

ЛИТЕРАТУРА

1. Bauer H. I., Bass H. E. Sound amplification from controlled excitation reactions / Phys. Fluids.— 1973.— V. 16, N 7.
2. Srinivasan I., Vincenti W. G. Criteria for acoustic instability in a gas with ambient vibrational and radiative nonequilibrium // Phys. Fluids.— 1975.— V. 18, N 12.
3. Коган Е. Я., Мальнев В. И. Распространение звука в колебательно-возбужденном газе // ЖТФ.— 1977.— Т. 47, № 3.
4. Осипов А. И., Уваров А. В. Распространение звука в колебательно-неравновесном газе // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия.— 1984.— Т. 25, № 6.
5. Кириллов И. А., Русанов В. Д., Фридман А. А. Формирование ударных волн в потоке колебательно-неравновесного газа // ЖХФ.— 1985.— Т. 4, № 1.
6. Богданов А. Н. Асимптотические законы распространения слабых нелинейных волн в релаксирующем газе при воздействии внешнего излучения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1985.— № 6.
7. Осипов А. И., Уваров А. В. Распространение нелинейных гидродинамических возмущений в колебательно-неравновесном газе // ЖХФ.— 1987.— Т. 6, № 3.
8. Веденов А. А., Дробязко С. В., Книжников В. Н., Турундаевский В. Б. Влияние акустических волн, возникающих в разрядном промежутке, на работу импульсного CO₂-лазера в частотном режиме // ТВТ.— 1975.— Т. 13, вып. 2.
9. Русанов В. Д., Фридман А. А., Шолин Г. В. Физика химически активной плазмы с неравновесным колебательным возбуждением молекул // УФН.— 1981.— Т. 134, вып. 2.
10. Коган Е. Я., Молевич Н. Е. Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе // ЖТФ.— 1986.— Т. 56, вып. 5.
11. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике/Под ред. Г. И. Майкапара.— М.: Машиностроение, 1972.
12. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах // ПММ.— 1958.— Т. 22, вып. 2.
13. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах // ПМТФ.— 1961.— № 2.
14. Куликовский В. А. Асимптотические законы затухания слабых непрерывных и ударных волн в запыленном газе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.
15. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws. II // Commun Pure Appl. Math.— 1957.— V. 10, N 4.
16. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
17. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в стационарных течениях // ПМТФ.— 1961.— № 6.

г. Москва

Поступила 26/I 1989 г.,
в окончательном варианте — 18/IV 1989 г.

УДК 534.232

И. А. Зайцева, А. А. Золотарев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В СЛОЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПЛОСКИМ ИСТОЧНИКОМ

Для исследования процессов возбуждения акустических волн «непрозрачными» источниками, как правило, используются модели поршня в экране (например, [1—3]). Это существенно упрощает математические проблемы, но на основе этих моделей представляется затруднительным описание эффектов, связанных с переотражениями волн в слоистых волноводах.

Настоящая работа посвящена развитию методики факторизации в приложении к решению начально-краевых задач для сжимаемой жидкости с заглубленным плоским «непрозрачным» источником. В отличие от [4, 5] исследуется пространственно-временная структура волновых полей в слое на основе численно-аналитического подхода. Выводится асимптотическое представление решения для нестационарных режимов излучения волн, изучается процесс установления гармонических колебаний.

Рассматривается задача о возбуждении волновых полей в слое сжимаемой жидкости плоским источником с заданным нестационарным законом колебаний

$$(1) \quad \nabla^2 \varphi_{\pm} = \partial^2 \varphi_{\pm} / \partial t^2, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R_2),$$

$$p_{\pm} = -\partial \varphi_{\pm} / \partial t, \quad w_{\pm} = \partial \varphi_{\pm} / \partial z, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial z^2;$$

$$(2) \quad z = 1 \quad \partial \varphi_{+} / \partial t = 0,$$

© 1990 Зайцева И. А., Золотарев А. А.

