$(1)\qquad u_{tt} = c^2 \left\{ \frac{3}{2} (-u_x)^{1/2} u_{xx} + \frac{a^2}{8} (-u_x)^{1/2} u_{xxxx} - \frac{a^2 u_{xx} u_{xxx}}{8 (-u_x)^{1/2}} - \frac{a^2}{64} \frac{u_{xx}^3}{(-u_x)^{3/2}} \right\}.$$

Уравнение (1) может быть записано также в дивергентной форме

$$(2)\qquad u_{tt} = c^2 \left\{ (-u_x)^{3/2} + \frac{a^2}{32} \left[(-u_x)^{-1/2} u_{xx}^2 - 4 (-u_x)^{1/2} u_{xxx} \right] \right\}_x .$$

Здесь $a = 2R$; R — радиус гранул; $c^2 = 2E/(\pi\rho_0 (1 - \nu^2))$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ_0 — плотность материала гранул; $-u_x$ — величина деформации.

Можно непосредственно убедиться, что уравнения (1), (2) являются уравнением Эйлера для вариационного принципа

$$\delta \iint L dt dx = 0,$$

где

$$(3)\qquad L = \frac{u_t^2}{2} - \frac{c^2 (-u_x)^{5/2}}{5/2} - \frac{c^2 a^2}{2} \left\{ \frac{3}{8} (-u_x)^{1/2} u_{xx}^2 - \frac{1}{3} (-u_x)^{3/2} u_{xxx} \right\}.$$

Следуя Уизему [5], будем искать решение уравнений (1), (2) в виде

$$(4)\qquad u = \frac{\Psi(T, X)}{\varepsilon} + \varphi(\theta, T, X) + \ldots$$

Здесь точками обозначены члены более высокого порядка по ε; $T = \varepsilon t$, $X = \varepsilon x$ — медленные переменные; $\theta = \dfrac{\Theta(T, X)}{\varepsilon}$ — фаза; ε — малый параметр, представляющий собой отношение длины периодической волны к длине волны модуляции. Функции Ψ, φ и Θ подлежат определению. Величины $k = \Theta_X$ и $\omega = -\Theta_T$ называются локальным волновым числом и частотой. Подставляя представление (4) в (3), в нулевом приближении получим лагранжиан

$$(5)\qquad L_0 = \frac{(\Psi_T - \omega\varphi_\theta)^2}{2} - \frac{c^2 (-\Psi_X - k\varphi_\theta)^{5/2}}{5/2} - \frac{c^2 a^2}{2} \left\{ \frac{3}{8} (-\Psi_X - k\varphi_\theta)^{1/2} k^4 \varphi_{\theta\theta}^2 - \frac{1}{3} (-\Psi_X - k\varphi_\theta)^{3/2} k^3 \varphi_{\theta\theta\theta} \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$(6)\qquad \xi = -\Psi_X - k\varphi_\theta, \quad V = \frac{\omega}{k}.$$

Тогда (5) примет вид

$$(7)\qquad L_0 = \frac{(\Psi_T + V(\Psi_X + \xi))^2}{2} - \frac{c^2 \xi^{5/2}}{5/2} - \frac{c^2 a^2 k^2}{2} \left\{ \frac{3}{8} \xi^{1/2} \xi_\theta^2 + \frac{1}{3} \xi^{3/2} \xi_{\theta\theta\theta} \right\}.$$

Зависимость ξ от θ определяется варьированием (5) по φ:

$$(8)\qquad \frac{V^2}{c^2} \xi_\theta = \frac{3}{2} \xi^{1/2} \xi_\theta + \frac{a^2 k^2}{8} \left(\xi^{-1/2} (\xi \xi_{\theta\theta})_\theta - \frac{\xi_\theta^3 \xi^{-3/2}}{8} \right).$$

Как показано в [1, 2], уравнение (8) имеет точное частное решение

$$(9)\qquad \xi = \left(\frac{5}{4} \frac{V^2}{c^2} \right)^2 \cos^4 \left(\frac{\sqrt{10}}{5ak} \theta \right),$$

которое обращается в нуль при дискретных значениях θ. Формально уравнение (8) имеет особенность в этих точках. Однако прямой подстановкой можно убедиться, что сингулярность на самом деле отсутствует. Решение (9) и будет исследоваться на устойчивость. Введем оператор осреднения

$$\langle\bullet\rangle = \frac{1}{\tau}\oint\cdot\,d\theta,$$

где интегрирование проводится по периоду; τ — период. Тогда из (6), (7) вытекает

$$\langle\xi\rangle = -\Psi_X,$$

$$\langle L_0\rangle = \frac{\Psi_T^2 - V^2\Psi_X^2 + V^2\langle\xi^2\rangle}{2} - \frac{c^2\langle\xi^{5/2}\rangle}{5/2} - \frac{c^2a^2k^2}{2}\left\{\frac{3}{8}\langle\xi^{1/2}\xi_\theta^2\rangle + \frac{1}{3}\langle\xi^{3/2}\xi_{\theta\theta\theta}\rangle\right\}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\tau}\oint\cos^{2n}\left(\frac{\sqrt{10}}{5ak}\theta\right)d\theta = \frac{1}{\pi}\oint\cos^{2n}w\,dw = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!},$$

