

УДК 539.374

ФРАГМЕНТАЦИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ: ОДИН МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

И. Э. Келлер, П. В. Трусов

Пермский государственный технический университет, 614600 Пермь

Изучено образование фрагментированной структуры разориентаций решетки при больших пластических деформациях металлических кристаллов. Среда моделируется геометрически нелинейным упругопластическим континуумом Коссера. Точки континуума отождествляются с дислокационными ячейками с вмороженной в них кристаллической решеткой.

Описание явления фрагментации. В данной работе изучается механизм возникновения фрагментированной структуры разориентаций решетки в пластически деформируемых металлах. В экспериментах [1, 2] образцы подвергались квазистатическому “одноосному” растяжению или сжатию (прокатке). В качестве материала использовались металлические поликристаллы с обычным размером зерна (десятки микрометров) с ГЦК-решеткой и достаточно высокой энергией дефекта упаковки. При больших пластических деформациях и напряжениях наблюдалось дробление зерен поликристалла на объемы с последующим разворотом кристаллической решетки. Этот процесс происходил при стабилизированной дислокационной ячеистой структуре, поэтому в [2] данные фрагменты названы блоками ячеек (рис. 1). Аналогичная картина приведена на рис. 12 в работе [1]. Размер дислокационных ячеек составлял порядка десятых долей микрометра, фрагментов — порядка микрометров, поэтому этот процесс можно рассматривать как образование крупномасштабных блоков-фрагментов в среде, состоящей из гранул-ячеек. Величина практически случайных разворотов решетки ячеек составляла десятые доли градуса, в то время как величина разворотов решетки фрагментов достигала порядков градусов и десятков градусов.

Следует отметить, что данное явление аналогично возникновению пространственно-периодических вихревых структур при больших деформациях песка, пропитанного вязкой жидкостью (см. рис. 7.19 в [3]).

Механизм фрагментации. Ниже дается объяснение изучаемого явления, основанное на следующих предположениях. 1. Среда в текущей напряженной конфигурации представляет собой плотный агрегат, состоящий из абсолютно жестких частиц, способных к малым трансляционным и вращательным движениям. Прототипом этих частиц являются дислокационные ячейки, а предположение об их жесткости в текущий момент означает, что кристаллическая решетка в них вморожена. В гладком приближении такая среда представляет собой континуум Коссера. Для описания образования периодических вихревых структур важно, что в модели такого континуума естественным образом учитываются вращения и содержится характерный размер. 2. Структурный переход в напряженной

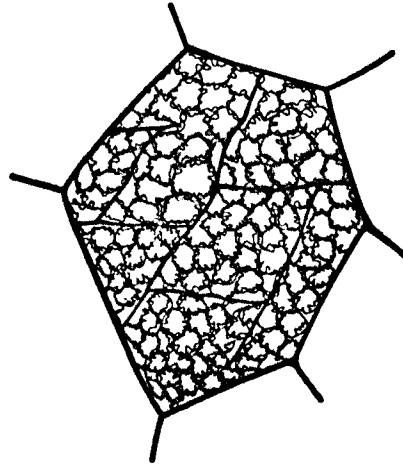


Рис. 1

среде связан с потерей устойчивости локального аффинного формоизменения среды. В критический момент среда теряет способность сопротивляться нагрузке аффинным деформированием и активизируются неаффинные моды деформации, приводящие к появлению пространственно-модулированной структуры изгибов-кручений решетки. В частности, может сформироваться ячеистая структура с чередующимися направлениями спинов, что приводит к образованию фрагментов разориентаций решетки.

Предполагается, что данный механизм действует в некотором объеме напряженной среды с размерами много больше характерного размера фрагментов и практически однородными свойствами и полями. При других условиях на более ранних стадиях нагружения возможны иные механизмы фрагментации.

Изложенное выше объясняет механическую (внешнюю) сторону явления. Физическая (внутренняя) сторона происходящего на языке эволюции дислокационной и наддислокационной систем должна подстраиваться под данный механизм.

Изучению структурных переходов-бифуркаций в открытых нелинейных диссипативных системах посвящено большое количество работ. В классических трудах Я. Д. Вандер-Ваальса, В. Л. Гинзбурга, Л. Д. Ландау раскрыта принципиальная роль градиента переменной состояния вблизи критической точки. Именно градиентный терм противостоит силам, возникающим непосредственно за точкой локального максимума существенно нелинейной зависимости обобщенной силы от обобщенного перемещения, и обеспечивает поглощение выделяющейся свободной энергии за счет образования структур. Исследованию концептуально сходных моделей образования структур в пластически деформируемых металлах посвящена работа [4], в [5] изучается существенно нелокальная модель со счетным числом критических точек, обусловленных периодическим потенциалом атомной решетки кристалла.