3*

35

$$z = 0 \quad w_+ - w_- = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega, \\ \Delta w, & x \in \Omega, \end{cases} \quad p_+ - p_- = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega, \\ \Delta p, & x \in \Omega, \end{cases}$$

$$z = -H \quad \partial \varphi_- / \partial z = 0;$$

$$(3) \quad t = 0 \quad \varphi_{\pm} = 0, \quad \partial \varphi_{\pm} / \partial t = 0.$$

Здесь (x_1, x_2, z) — прямоугольная декартова система координат; область Ω , занимаемая источником, принадлежит координатной плоскости $X_1 O X_2$; ρ, C — плотность и скорость звука в слое; h_+ — заглубление источника; φ_{\pm} — потенциал скоростей в слое выше (+) и ниже (–) плоскости источника; w_{\pm}, p_{\pm} — вертикальные составляющие скорости и акустические давления в указанных областях. Считается, что выполнено естественное физическое условие убывания решения на бесконечности при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$.

На поверхности излучателя заданным является скачок скоростей Δw , определяемый через известные при $x \in \Omega$ функции скоростей w_{\pm} . Скачок давления Δp , а также функции давлений p_{\pm} при $x \in \Omega$ не известны.

Безразмерные величины в (1)–(3) сведены с исходными размерными, обозначенными индексом *, следующими соотношениями:

$$\{x_1, x_2, z\} = \{x_1^*, x_2^*, z^*\} / h_+, \quad t = t^* (C/h_+),$$

$$p_{\pm} = p_{\pm}^* / (\rho C^2), \quad w_{\pm} = w_{\pm}^* / C, \quad \varphi_{\pm} = \varphi_{\pm}^* / (h_+ C).$$

Интегральное уравнение исходной задачи (1)–(3) строится методом интегральных преобразований Фурье по координатам x_1, x_2 и Лапласа по времени t с использованием суперпозиции решений более простых задач для верхнего и нижнего слоев при условиях стыковки (2) на границе раздела ($z = 0$). Имеем

$$(4) \quad \int_{\Omega} k_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}, s) \Delta p(\boldsymbol{\alpha}, s) d\boldsymbol{\alpha} = f(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \operatorname{Re} s > s_1 \geq 0,$$

$$f(\mathbf{x}, s) = w(\mathbf{x}, s) + \int_{\Omega} k_1(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}, s) \Delta w(\boldsymbol{\alpha}, s) d\boldsymbol{\alpha},$$

$$k_m(\mathbf{x}, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} K_m(\boldsymbol{\alpha}, s) e^{-i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}} d\boldsymbol{\alpha}, \quad m = 0, 1;$$

$$(5) \quad K_0(\boldsymbol{\alpha}, s) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma H \operatorname{ch} \gamma}{s \operatorname{ch} \gamma (H + 1)}, \quad K_1(\boldsymbol{\alpha}, s) = \frac{\operatorname{sh} \gamma H \operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch} \gamma (H + 1)},$$

$$w(\mathbf{x}, t) = w_-(\mathbf{x}, t), \quad \gamma^2 = \alpha^2 + s^2, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha = |\boldsymbol{\alpha}|$$

(s_1 — абсцисса сходимости преобразования Лапласа, α — модуль волнового вектора). Дальнейшее решение интегрального уравнения выполним методом факторизации. Функциональное уравнение, эквивалентное (4), имеет вид

$$(6) \quad K_0(\boldsymbol{\alpha}, s) \Delta P(\boldsymbol{\alpha}, s) = F(\boldsymbol{\alpha}, s) + \Psi(\boldsymbol{\alpha}, s),$$

$$\boldsymbol{\alpha} \in D, \quad \operatorname{Re} s > s_1 \geq 0, \quad F(\boldsymbol{\alpha}, s) = W(\boldsymbol{\alpha}, s) + K_1(\boldsymbol{\alpha}, s) \Delta W(\boldsymbol{\alpha}, s).$$

Здесь $\bar{\Psi}(\boldsymbol{\alpha}, s)$ — образ продолжения известной функции $f(\mathbf{x}, s)$ в $R_2 \setminus \Omega$; D — общая площадь регулярности функций, входящих в (6).

Для решения уравнения (6) исследуем свойства функции Грина K_0 . Это однозначная аналитическая имеющая в качестве особенностей лишь счетное множество нулей $\alpha = \alpha_{nk}(s)$ и полюсов $\alpha = \eta_n(s)$ функция.

