

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

УДК 532.592.2; 517.958

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Рассматривается математическая модель длинноволнового приближения, описывающая течения баротропной идеальной жидкости в слое со свободной границей. Сформулирована модель гидравлического прыжка для безвихревого и вихревого течения. Исследуются свойства гидравлических прыжков. Показано, что в общем случае наряду с прыжками повышения уровня жидкости могут возникать и прыжки понижения уровня.

Гидравлические прыжки на сдвиговом течении несжимаемой жидкости рассмотрены в [1]. Точные решения системы уравнений длинных волн, распространяющихся в слое баротропной жидкости, получены в [2, 3].

1. Математическая модель. Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned} u_T + uu_X + vu_Y + \rho^{-1}p_X &= 0, \\ \delta^2(v_T + uv_X + vv_Y) + \rho^{-1}p_Y &= -1, \quad 0 \leq Y \leq h(X, T), \\ \rho_T + u\rho_X + v\rho_Y + \rho(u_X + v_Y) &= 0, \quad -\infty < X < \infty, \\ \rho = R(p) \quad (R'(p) > 0), \quad \rho(X, Y, 0) = \rho_0(X, Y), \quad u(X, Y, 0) = u_0(X, Y), \\ v(X, Y, 0) = v_0(X, Y), \quad h(X, 0) = h_0(X), \quad v(X, 0, T) = 0, \\ h_T + u(X, h, T)h_X = v(X, h, T), \quad p(X, h, T) = p_0 = \text{const}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

описывающая плоскопараллельное движение слоя баротропной идеальной жидкости со свободной границей $Y = h(X, T)$ над ровным дном в поле силы тяжести. Здесь

$$\begin{aligned} u_1 = (gH_0)^{1/2}u, \quad v_1 = (gH_0)^{1/2}H_0L_0^{-1}v, \quad p_1 = R_0gH_0p, \\ \rho_1 = R_0\rho, \quad X_1 = L_0X, \quad Y_1 = H_0Y, \quad T_1 = L_0(gH_0)^{-1/2}T \end{aligned}$$

— размерные компоненты вектора скорости, давление, плотность, декартовы координаты на плоскости и время; u, v, p, ρ, X, Y, T — соответствующие безразмерные величины; параметры H_0, L_0 определяют характерные вертикальный и горизонтальный масштабы; параметр R_0 имеет размерность плотности; g — ускорение свободного падения; $\delta = H_0L_0^{-1}$.

Как показано в [4], в длинноволновом приближении ($\delta = 0$) из (1.1) возникает следующая задача:

$$\begin{aligned} u_T + uu_X + vu_Y + h_X &= 0, \\ (f(h))_T + \left(\int_0^h f'(h-Y) u(X, Y, T) dY \right)_X &= 0, \\ u(X, Y, 0) = u_0(X, Y), \quad h(X, 0) = h_0(X). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Функция f определяется равенством

$$f\left(\int_{p_0}^p ((R(\xi))^{-1}) d\xi\right) = p,$$

а давление, плотность и вертикальная компонента скорости задаются соотношениями

$$p = f(h - Y), \quad \rho = f'(h - Y), \quad v = -\rho^{-1} \int_0^Y (\rho_T + (u\rho)_X) dY. \quad (1.3)$$

При предположениях теории длинных волн отсутствие завихренности эквивалентно условию $u_Y = 0$. Для безвихревых движений система уравнений (1.2) сводится к аналогу одномерной газовой динамики

$$\eta(u_T + uu_X) + P_X = 0, \quad \eta_T + (u\eta)_X = 0, \quad (1.4)$$

где $\eta = f(h) - p_0$ — перепад давления на сечении $x = \text{const}$. Зависимость

$$P = P(\eta) = \int_0^\eta \xi (R(\xi + p_0))^{-1} d\xi \quad (1.5)$$

определяет уравнение состояния [4].