В континууме Коссера содержится градиентный терм. Выясним механизм неустойчивости. Экспериментально наблюдаемая стабилизация ячеистой структуры перед фрагментацией свидетельствует об уменьшении модулей упрочнения, так как напряжение течения немелкозернистых металлических поликристаллов однозначно определяется средним размером дислокационных ячеек из экспериментального соотношения Печа — Холла. При достаточно малых величинах модулей упрочнения и достаточно больших нагрузках неустойчивость может быть вызвана локальными изменениями геометрии [6], что подтверждается экспериментальными исследованиями металлов [7]. При этом максимум достигается на кривой зависимости номинальных напряжений от деформаций. Именно уменьшение номи-

нальных (а не истинных) напряжений за точкой максимума следует считать критическим событием для упругопластических задач в геометрически нелинейной постановке [8, 9]. Кроме того, данный тип нелинейности не предполагает каких-либо перескоков и позволяет ограничиться изучением линеаризованных уравнений равновесия вблизи единственной точки максимума.

Уравнения модели. В предположении, что среда в текущей напряженной конфигурации K имеет однородно распределенные свойства и однородные поля ориентаций решетки и перемещений частиц, находящиеся в равновесии под действием приложенного напряжения, записываются линеаризованные уравнения динамики для возмущений этих полей вблизи K . Тривиальные решения таких уравнений соответствуют “основному”, невозмущенному состоянию тела, однако нас интересуют нетривиальные, “отклоненные” решения и условие их появления. Для изучения устойчивости упругопластических систем обычно используют бифуркационный или энергетический подход. Однако частный случай формулируемой ниже модели соответствует циркуляционным системам, единственным надежным подходом к анализу которых является динамический [10], чем и оправдывается его использование здесь.

Ограничимся двумерным случаем. В текущей конфигурации K определяется декартова ортогональная система материальных координат с ортобазисом e_α (здесь и далее греческие индексы изменяются по модулю 2, латинские — по модулю 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование). В этой системе координат записываются линеаризованные уравнения динамики и состояния. Такой подход, называемый текущим лагранжевым, использовался в [6–9]. Как и в этих работах, инкрементально-линейные уравнения записываются в скоростях возмущений.

Уравнения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\sigma} - \nabla v^T \circ \nabla \sigma &= \rho \ddot{v}, \\ \nabla \cdot \dot{\mu} - \nabla v^T \circ \nabla \mu + \mathcal{E} \circ \dot{\sigma} &= J \ddot{\omega} \end{aligned} \quad (1)$$

получаются материальным дифференцированием уравнений динамики континуума Коссе-ра [11] с учетом искажения конфигурации, вызванного мгновенным движением материала: $\nabla = -(\nabla v) \cdot \nabla$. В (1) σ , μ — тензоры напряжений и моментов-пар; $\nabla \equiv e_\alpha \partial_\alpha$; v — вектор скорости трансляции частицы; $\omega = \omega e_3$ — вектор угловой скорости частицы, представимый также через антисимметричный тензор спина $\Omega \equiv -\mathcal{E} \cdot \omega$; ρ , J — плотности массы и момента инерции частицы; \mathcal{E} — тензор Леви-Чивиты; знак “ \circ ” обозначает операцию свертки тензоров второго ранга $A \circ B \equiv A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$ в базисе $e_\alpha e_\beta$.

Определим структуру инкрементально-линейных уравнений состояния для упругопластического зернистого материала. В дальнейшем рассматриваются равноактивные бифуркации, поэтому используются уравнения состояния только для ветви активного нагружения [8, 9, 12]. Металл предполагается несжимаемым.

Рассмотрим три попарно контактирующие жесткие частицы A , B и C с единичными векторами нормалей n_k и касательных b_k в точках контакта $k = 1, 2, 3$. Диады $n_k b_k \equiv M_k$ (по k не суммировать), $\text{tr} M_k = 0$ образуют базис в пространстве несимметричных девиаторов над плоскостью. Относительная скорость k -й пары частиц (например, A и B) в точке их контакта $v_k = v_A + \Omega_A \cdot (x_k - x_A) - v_B - \Omega_B \cdot (x_k - x_B)$, где v_A , v_B — скорости трансляции частиц; Ω_A , Ω_B — их спины; x_A , x_B — радиус-векторы центров масс частиц; x_k — радиус-вектор точки контакта. Группируя слагаемые и пренебрегая разностью $\Omega_A - \Omega_B$ по сравнению со средним спином Ω , приближенно получим $v_k = v_A - v_B - \Omega \cdot (x_A - x_B)$. Однозначно определяется линейный оператор $L \equiv v \nabla$ для тройки частиц: $v_A - v_B = L \cdot (x_A - x_B)$, $v_B - v_C = L \cdot (x_B - x_C)$, $v_C - v_A = L \cdot (x_C - x_A)$, с использованием которого результат запишется в виде $v_k = (L - \Omega) \cdot (x_A - x_B)$. Отсюда,