Для выделения однозначной зависимости дисперсионных соотношений представим их в виде

$$(7) \quad \alpha_{nk}^{\pm} = \pm i \sqrt{s^2 + b_{nk}^2}, \quad b_{n1} = \pi(n-1)/H, \quad b_{n2} = 0,5\pi(2n-1),$$

$$\eta_n^{\pm} = \pm i \sqrt{s^2 + a_n^2}, \quad a_n = 0,5\pi(2n-1)/(H+1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где в качестве ветви корня принимается его главное значение, что отвечает нечетной зависимости действительных значений α_{nk} , η_n при $s = -i\omega$ ($\text{Im } \omega = 0$) от параметра ω [6].

Особенности $K_1(\alpha, s)$ можно получить из особенностей $K_0(\alpha, s)$ заменой множества нулей $\alpha = \alpha_{n2}^\pm(s)$ на $\alpha = \alpha_{n3}^\pm(s)$ при $b_{n3} = \pi(n-1)$.

Выбранный закон дисперсии (7) обеспечивает фиксацию α_{nk}^\pm , η_n^\pm в верхней (+) или нижней (-) полуплоскостях комплексной плоскости α , если $\text{Re } s > 0$.

Таким образом, при соответствующем выборе возмущающих факторов w и Δw уравнение (6) определено в полосе D , не имеющей указанных особенностей и содержащей всю действительную ось. Решение уравнения (6) может быть выполнено методом факторизации функций [7, 8].

Известно, что единственность решения исходной задачи обеспечивается наложением условий на контуре излучателя, вытекающих из требования ограниченности энергии. В плоском случае это требование сводится к тому, что особенность решения на линии смены граничных условий ($\chi = 0$) не превосходит порядка $|\chi|^{-0,5}$ при $|\chi| \rightarrow 0$.

Дальнейшее исследование проведем на примере симметричных полосовых излучателей ($\Delta w = 0$, $x \in R_1$).

Метод факторизации позволяет построить функции $\Delta P(\alpha, s)$, $\Psi(\alpha, s)$, а следовательно, получить интегральные представления волновых полей во всей среде. Например, для давлений выводим

$$(8) \quad p(x, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} K_0 M \Delta P \exp(-i\alpha x + st) d\alpha,$$

$$s_0 > s_1 \geq 0, \quad M(\alpha, z, s) = \begin{cases} \frac{s}{\gamma} \frac{\text{sh } \gamma(1-z)}{\text{ch } \gamma}, & z \in [0, 1], \\ -\frac{s}{\gamma} \frac{\text{ch } \gamma(H+z)}{\text{sh } \gamma H}, & z \in [-H, 0) \end{cases}$$

($\Delta P(\alpha, s)$ зависит от геометрии области Ω).

1. Для полубесконечного излучателя ($\Omega: x \in [0, +\infty)$) решение (6) имеет вид

$$\Delta P = \frac{1}{K^+} \left\{ \frac{F}{K^-} \right\}^+, \quad \Psi = -K^- \left\{ \frac{F}{K^-} \right\}^-.$$

Здесь использованы следующие представления факторизованных функций:

$$K^\pm(\alpha, s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha - \alpha_n^\mp(s)}{\alpha - \eta_n^\mp(s)}, \quad K_0 = K^+ K^-;$$

$$\left\{ \frac{F}{K^-} \right\}^\pm = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm} \frac{F(\xi) d\xi}{K^-(\xi)(\xi - \alpha)}, \quad \text{Im } \alpha \geq \text{Im } \xi$$

(Γ_\pm — бесконечные контуры в области D , параллельные действительной оси α).

2. Для полосового излучателя конечной ширины ($\Omega: |x| \leq a$) воспользуемся представлением $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ (Ψ_1 соответствует продолжению правой части уравнения (4) для $x > a$, Ψ_2 — для $x < -a$).

Общее представление решения (8) исследуем для импульсного излучателя с гармоническим по времени заполнением сигнала

$$(9) \quad w(x, t) = b(t)d(x), \quad |x| \leq a, \quad t > 0,$$

$$b(t) = t^N \exp(-\kappa t), \quad \kappa = \kappa_0 + i\kappa_1, \quad \kappa_0, \kappa_1 \geq 0, \quad N \geq 0.$$