В общем случае ($u_Y \neq 0$) переходом к смешанным эйлерово-лагранжевым независимым переменным x, λ, t [4] $X = x, T = t, Y = \Phi(x, \lambda, t)$ систему уравнений (1.2) можно преобразовать к виду

$$u_t + uu_x + \left(R\left(p_0 + \int_0^1 H d\lambda\right)\right)^{-1} \int_0^1 H_x d\nu = 0, \quad (1.6)$$

$$H_t + (uH)_x = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq 1, \quad -\infty < x < \infty)$$

($H = \rho\Phi_\lambda$ — новая искомая функция). Если решение системы (1.6) найдено, то p, ρ, Φ, v определяются соотношениями

$$p = p_0 + \int_\lambda^1 H d\nu, \quad \rho = R(p), \quad \Phi = \int_0^\lambda \rho^{-1} H d\nu, \quad v = \Phi_t + u\Phi_x.$$

В момент времени $t = 0$ можно положить $\Phi = \lambda h_0(x), u = u_0(x, \lambda h_0(x)), \rho = f'((1 - \lambda)h_0(x))$. При u, H , удовлетворяющих определенным условиям [4], система (1.6) является гиперболической. Ее характеристики задаются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = k^i \quad (i = 1, 2), \quad \frac{dx}{dt} = u(x, \lambda, t) \quad (\lambda = \text{const}).$$

Характеристические корни дискретного спектра определяются из характеристического уравнения

$$R\left(p_0 + \int_0^1 H d\nu\right) = \int_0^1 H(u - k)^{-2} d\nu. \quad (1.7)$$

В частном случае безвихревого движения ($u_\lambda \equiv 0$) (1.7) сводится к характеристическому уравнению системы (1.4): $(u - k)^2 = \eta(R(\eta + p_0))^{-1} = P'(\eta)$.

Определим понятие разрывного решения для систем (1.4), (1.6). Естественно рассмотреть следующие законы сохранения массы и импульса жидкого слоя (дивергентную форму уравнений (1.4)):

$$(\eta u)_t + (\eta u^2)_x + P_x = 0, \quad \eta_t + (u\eta)_x = 0.$$

На линии разрыва $x = x(t)$ должны выполняться соотношения

$$[\eta(u - D)^2 + P] = 0, \quad [\eta(u - D)] = 0 \quad (D = x'(t)), \quad (1.8)$$

где $[f] = f^- - f^+$ — скачок функции на разрыве. Вычислим внутреннюю энергию $\varepsilon(\eta)$ интегрированием уравнения $\varepsilon'(\eta) = \eta^{-2}P$:

$$\varepsilon(\eta) = -\eta^{-1}P + i(\eta), \quad i(\eta) = \int_0^\eta (R(\xi + p_0))^{-1} d\xi. \quad (1.9)$$

Следствием уравнений (1.4) является уравнение энергии:

$$(\eta(\varepsilon + 2^{-1}u^2))_t + (u\eta(i + 2^{-1}u^2))_x = 0.$$

На линиях разрыва $x = x(t)$ будем требовать, чтобы выполнялось условие убывания энергии:

$$\eta(u - D)[2^{-1}(u - D)^2 + i] \geq 0. \quad (1.10)$$

Условия (1.8), (1.10) задают математическую модель гидравлического прыжка в случае безвихревого течения.

В общем случае модель гидравлического прыжка строится по аналогии с рассмотренной ранее моделью для несжимаемой жидкости [1]. Из уравнений (1.6) можно получить следующие законы сохранения:

$$H_t + (uH)_x = 0, \quad (H\omega\rho^{-1})_t + (uH\omega\rho^{-1})_x = 0, \quad (1.11)$$

$$\left(\int_0^1 H u d\nu\right)_t + \left(\int_0^1 H u^2 d\nu\right)_x + P_x = 0.$$

Здесь $\omega = u\gamma = u_\lambda(\Phi_\lambda)^{-1}$ — завихренность; функция $P = P(\eta)$ определена формулой (1.5); при этом

$$\eta = \int_0^1 H d\nu. \quad (1.12)$$

Первые два уравнения (1.11) являются локальными законами сохранения массы и величины ω/ρ (ω/ρ сохраняется в частицах и для точной модели (1.1)). Последнее уравнение выражает закон сохранения горизонтального импульса слоя жидкости. Из (1.11) вытекают соотношения на разрыве:

$$[H(u - D)] = 0, \quad [H(u - D)\omega\rho^{-1}] = 0, \quad \left[\int_0^1 H(u - D)^2 d\nu + P\right] = 0. \quad (1.13)$$