приближенно считая вектор $\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$ направленным вдоль \mathbf{n}_k , получим выражение для мгновенного сдвига вдоль \mathbf{b}_k за счет проскальзывания частиц в точке их контакта

$$\dot{\gamma}_k = (\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\Omega}) \circ \mathbf{M}_k. \quad (2)$$

Девиатор $\boldsymbol{\sigma}'$ тензора напряжений для тройки частиц определяется как

$$\boldsymbol{\sigma}' = \tau_k \mathbf{M}_k, \quad (3)$$

где τ_k — сдвиговое напряжение вдоль направления \mathbf{b}_k на площадке с нормалью \mathbf{n}_k .

Принимается закон контактного взаимодействия

$$\dot{\tau}_k = \alpha \dot{\gamma}_k, \quad (4)$$

где α — касательный модуль.

Для замыкания системы (2)–(4) следует определить мгновенную скорость поворота диад \mathbf{M}_k , зависящую, главным образом, от локальной кривизны частиц в точке их касания. Выделим два предельных случая. Для одинаковых круглых частиц поворот касательной и нормали в точке контакта определяется только вихрем поля скоростей их трансляции:

$$\dot{\mathbf{M}}_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2, \quad (5)$$

а для одинаковых частиц в форме параллелограмма — только средней скоростью их вращения:

$$\dot{\mathbf{M}}_k = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (6)$$

Подставляя (2), (4)–(6) в (3), получим соотношение

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\nabla} = \alpha \mathbf{M}_k \mathbf{M}_k \circ (\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\Omega}),$$

где индекс “ ∇ ” обозначает коротационную производную: яманнову $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ или спиновую $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$.

Подобная структура уравнения состояния следует из других соображений, приводящих вместо (2), (3) к двойственным определениям

$$\mathbf{L}^T = \dot{\gamma}_k \mathbf{M}_k - \boldsymbol{\Omega}, \quad \tau_k = \boldsymbol{\sigma} \circ \mathbf{M}_k.$$

В результате имеем

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\nabla} = \alpha (\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k)^{-1} \circ (\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\Omega})$$

(тензор $\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k$ обратим как оператор, связывающий произвольные девиаторы).

Окончательно уравнения состояния для аффинного формоизменения записываются в виде

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{H} \circ (\nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}) - p \mathbf{I}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{H} — тензор аффинных жесткостей; $\mathbf{I} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$; $p = -(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})/2$ — гидростатическое давление.

Структура уравнений состояния для неаффинных деформаций также может быть выяснена при рассмотрении трех частиц. Будем предполагать, что попарные контактные взаимодействия частиц осуществляются не только силами, но и моментами-парами, искажающими поле поворотов частиц. Для тройки частиц однозначно определяется линейный оператор $\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{\omega}^{\nabla}$: $\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)$, $\boldsymbol{\omega}_B - \boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C)$, $\boldsymbol{\omega}_C - \boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A)$. С учетом принятого выше можно записать

$$\dot{\theta}_k = \boldsymbol{\Gamma}^T \circ \mathbf{N}_k. \quad (8)$$

Здесь θ_k — кривизна вдоль направления \mathbf{n}_k ; $\mathbf{N}_k \equiv \mathbf{n}_k \mathbf{e}_3$. Тензор моментов-пар для тройки частиц определяется через моменты-пары m_k вдоль направлений \mathbf{n}_k как

$$\boldsymbol{\mu} = m_k \mathbf{N}_k. \quad (9)$$

Принимая закон контактного взаимодействия в виде

$$\dot{m}_k = \beta \dot{\theta}_k$$

(β — модуль изгибной жесткости), с учетом (8), (9) и произвольного закона для вращения \mathbf{N}_k получим

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \beta \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k \circ \boldsymbol{\Gamma}^T.$$

Здесь учтено, что $\dot{\mathbf{e}}_3 \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$ и у тензора $\boldsymbol{\mu}$ ненулевыми компонентами являются только μ_{13} и μ_{23} . Если использовать двойственные определения

$$\boldsymbol{\Gamma}^T = \dot{\theta}_k \mathbf{N}_k, \quad m_k = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{N}_k,$$

то приходим к уравнению с той же структурой

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \beta (\mathbf{N}_k \mathbf{N}_k)^{-1} \circ \boldsymbol{\Gamma}^T$$

(тензор $\mathbf{N}_k \mathbf{N}_k$ обратим как линейный оператор, связывающий произвольные тензоры вида $\xi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \eta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$). Окончательно примем

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{D} \circ \nabla \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

где \mathbf{D} — тензор изгибных жесткостей.