Подставим в (8) образ функций источника

$$(10) \quad F(\alpha, s) = B(s)D(\alpha), \quad B(s) = N!/(s + \kappa)^{N+1}$$

и вычислим внешний интеграл, замыкая контуры в левую полуплоскость $\text{Re } s < 0$. Получим

$$(11) \quad p(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ Q + \sum_{k=1,2} g_k \right\},$$

$$Q = \int_{\Gamma_{1,2}} \text{Re } s \{ K_0 M \Delta P \exp(st), -\kappa \} \exp(-i\alpha x) d\alpha,$$

$$Q \sim O(\exp(-\kappa_0 t)), \quad \kappa_0 > 0, \quad N > 0, \quad g_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n G_n^{1,2} + O(t^{-1,5}),$$

$$M_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin[a_n(1-z)]}{a_n \cos a_n}, & z \in [0, 1], \\ \frac{\cos[a_n(H+z)]}{a_n \sin[a_n H]}, & z \in [1-H, 0]; \end{cases}$$

$$(12) \quad G_n^{1,2}(x, t) = - \int_{\Gamma_{1,2}} H_n^{1,2}(\alpha) \exp(\pm i\chi \varphi_n(\alpha, \beta)) d\alpha,$$

$$\beta = i/\chi, \quad \chi = |x| - a, \quad t \gg 1, \quad \varphi_n(\alpha, \beta) = \mu_n^-(\alpha) \beta - \alpha,$$

$$\mu_n^-(\alpha) = -i\sigma_n^-(\alpha),$$

$$H_n^{1,2}(\alpha) = \frac{\sigma_n^{\mp} B(\sigma_n^{\mp})}{(\partial \eta_n^{\mp} / \partial s)|_{s=\sigma_n^{\mp}}} R_n^{1,2}(\alpha),$$

$$R_n^{1,2}(\alpha) = \frac{1}{[K_+^{-1}(\pm \alpha, \sigma_n^+(\alpha))]' } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Psi_{2,1}^0(\alpha_m^{\mp}) + D(\alpha_m^{\mp})) \exp(i\alpha \alpha_m^{\pm})}{[K^+(\alpha_m^-, \sigma_n^-)]' (\alpha_m^{\pm} \pm \alpha)},$$

где коэффициенты $\Psi_1^0(\alpha_m^+)$, $\Psi_2^0(\alpha_m^-)$ в предположении, что образ функций возмущений $D(\alpha)$ не имеет полюсов в верхней и нижней полуплоскости комплексного параметра α , определяются из систем

$$(13) \quad A \Psi_j^0 = B_j, \quad j = 1, 2, \quad \Psi_1^0 = \{\Psi_1^0(\alpha_k^+)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \Psi_2^0 = \{\Psi_2^0(\alpha_k^-)\}_{k=1}^{\infty},$$

$$A_{kl} = \delta_{kl} - \exp(ia(\alpha_k^+ + \alpha_l^+)) \frac{K^+(\alpha_k^+)'}{[K^+(\alpha_l^+)]'} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^+(\alpha_m^+) \exp(i\alpha \alpha_m^+)}{[K^+(\alpha_m^-)]' (\alpha_m^+ + \alpha_k^+) (\alpha_m^+ + \alpha_l^+)},$$

$$B_{jk} = - \exp(ia\alpha_k^+) K^+(\alpha_k^+) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{jm} \exp(i\alpha \alpha_m^+)}{[K^+(\alpha_m^-)]' (\alpha_m^+ + \alpha_k^+)},$$

$$Q_{jm} = D(\alpha_m^{\mp}) - K^+(\alpha_m^+) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(\alpha_n^{\pm}) \exp(i\alpha \alpha_n^{\pm})}{[K^+(\alpha_n^-)]' (\alpha_n^{\pm} + \alpha_m^+)}, \quad j = 1, 2.$$

В формулах (12), (13) выбирается верхний либо нижний знак соответственно индексам 1 и 2; $s = \sigma_n^{\pm}(\alpha)$ — функции, обратные $\alpha = \eta_n^{\pm}(s)$; δ_{kl} — символ Кронекера. Здесь подынтегральные функции для гармонического источника ($\kappa_0 = 0$) могут иметь особенности на действительной оси $\alpha = \eta_n^-(-i\kappa_1)$ (для G_n^1) и $\alpha = \eta_n^+(-i\kappa_1)$ (для G_n^2), которые обходятся контурами $\Gamma_{1,2}$ по малым полуокружностям в верхнюю либо нижнюю полуплоскость α . Вне окрестности указанных полюсов $\Gamma_{1,2}$ совпадают с действительной осью.