Из (1.6) можно также получить уравнение энергии слоя жидкости:

$$\left(\int_0^1 H \left(\varepsilon + \frac{1}{2} u^2 \right) d\nu \right)_t + \left(\int_0^1 H u \left(i + \frac{1}{2} u^2 \right) d\nu \right)_x = 0,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$, $i = i(\eta)$ определены формулами (1.9), а η — формулой (1.12). Будем требовать, чтобы дополнительно на скачке выполнялось условие убывания энергии слоя:

$$\int_0^1 H(u - D) \left[\frac{1}{2} (u - D)^2 + i \right] d\nu \geq 0. \quad (1.14)$$

Условиями (1.13), (1.14) задана модель гидравлического прыжка в случае вихревого течения. Очевидно, что при $\omega = 0$ условия (1.13), (1.14) переходят в (1.8), (1.10).

2. Анализ соотношений на разрывах. Система уравнений (1.4) изучалась во многих работах [5]. Хорошо известно, что важные свойства разрывных решений зависят от свойств функции $g(\tau) = P(\tau^{-1})$. Если $g_\tau < 0$, $g_{\tau\tau} > 0$, то разрывы всегда являются ударными волнами сжатия (в рассматриваемом в данной работе случае — гидравлическими прыжками повышения уровня жидкости), а центрированные волны, которые возникают при распаде начального разрыва, — всегда волнами разрежения (понижения уровня). Если при некоторых значениях τ выполняется неравенство $g_{\tau\tau} < 0$, то качественное поведение решений резко меняется: наряду с ударными волнами сжатия возникают ударные волны разрежения, а при распадах разрывов появляются центрированные волны сжатия. В случае невыпуклого уравнения состояния условия убывания энергии (1.10) уже недостаточно для отбора устойчивых разрывов, поэтому нужно вводить дополнительные условия устойчивости [5].

Для уравнения состояния (1.5) условие $g_\tau < 0$ выполнено всегда. Условие $g_{\tau\tau} > 0$ приводит к следующему неравенству для функции $R(p)$:

$$3R(p) - (p - p_0)R'(p) > 0 \quad (p \geq p_0). \quad (2.1)$$

Если $R(p) = ap^\alpha$ (политропное уравнение состояния, $0 < \alpha < 1$), то неравенство (2.1) выполнено. Однако в общем случае условие $g_{\tau\tau} > 0$ может нарушаться даже тогда, когда термодинамические свойства баротропной среды определяются выпуклым уравнением состояния.

Действительно, пусть уравнение состояния среды имеет вид

$$\frac{1}{R(p)} = a\xi^{-\alpha} + b(1 + \xi)^{-N} \quad (\xi = p/p_0 > 1)$$

($a > 0$, $b > 0$, $1 > \alpha > 0$, $N > 0$). Очевидно, что $(1/R(p))' < 0$, $(1/R(p))'' > 0$ и условия монотонности и выпуклости для этого уравнения состояния выполнены. При $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ поведение $R(p)$ такое же, как в политропном газе. Легко проверить, что если для фиксированных значений $\xi > 1$, $n > 0$

$$N > 3(\xi + 1)(\xi - 1)^{-1} + n, \quad b > an^{-1} \frac{(1 + \xi)^{N+1}}{\xi^\alpha} \left(\frac{3}{\xi - 1} - \frac{\alpha}{\xi} \right),$$

то знак неравенства в (2.1) сменится на обратный. Следовательно, «хорошие» свойства уравнений состояния исходной баротропной среды могут не обеспечивать аналогичных свойств уравнения состояния (1.5). Гидравлические прыжки в таких средах могут быть

прыжками понижения уровня.

Рассмотрим модель (1.11). Из соотношений (1.13) вытекает, что $[u_\lambda(u - D)] = 0$, $[(u - D)^2] = K$, где K не зависит от λ . Пусть заданы параметры течения перед скачком u_1 , H_1 и скорость фронта скачка D , удовлетворяющие неравенству $u_1 > D$. Определим u_2 , H_2 за фронтом скачка с помощью соотношений на разрыве. Согласно предыдущей формуле и (1.13),

$$u_2 - D = \sqrt{(u_1 - D)^2 - K}, \quad H_2 = \frac{H_1(u_1 - D)}{((u_1 - D)^2 - K)^{1/2}}. \quad (2.2)$$