Уравнения (1), (7), (10) представляют собой замкнутую систему. Далее будем выделять модели с яуманновой и спиновой коротационными производными.

Модельная задача. Рассматривается неограниченная плоская среда с однородно распределенными материальными свойствами под действием однородного поля сжимающего напряжения $\sigma_{22} \equiv -\sigma$ ($\sigma \geq 0$) вдоль оси \mathbf{e}_2 . В конфигурации K $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\nabla \boldsymbol{\sigma} = \nabla \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, \mathbf{e}_α есть собственные векторы тензора $\boldsymbol{\sigma}$, имеющего ортотропную симметрию, оси которой направлены вдоль \mathbf{e}_α , а уравнения системы становятся линейными с постоянными коэффициентами. Коммутатор коротационной производной $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ содержит бифуркационный параметр σ .

Тензоры \mathbf{H} , \mathbf{D} модулей жесткости будем считать имеющими кубическую симметрию с осями \mathbf{e}_α . Тензор \mathbf{H} в ортобазисе $\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j$ ($\mathbf{h}_1 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{h}_2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)/\sqrt{2}$, $\mathbf{h}_3 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)/\sqrt{2}$) имеет вид

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

(в частном случае изотропии $\mu_1 = \mu_2$), а тензор \mathbf{D} в ортобазисе $\mathbf{d}_\alpha \mathbf{d}_\beta$ ($\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$) —

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(для кубической симметрии и изотропии). Будем рассматривать только один механизм неустойчивости — геометрическое разупрочнение, пренебрегая деградацией модулей жесткости, т. е. полагая $\mu_i > 0$, $\lambda > 0$.

Динамические уравнения (1) в рамках налагаемых ограничений сводятся к уравнениям $\dot{\sigma}_{\alpha\beta,\alpha} = \rho \ddot{v}_\beta$, $\dot{\mu}_{13,1} + \dot{\mu}_{23,2} + \dot{\sigma}_{12} - \dot{\sigma}_{21} = J \ddot{\omega}$. Подставляя в них уравнения состояния

и несжимаемости (7), (10) и исключая \dot{r} , для модели с яуманновой производной получим систему

$$\begin{aligned} (\mu_2 + \mu_3 + \sigma)\varphi_{,1111} + 2(2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)\varphi_{,1122} + (\mu_2 + \mu_3 - \sigma)\varphi_{,2222} + 2\mu_3\Delta\omega = \rho\Delta\ddot{\varphi}, \\ \bar{\lambda}\Delta\omega - \omega - \Delta\varphi/2 = \bar{J}\ddot{\omega}, \end{aligned} \quad (11)$$

для модели со спиновой производной —

$$\begin{aligned} (\mu_2 + \mu_3)\varphi_{,1111} + 2(2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)\varphi_{,1122} + (\mu_2 + \mu_3)\varphi_{,2222} + 2(\sigma + \mu_3)\omega_{,22} - 2(\sigma - \mu_3)\omega_{,11} = \rho\Delta\ddot{\varphi}, \\ \bar{\lambda}\Delta\omega - \omega - \Delta\varphi/2 = \bar{J}\ddot{\omega}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь φ — функция тока скоростей трансляций, определяемая как $v_1 = \varphi_{,2}$, $v_2 = -\varphi_{,1}$; $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$. Во вторых уравнениях систем (11), (12) выделены комплексы $\bar{\lambda} \equiv \lambda/(2\mu_3) > 0$ (размерность $[\text{м}^2]$) и $\bar{J} \equiv J/(2\mu_3) > 0$ (размерность $[\text{с}^2]$), связанные с характерными масштабом и временем.

Разыскиваются ограниченные на бесконечности решения систем (11), (12) общего вида

$$\varphi = \text{Re} [\varphi_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + wt)], \quad \omega = \text{Re} [\omega_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + wt)], \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \quad (13)$$

где Re — действительная часть числа; φ_0, ω_0 — комплексные амплитуды; i — мнимая единица; \mathbf{k} — вещественный волновой вектор; w — комплексная скорость. Случай $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ исключается, поскольку он соответствует движению среды как жесткого целого. Линии $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kC$, $k = |\mathbf{k}|$, $C = \text{const}$ являются характеристиками координатной части оператора при $\bar{\lambda} = 0$. Вектор $\mathbf{k} = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ представляется как $k_\alpha = k\{-\sin \delta, \cos \delta\}$, где δ — угол наклона такой характеристики к направлению \mathbf{e}_1 . Обозначим $\cos 2\delta \equiv x$, в силу симметрии задачи $0 < x \leq 1$.