3. В случае импульсного источника ($\kappa_0 > 0$) полюса отсутствуют и интегрирование в $G_n^{1,2}$ ведется по действительной оси. Выполним асимптотическое исследование интегралов в (12) при $\chi \rightarrow \infty$, $\beta \leq \text{const}$. Для этого используем метод стационарной фазы, учитывая, что фазовая функция $\varphi_n(\alpha, \beta)$ имеет при $\beta > 1$ две действительные стационарные точки

$$\alpha_{ст}^{\pm} = \pm a_n / \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Получим, что в области дисперсного взаимодействия волн акустические давления описываются формулами

$$(14) \quad p_{1,2}(x, z, t) = - \frac{\beta(\beta^2 - 1)^{(2N-3)/4}}{\sqrt{2\pi\chi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{3/2} M_n(z) \times \\ \times \left\{ \frac{R_n^{1,2}(\alpha_{ct}^{\pm}) \exp(i a_n \chi \sqrt{\beta^2 - 1} + i\pi/4)}{(i a_n \beta + \kappa \sqrt{\beta^2 - 1})^{N+1}} - \right. \\ \left. - \frac{R_n^{1,2}(\alpha_{ct}^{\mp}) \exp(-i a_n \chi \sqrt{\beta^2 - 1} - i\pi/4)}{(-i a_n \beta + \kappa \sqrt{\beta^2 - 1})^{N+1}} \right\} + O(\chi^{-\theta}),$$

$$\chi \rightarrow \infty, 0 < \chi < t (1 < \beta = \text{const}), \kappa_0 > 0, \kappa_1 \geq 0, 0,75 \leq \theta \leq 1,5$$

(индекс функции 1 отвечает волне, распространяющейся вправо от источника ($x > a$), индекс 2 — влево ($x < -a$)). Из (14) следует, что амплитуда основных возмущений затухает по времени как $t^{-0,5}$ при $t \rightarrow \infty$ и убывает с расстоянием как $\chi^{-0,5}$ при $\chi \rightarrow \infty$.

Предельное значение $\beta = t/\chi \rightarrow 1$ ($|\alpha_{ct}^{\pm}| \rightarrow \infty$) соответствует переднему фронту волнового пакета. Здесь решение (за исключением случая образования ударных волн) ведет себя как $|t - \chi|^{N-1}$ ($N > 1$), что можно вывести из интегралов (12), заменяя подынтегральные функции их асимптотическим представлением при $\alpha \rightarrow \pm\infty$.

4. В случае гармонического закона колебаний излучателя с постоянной по времени амплитудой, включающегося из состояния покоя, в решении (9)–(13) необходимо положить $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 > 0$, $N = 0$. Слагаемое Q в (11) находится по вычетам и определяет установившуюся часть решения. В области $\chi < C_n t$ ($C_n^{-1} = \partial \eta_n^- / \partial \kappa_1$) подынтегральные функции в (12) экспоненциально убывают при $\chi \rightarrow \infty$ на участках $\Gamma_{1,2}$, не совпадающих с действительной осью. Соответствующие части интегралов $G_n^{1,2}$ имеют степенную оценку $O(\chi^{-1})$ при $\chi \rightarrow \infty$. Оставшиеся участки контуров $\Gamma_{1,2}$, лежащие на действительной оси, представляют собой асимптотический вклад $G_n^{1,2}$, вычисленный аналогично п. 3.

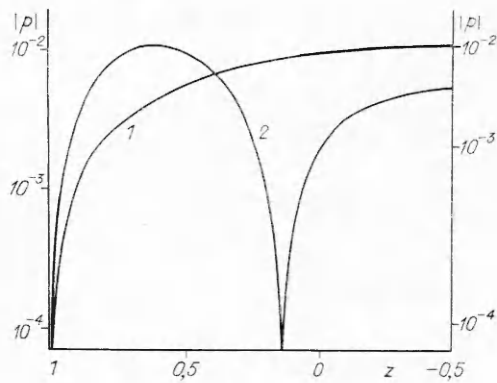
В области $\chi > C_n t$ деформируем участки $\Gamma_{1,2}$ вблизи соответствующих полюсов зеркально относительно действительной оси и проводим на новых контурах аналогичные асимптотические оценки. Получаем

$$(15) \quad p_{1,2}(x, z, t) = Q_{1,2}^0(x, z, t) + g_{1,2}^0(x, z, t), \quad x \geq \pm a;$$