то из (9) следует

$$\langle\xi\rangle = \left(\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2}\right)^2\frac{3}{8} = -\Psi_X,$$

$$\langle\xi^2\rangle = \left(\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2}\right)^4\frac{7!!}{2^4\cdot4!},\quad \langle\xi^{5/2}\rangle = \left(\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2}\right)^5\frac{9!!}{2^5\cdot5!},$$

$$\langle\xi^{1/2}\xi_\theta^2\rangle = \left(\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2}\right)^5\frac{32}{5a^2k^2}\langle\cos^8 w - \cos^{10} w\rangle =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2}\right)^5\frac{32}{5a^2k^2}\left(\frac{7!!}{2^4\cdot4!} - \frac{9!!}{2^5\cdot5!}\right),$$

$$\langle\xi^{3/2}\xi_{\theta\theta\theta}\rangle = \left(\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2}\right)^5\left(\frac{\sqrt{10}}{5ak}\right)^3 8\,\langle(3\cos^7 w - 8\cos^9 w)\sin w\rangle = 0.$$

Так как

$$\frac{5}{4}\frac{V^2}{c^2} = \sqrt{-\frac{8}{3}\Psi_X},$$

то

(10) $$\langle L_0\rangle = \frac{\Psi_T^2}{2} - \frac{10\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}c^2(-\Psi_X)^{5/2}.$$

Усредненный на решении (9) лагранжиан $\langle L_0\rangle$ (10) по виду аналогичен первым двум членам лагранжиана L (формула (3)). Отличие лишь в коэффициенте, причем

(11) $$\frac{10\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} > \frac{2}{5}.$$

Таким образом, для Ψ имеем уравнение

(12) $$\Psi_{TT} + \frac{25}{9}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c^2((-\Psi_X)^{3/2})_X = 0,$$

которое равносильно уравнениям одномерной теории упругости, или, что то же самое, уравнениям движения баротропного газа, записанным в массовых лагранжевых координатах.

В системе (12) возможна «градиентная катастрофа», которая преодолевается учетом поправок более высокого порядка по ε. По-видимому, соответствующее уравнение будет аналогично (1). В этом случае можно ожидать появление солитонов огибающих.

В (12) роль местной фазовой скорости волны огибающей с деформацией $-\Psi_X$ играет величина c_1:

(13) $$c_1^2 = \frac{25}{3\sqrt{6}}(-\Psi_X)^{1/2}c^2.$$

Интересно выявить отношение c_1 к другим характерным значениям скоростей в данной системе, например к длинноволновой скорости звука c_0 при той же деформации $-\Psi_X$. Для c_0 имеем выражение [1, 2]

$$c_0^2 = \frac{3}{2}(-\Psi_X)^{1/2}c^2. \quad (14)$$

Из (13), (14) легко заметить, что в силу (11) справедливо соотношение

$$c_1\,[(-\Psi_X)] > c_0\,[(-\Psi_X)].$$

Гиперболичность уравнения (12) означает устойчивость решения (9). Отметим, что соответствующая газодинамическая аналогия найдена и при описании быстроосциллирующих решений уравнений пузырьковой жидкости с несжимаемой несущей фазой при колебаниях, близких к резонансным [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-14880).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нестеренко В. Ф.** Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах // ПМТФ.— 1983.— № 5.
2. **Нестеренко В. Ф.** Импульсное нагружение гетерогенных материалов.— Новосибирск: Наука, 1992.
3. **Nesterenko V. F.** Pulse compression nature in a strongly nonlinear grained medium // Proc. 2nd Intern. Sympos. on Intense Dynam. Loading and its Effects, June 9—12, 1992, Chengdu, China.— Chengdu: Sichuan Univ. Press, 1992.
4. **Нестеренко В. Ф.** Примеры «звукового вакуума» // ФГВ.— 1993.— № 2.
5. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
6. **Гаврилюк С. Л.** Уравнения модуляций для пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой // ПМТФ.— 1989.— № 2.

г. Новосибирск *Поступила 11/XII 1992 г., в окончательном варианте — 22/II 1993 г.*

УДК 534.28:536.46

Б. И. Малинин

ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФОРСУНОЧНОЙ ГОЛОВКИ МОДЕЛЬНОЙ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ ЖРД НА ВОЗБУЖДЕНИЕ В НЕЙ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА

Интерес к работам, связанным с исследованием вибрационного горения в разного рода горелочных устройствах, резко возрос с развитием и совершенствованием ракетной и авиационной техники [1—3]. Повышение теплонапряженности ЖРД происходило путем увеличения диаметра камеры сгорания и уменьшения ее длины. Все это приводило к возникновению в камере сгорания больших по амплитуде поперечных колебаний газа, вызывавших разрушение материальной части [4]. Для каждого вновь создававшегося двигателя требовался большой объем доводочных работ, причем опыт доводки одного двигателя не всегда мог быть использован при разработке другого. Особенно много проблем по обеспечению устойчивости возникло при разработке двигателей, когда хотя бы один из компонентов топлива подавался в камеру сгорания в газообразном состоянии через продольные каналы. В натурных камерах сгорания ЖРД выбор диаметра каналов, как правило, обусловлен схемой смесеобразования и размерами камеры [4]. В первую очередь этот выбор связан с обеспечением высокой полноты сгорания, т. е. с протяженностью зоны горения.

В связи с дороговизной исследований на натурных изделиях возникла необходимость моделирования этого процесса. Преимущество модельных