Подставляя (13) в (11), (12), получим однородную линейную алгебраическую систему относительно φ_0, ω_0 , условие существования ненулевого решения которой означает условие существования нетривиальных решений (13) и записывается в виде

$$\rho\bar{J}w^4 + cw^2 + d = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} c &= \rho(1 + \bar{\lambda}k^2) + \bar{J}[(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3 - \sigma x]k^2, \\ d &= [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3 - \sigma x](1 + \bar{\lambda}k^2)k^2 - \mu_3k^2 \end{aligned}$$

для модели с яуманновой производной,

$$\begin{aligned} c &= \rho(1 + \bar{\lambda}k^2) + \bar{J}[(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3]k^2, \\ d &= [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3](1 + \bar{\lambda}k^2)k^2 - (\sigma x + \mu_3)k^2 \end{aligned}$$

для модели со спиновой производной. Решения (14) имеют вид

$$w_{\pm}^2 = (-c \pm \sqrt{c^2 - 4\rho\bar{J}d})/(2\rho\bar{J}). \quad (15)$$

Легко показать, что для обеих моделей $c^2 - 4\rho\bar{J}d > 0$. Коэффициент d меняет знак с положительного на отрицательный в точке

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1)x + [\mu_1 + \mu_3 - \mu_3/(1 + \bar{\lambda}k^2)]/x; \quad (16)$$

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1)(1 + \bar{\lambda}k^2)x + [\mu_1 + (\mu_3 + \mu_1)\bar{\lambda}k^2]/x \quad (17)$$

для моделей (11) и (12) соответственно. Кроме того, для первой модели $c > 0$ заведомо в момент перехода d через нуль (для того чтобы в этом убедиться, достаточно выразить σ из уравнения $c = 0$ и сравнить с (16)), а для второй $c > 0$ при любом напряжении.

При переходе σ через критическое значение два сопряженных корня $\pm\sqrt{w_+}$ движутся по мнимой оси комплексной плоскости к нулю и, встретившись в нуле, удаляются от него вдоль вещественной оси; при этом два других сопряженных мнимых корня $\pm\sqrt{w_-}$ постоянно удаляются от нуля. Это означает, что непосредственно за критической точкой развивается дивергентная (статическая) форма потери устойчивости [10].

Критическое значение σ находится минимизацией выражения (16) или (17) по $0 < x \leq 1$ и $k^2 > 0$. При $\mu_2 \leq 2\mu_1$ (а также в случае изотропии $\mu_2 = \mu_1$) в момент $\sigma_0 = \mu_2$ появляется горизонтальная характеристика $\delta_0 = 0$, а при $\mu_2 > 2\mu_1$ в момент $\sigma_0 = 2\sqrt{(\mu_2 - \mu_1)\mu_1}$ появляется пара характеристик, образующих углы $\pm\delta_0$, где $\delta_0 = (1/2) \arccos \sqrt{\mu_1/(\mu_2 - \mu_1)} \leq \pi/4$. Минимум σ соответствует $k^2 = 0$, поэтому в критический момент не происходит образования структуры.

Однако при напряжении, превышающем критическое, образуется структура, параметры которой x_* , k_* зависят от $\sigma - \sigma_0 \equiv \Delta\sigma > 0$ и соответствуют максимальной скорости роста $w_+ > 0$. Вблизи критической точки из (15) следует, что $w_{\pm}^2 \approx -d/c$, причем $|d| \ll c$, поэтому необходимо минимизировать $d(x, k)$ или $d(x, k^2)$. Можно доказать, что полученные выше результаты качественно не изменятся, если в выражениях для $d(x, k^2)$ пренебречь слагаемыми в виде произведения малого параметра k^4 и степени x . В результате для обеих моделей получим выражение

$$d = [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 - \sigma x]k^2 + (\mu_1 + \mu_3)\bar{\lambda}k^4. \quad (18)$$