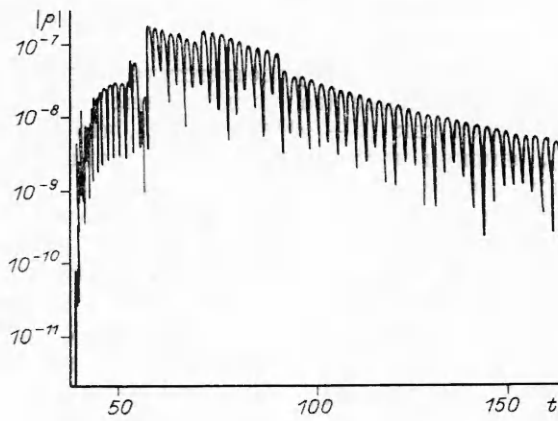
$$(16) \quad Q_{1,2}^0(x, z, t) = \exp(-i\kappa_1 t) \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{1,2}(-i\kappa_1) \times \\ \times \exp(i\chi \eta_n^{\pm}(-i\kappa_1)) H(C_n t - \chi), \quad S_n^{1,2}(-i\kappa_1) = \kappa_1 M_n(z) R_n^{1,2}(\eta_n^{\mp}(-i\kappa_1)), \\ H(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi > 0, \\ 0, & \chi \leq 0, \end{cases} \quad C_n = \left\{ \frac{\partial \eta_n^-(-i\kappa_1)}{\partial \kappa_1} \right\}^{-1}, \\ L = [0,5(1 + 2\kappa_1(H + 1)/\pi)], \quad \chi = |x| - a, \quad \chi \rightarrow \infty.$$

В приведенном решении $Q_{1,2}^0$ — установившиеся незатухающие волновые вклады, накладывающиеся на неустановившуюся затухающую часть решения $g_{1,2}^0$ (отклик среды), совпадающую с $p_{1,2}$ формул (14), если в последних положить $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 > 0$, $N = 0$. Здесь L — количество мод с действительным волновым числом $\eta_n(-i\kappa_1)$, $n = \overline{1, L}$, генерируемых гармоническим источником на фиксированной частоте κ_1 .

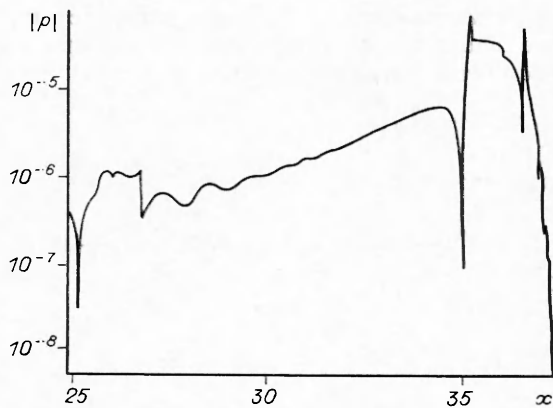
В (16) каждое из слагаемых суммы является вкладом отвечающей ему моды в сформировавшийся волновой пакет. Видно, что скорость распространения переднего фронта волны соответствующей моды совпадает с ее групповой скоростью. С увеличением номера моды ее скорость монотонно убывает на фиксированной частоте, т. е. $C_n > C_{n+1}$ для всех $n = \overline{1, L-1}$. Последнее вытекает из (7).



Р и с. 1



Р и с. 2.



Р и с. 3

На рис. 1 изображены характерные распределения по глубине амплитуды давлений в области дисперсного взаимодействия волн в момент времени $t = 37,3333$ и $\beta = t/\chi = 1,012; 1,501$ (кривые 1 и 2) для излучателя без гармонического заполнения ($\kappa_1 = 0$) с параметрами нарастания $N = 5$ и спада $\kappa_0 = 6,4286$ сигнала по времени. Первой линии отвечает левая сетка, второй — правая. Структура распределений существенно зависит от числа мод, определяющих решение.