Допустимые значения x , k^2 расположены в области $d(x, k^2) < 0$ полосы $0 < x \leq 1$, $k^2 > 0$. Это условие эквивалентно условию

$$\bar{\lambda}k^2 < -((\mu_2 - \mu_1)x^2 - \sigma x + \mu_1)/(\mu_1 + \mu_3).$$

Так как $\bar{\lambda}k^2 > 0$, то $(\mu_2 - \mu_1)x^2 - \sigma x + \mu_1 < 0$, и отсюда можно получить интервалы изменения x : $x \in (x_-, 1]$ при $\mu_2 \leq 2\mu_1$, $x \in (x_-, x_+)$ при $\mu_2 \geq 2\mu_1$. Здесь $x_{\pm} = (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4(\mu_2 - \mu_1)\mu_1})/(2(\mu_2 - \mu_1))$. При $\sigma \rightarrow \sigma_0$ эти интервалы непрерывно стягиваются к точкам $x_0 = 1$ и $x_0 = \cos 2\delta_0$. Это означает, что при малом превышении критического напряжения угол наклона характеристик изменяется также мало. Поэтому для случая $\mu_2 \leq 2\mu_1$ будем полагать, что экстремальное значение w_+ достигается на горизонтальной характеристике, т. е. $x_* \approx 1$, а волновое число соответствует локальному экстремуму (18) при $x = 1$. В результате имеем допустимые значения

$$k_*^2 \approx (1/\bar{\lambda})\Delta\sigma/(2(\mu_2 + \mu_3)), \quad x_* \approx 1. \quad (19)$$

В случае $\mu_2 > 2\mu_1$ потребуются точные выражения для k_*^2 и x_*

$$k_*^2 = (1/\bar{\lambda})x_0\Delta\sigma/(\mu_1 + \mu_3), \quad x_* = \sigma/(2(\mu_2 - \mu_1)), \quad (20)$$

соответствующие локальному экстремуму (18) в допустимой области $x_- < x_* < x_+$, $k_*^2 > 0$. Нетрудно убедиться, что для (19) или (20) $w_+^2 > 0$.

При $\mu_2 \leq 2\mu_1$ и любом напряжении σ непосредственно за критической точкой образуется стоячая волна вдоль оси сжатия с параметрами (19) (рис. 2, а). При $\mu_2 > 2\mu_1$ решение представляет собой суперпозицию двух стоячих волн, нормальных к характеристикам, с параметрами (20). В частности, возможны ячеистые решения (рис. 2, б). При переходе из любой ячейки в соседнюю знак спина решетки меняется, что позволяет считать данные ячейки “зародышами” субзерен. Бифуркация приводит к разориентации кристаллической решетки этих ячеек, т. е. к фрагментации интересующего нас типа. Следует отметить, что в изотропной среде ($\mu_2 = \mu_1$) ячеистые решения отсутствуют. Таким образом, от анизотропии в модели зависит вид решения, но не зависит неустойчивость материала.

Вид зависимости $k^2(\Delta\sigma)$ в первом выражении (20) позволяет описать начало развития процесса. Непосредственно за точкой бифуркации k^2 начинает увеличиваться от нуля.

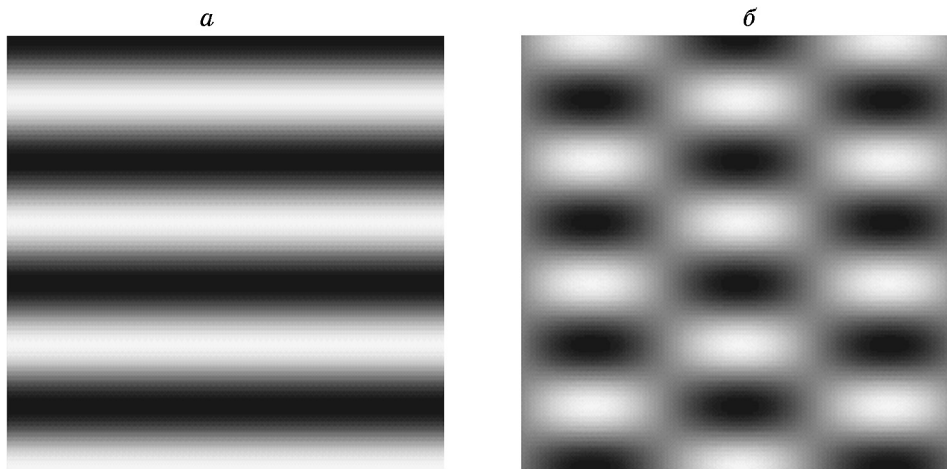


Рис. 2

При этом характерный размер k^{-1} фрагментов уменьшается. Когда он становится соизмеримым с характерным размером неоднородностей свойств материала, его уменьшение прекращается и происходит дальнейшая эволюция структуры фиксированного размера. Изгибная жесткость $\bar{\lambda}$ не влияет на угол наклона характеристик, но определяет масштаб $k^{-1} \sim \sqrt{\bar{\lambda}}$.

Уравнения (11), (12) и полученные результаты справедливы для случаев сжатия силой $-\sigma$ вдоль направления \mathbf{e}_2 или растяжения силой σ вдоль \mathbf{e}_1 , поскольку коммутатор коротационной производной σ^∇ при этом не меняется. Для описания различия критических напряжений в этих опытах за счет локальных геометрических эффектов не следует ограничиваться использованием коротационных производных, учитывающих только один механизм дестабилизации материала за счет поворота его локального объема. Однако приведенные здесь модели с использованием коротационных производных правильно предсказывают формоизменение ячеек с ростом σ : сплющивание вдоль оси сжатия \mathbf{e}_2 или вытягивание вдоль оси растяжения \mathbf{e}_1 , что следует из второй формулы в (20).

Обсуждение результатов. Рассмотрим левую (координатную) сторону оператора (11), (12), которую будем называть оператором равновесия. Полагая в этом операторе $\bar{\lambda} = 0$, можно выделить часть, отвечающую за аффинные формоизменения, которую будем называть аффинным оператором равновесия. При критическом напряжении аффинный оператор равновесия утрачивает строгую эллиптичность с переходом в параболический ($\mu_2 \leq 2\mu_1$) или гиперболический ($\mu_2 > 2\mu_1$) режимы и приобретает характеристики. При этом профиль решения вдоль \mathbf{k}/k не определяется этим оператором и может быть произвольным [13]. Переход через критическую точку соответствует изменению определенности аффинного оператора равновесия относительно полей (13). До момента бифуркации он положительно определенный (строго эллиптический), в момент бифуркации вырожденный (параболический или гиперболический), а за точкой бифуркации становится отрицательно определенным. Сам оператор равновесия при этом переходе положительной определенности относительно полей (13) не меняет. В момент бифуркации неаффинная часть оператора равновесия (стоящая при $\bar{\lambda}$) выделяет из произвольного профиля вдоль \mathbf{k}/k тривиальный сигнал (в (13) соответствующий $k^2 = 0$), а за этим моментом — модулированный ($k^2 > 0$).

В рассматриваемой модельной задаче существенно, что коэффициенты оператора (11), (12) не зависят от координат, в силу чего до критического момента аффинные моды полностью описывают процесс аффинного формоизменения тела, при этом необходимость в неаффинных модах не возникает. В критический момент аффинные моды изолируются,

т. е. не способны противостоять приложенным нагрузкам в текущей конфигурации K , а затем аффинные моды даже порождают дополнительные к приложенным силы. В результате активизируются неаффинные моды, воспринимающие все нагрузки и изгибающие все поля, причем в силу граничных условий в виде гармонических волн, которые образуют структуру, в частности ячеистого типа.

В предельном случае $\bar{\lambda} = 0$ (чисто аффинного оператора, исследованного в [6]) в критический момент допускаются произвольные профили вдоль \mathbf{k}/k , составленные из базисных функций (13) с любыми $k > 0$, уходящие от основного состояния со своими начальными скоростями. После критического момента движение становится ускоренным, максимальную скорость приобретает мода с бесконечно большим числом полуволн, нормальных к характеристикам, что фактически соответствует дезинтеграции среды на изолированные точки. При этом, начиная с критического момента, материал не способен сопротивляться нагрузке, т. е. становится неустойчивым.

Понятие внутренней устойчивости материала (по отношению к аффинному формоизменению) введено в [8, 9, 12]. Запись этого определения в текущей конфигурации K тела имеет вид

$$2U_0 \equiv \boldsymbol{\sigma}^H \circ \nabla \mathbf{v} > 0, \quad (21)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^H$ — производная Хилла тензора напряжений Коши, равная материальной производной определенного в конфигурации K тензора номинальных напряжений и для несжимаемых материалов принимающая вид $\boldsymbol{\sigma}^H \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Именно в координатах номинальные напряжения — деформации кривая нагружения достигает пика в момент нарушения условия (21). Неравенство (21) исключает бифуркации в задачах на основе аффинного оператора равновесия с однородными коэффициентами и граничными условиями на \mathbf{v} . Аффинная часть оператора (11), (12), совпадающая с оператором изученной в [6] модели, имеет вид

$$(\mu_2 + \sigma)\varphi_{,1111} + 2(2\mu_1 - \mu_2)\varphi_{,1122} + (\mu_2 - \sigma)\varphi_{,2222} = 0$$

и представляет собой уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi_{,11}} + \frac{d^2}{dx_1 dx_2} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi_{,12}} + \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi_{,22}} = 0$$

для $2U_0 = (1/2)(\mu_2 + \sigma)(\varphi_{,11})^2 - (\mu_2 + \sigma)\varphi_{,11}\varphi_{,22} + (1/2)(\mu_2 - \sigma)(\varphi_{,22})^2 + (2\mu_1 + \sigma)(\varphi_{,12})^2$. При переходе через критическую точку U_0 меняет знак с положительного на отрицательный, т. е. до этой точки “энергия второго порядка” (21) аффинными деформациями поглощается, а за ней выделяется. Таким образом, до критической точки имеется канал рассеивания энергии, сообщаемой телу внешней нагрузкой, в самой точке этот канал исчезает, а за ней высвобождается дополнительная энергия. Если тело имеет способность к неаффинному деформированию, то в критический момент она проявляется, и в результате неаффинного деформирования происходит поглощение избыточной энергии. Таким образом, за точкой бифуркации происходит перекачка энергии от аффинных мод к неаффинным.