Характер распределения амплитуды давления по времени (начиная с момента прихода переднего фронта) для указанного волновода в точке

Очевидно, что рассмотренная в п. 4 гармоническая задача обладает резонансами решения, что следует из представления для волнового поля (16) при $|x| > a$, n -я амплитудная функция разложения по модам которого обращается в бесконечность при фиксированной резонансной частоте $\kappa_n^* = a_n$, $n = 1, 2, \dots$. Эти резонансы в области вне источника совпадают с резонансами задачи для слоя жидкости с точечным заглубленным источником возмущений. В рассмотренной задаче наличие «непрозрачного» полосового источника конечной ширины изменяет значения резонансов в области $|x| < a$ над источником ($z \in (0, 1)$) и под ним ($z \in [-H, 0)$). Из общего представления поля давлений (11) выводим, что в первом случае критическими являются значения $\kappa_n^* = b_{n2}$, во втором — $\kappa_n^* = b_{n1}$. В [8] показано, что амплитудная функция на резонансах слоя в плоской задаче растет как $t^{0,5}$ при $t \rightarrow \infty$ в отличие от логарифмического закона роста на критических значениях в осесимметричной задаче [9].

Ниже приводятся численные результаты, полученные по (14)–(16) для импульсного источника вида (9) ($d = \exp(i\eta x)$, $\eta = 117,8097$) с линейным размером $a = 0,0133$ и толщиной волновода $(1 + H)$, $H = 0,3333$. Здесь использовалась приближенная факторизация функции Грина $K_0(\alpha, s)$ в классе дробно-рациональных функций [8].

с координатами $\chi = 37,3333$, $z = 0,1111$ виден на рис. 2. Кривые соответствуют источнику с параметрами $\kappa_0 = 0,9643$, $\kappa_1 = 0$, $N = 10$.

Рис. 3 иллюстрирует зависимость амплитуды давлений от горизонтальной координаты x при $z = 0,1111$ в момент времени $t = 37,3333$ для импульсного источника с заполнением $\kappa_0 = 2,3559$, $\kappa_1 = 3,2143$, $N = 5$.

Численный эксперимент показывает, что область вблизи переднего фронта волнового пакета определяется ограниченным количеством наиболее быстрых первых мод с учетом их переотражений. В дальнейшей его структуре участвует увеличивающееся количество мод, влияние же их переотражений спадает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука.— Л.: Судостроение, 1989.
2. Бергтай Х. О., Мустафа А. Х. А. Прохождение узкого звукового пучка через границу между двумя жидкостями // Акустика дна океана.— М.: Мир, 1984.
3. Skudrzyk E. The foundation of acoustics.— Wien; N. Y.: Springer, 1971.
4. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости.— М.: Наука, 1986.
5. Габов С. А. О решении одной задачи динамики стратифицированной жидкости и его стабилизации при $t \rightarrow \infty$ // ЖВММФ.— 1985.— Т. 25, № 5.
6. Золотарев А. А., Золотарева Л. И. Метод факторизации в неустановившихся задачах о возбуждении гравитационно-упругих волн в жидкости с частично свободной границей // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 6.
7. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа.— М.: ИЛ, 1962.
8. Воронич И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
9. Werner P. Ein Resonanzphänomen in der Theorie akustischer und electromagnetischer Wellen // Math. Meth. Appl. Sci.— 1984.— V. 6.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 10/X 1988 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 1989 г.

УДК 532.526

В. А. Батищев

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ЭФФЕКТА НА ФОРМУ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

1. При малых коэффициентах вязкости $\nu \rightarrow 0$ и температуропроводности $\chi \rightarrow 0$ рассматривается нелинейная стационарная задача о течении вязкой теплопроводной жидкости в неограниченной области D под действием термокапиллярных сил, вызванных неравномерным нагревом свободной границы Γ :

$$(1.1) \quad (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

$$(1.2) \quad p = 2\nu\rho\Pi\mathbf{n} + \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad (x, y, z) \in \Gamma,$$

$$2\nu\rho\Pi\mathbf{n} - 2\nu\rho(\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n} = \nabla_1\sigma; \quad \mathbf{v}\mathbf{n} = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma,$$

$$\kappa\partial T/\partial n = q, \quad (x, y, z) \in \Gamma_1; \quad T = T_\Gamma, \quad (x, y, z) \in \Gamma_2,$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \partial T/\partial n = 0, \quad (x, y, z) \in L.$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости; T — температура; $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ — орт оси z , g — ускорение силы тяжести); \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к свободной границе Γ ; Π — тензор скоростей деформации; k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ ; $p_* = \text{const}$ — давление на Γ ; $\nabla_1 = \nabla - (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}$ — градиент вдоль Γ ; σ — коэффициент поверхностного натяжения, считается линейной функцией температуры $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_*)$ (σ_0, σ_T, T_* — известные константы