Уравнения Эйлера — Лагранжа для систем (11), (12) записываются в виде

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{,11}} + \frac{d^2}{dx_1 dx_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{,12}} + \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{,22}} = 0, \quad \frac{d}{dx_1} \frac{\partial U}{\partial \omega_{,1}} + \frac{d}{dx_2} \frac{\partial U}{\partial \omega_{,2}} - \frac{\partial U}{\partial \omega} = 0. \quad (22)$$

Для (11) потенциал скоростей можно построить в виде

$$2U = 2U_0 + (1/2)\mu_3(2\omega + \Delta\varphi)^2 + \lambda(\nabla\omega)^2.$$

В момент бифуркации $U_0 = 0$, но $U > 0$.

Однако для (12) такой функции (квадратичной, так как уравнения линейные) не существует. Для доказательства этого достаточно убедиться в том, что слагаемое $\sigma\omega_{,11}$ в

первом уравнении в (12) может появиться, только если в выражении для функции U содержится слагаемое $\sigma\omega\varphi_{,11}$. Тогда во втором уравнении в (22) появится слагаемое $\sigma\varphi_{,11}$, которого во втором уравнении в (12) нет. Отсутствие лагранжиана U означает неконсервативность построенной модели, которая относится к циркуляционным системам, изученным в [10]. Такие системы часто встречаются в механических устройствах с вращательными степенями свободы, единственным надежным методом исследования которых является динамический. Этот метод использовался выше для нахождения волнового вектора, обладающего наибольшей скоростью роста и определяющего форму решения в рамках метода линейных возмущений. Неконсервативность системы (12) обусловлена природой спина коротационной производной уравнений состояния (7). В [14] доказано, что единственной коротационной производной, допустимой в инкрементально-линейных соотношениях, связывающих энергетически сопряженные тензоры, является яманнова производная, использованная в модели (11). Однако требование энергетической сопряженности, возможно, является чрезмерно жестким, во-первых, поскольку не позволяет учесть форму контактирующих частиц, определяющую вид коротационной производной в (7), во-вторых, в силу инвариантной записи выражения для энергии $\dot{\gamma}_k\hat{\gamma}_k$ относительно системы \mathbf{M}_k при любом ее спине. Поэтому были изучены два предельных случая — (11) и (12).

В настоящей работе исследованы возможности модели с нелинейностью в виде холма (диаграмма деформирования с нисходящим участком), бифуркация которой изучается с помощью линеаризации оператора вблизи единственного пика. Установлено, что для такой модели характерный размер структуры k^{-1} в закритической области зависит от величины надкритичности $\Delta\sigma$ и, вероятно, окончательно определяется неоднородностью строения материала или другими сильнонелинейными механизмами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рыбин В. В.** Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986.
2. **Bay В., Hansen N., Hughes D. A., Kuhlmann-Wilsdorf D.** Evolution of FCC deformation structures in polyslip // *Acta Metall. Mater.* 1992. V. 40, N 2. P. 205–219.
3. **Ревуженко А. Ф.** Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2000.
4. **Aifantis E. C.** Pattern formation in plasticity // *Intern. J. Engng Sci.* 1995. V. 33, N 15. P. 2161–2178.
5. **Аэро Э. Л.** Микромасштабные деформации в двумерной решетке — структурные переходы и бифуркации при критическом сдвиге // *Физика твердого тела.* 2000. Т. 42, № 6. С. 1113–1119.
6. **Hill R., Hutchinson J. W.** Bifurcation phenomena in the plane tension test // *J. Mech. Phys. Solids.* 1975. V. 23. P. 239–264.
7. **Asaro R. J.** Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals // *Acta Metall.* 1979. V. 27. P. 445–453.
8. **Hill R.** A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // *J. Mech. Phys. Solids.* 1958. V. 6, N 3. P. 236–249.
9. **Hill R.** Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time // *J. Mech. Phys. Solids.* 1959. V. 7, N 3. P. 209–225.
10. **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
11. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.

12. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
13. **Hill R.** Acceleration waves in solids // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 1. P. 1–16.
14. **Hill R.** On constitutive inequalities for simple materials. 1 // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 4. P. 229–242.

Поступила в редакцию 5/XI 2001 г.