Эти формулы справедливы при $K \leq K_* = \min_\lambda (u_1 - D)^2$. Подстановка (2.2) в третье соотношение (1.13) дает уравнение

$$F(K) - F(0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(F(K) = \int_0^1 H_1(u_1 - D) \sqrt{(u_1 - D)^2 - K} dv + P(\eta_2(K)), \quad \eta_2(K) = \int_0^1 \frac{H_1(u_1 - D) dv}{((u_1 - D)^2 - K)^{1/2}} \right).$$

Заметим, что в силу соотношений на разрыве (1.13) функция $\sigma = [2^{-1}(u - D)^2 + i] = 2^{-1}(u_1 - D)^2 + i_1 - 2^{-1}(u_2 - D)^2 - i_2$ не зависит от λ . Поэтому ее можно вынести из-под знака интеграла в (1.14) и условие убывания энергии представить в форме

$$\sigma(K) = i_1 + K/2 - i(\eta_2(K)) > 0. \quad (2.4)$$

Производная функции σ вычисляется в виде

$$\sigma'(K) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R(\eta_2 + p_0)} \int_0^1 \frac{H_2 dv}{(u_2 - D)^2} \right) \quad (2.5)$$

и связана с $F'(K)$ соотношением $F'(K) = -\eta_2(K)\sigma'(K)$. В качестве следствия этого соотношения получаем равенство

$$\sigma(K) = -\eta_2^{-1}(F(K) - F(0)) - \int_0^K \eta_2'(l)\eta_2^{-2}(l)(F(l) - F(0))dl. \quad (2.6)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть функция $R(p)$ удовлетворяет неравенству (2.1). Если для некоторого $K_1 < K_*$ выполнено равенство $\sigma'(K_1) = 0$, то необходимо $\sigma''(K_1) < 0$.

Доказательство. По условию леммы в точке K_1

$$R(\eta_2(K_1) + p_0) = 2\eta_2'(K_1). \quad (2.7)$$

Согласно (2.5),

$$\sigma''(K_1) = (2R(\eta_2(K_1) + p_0))^{-1} (R'(\eta_2(K_1) + p_0)\eta_2'(K_1) - 2\eta_2''(K_1)).$$

Неравенство $\sigma''(K_1) < 0$ будет выполнено, если

$$3\eta_2'^2(K_1)(\eta_2(K_1))^{-1} - \eta_2''(K_1) < 0 \quad (2.8)$$

(использованы неравенство (2.1) и равенство (2.7)). Но, согласно определению функции

$\eta_2(K)$ (см. (2.3)), справедливы соотношения

$$\eta_2(K) = \int_0^1 \varphi g d\nu, \quad \eta_2'(K) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi g^3 d\nu,$$

$$\eta_2''(K) = \frac{3}{4} \int_0^1 \varphi g^5 d\nu \quad (\varphi = H_1(u - D), \quad g = ((u - D)^2 - K)^{-1/2}).$$

С учетом приведенных соотношений неравенство (2.8) можно привести к неравенству Коши, записанному в форме

$$\left(\int_0^1 \varphi g^3 d\nu \right)^2 \leq \int_0^1 \varphi g d\nu \int_0^1 \varphi g^5 d\nu.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Если уравнения состояния баротропной среды удовлетворяют неравенству (2.1), то функция $\sigma(K)$ в области $K < K_*$ имеет только одну точку экстремума, являющуюся точкой максимума $\sigma(K)$.

Действительно, так как $\sigma'(K) \rightarrow 2^{-1}$ при $K \rightarrow -\infty$ и $\sigma'(K) \rightarrow -\infty$ при $K \rightarrow K_*$ (предполагается, что u_1 и H_1 — гладкие функции), то точка экстремума существует. Так как из равенства $\sigma'(K) = 0$ вытекает, что $\sigma''(K) < 0$, то точка экстремума является единственной. Очевидно, что $\sigma(K)$ достигает максимального значения в этой точке.

Следствие 2. Пусть выполнено неравенство (2.1) и K является корнем уравнения (2.3), удовлетворяющим условию $\sigma(K) > 0$. Тогда необходимо $K > 0$.

Действительно, в этом случае $F'(K_1) = 0$ для некоторого $K_1 \in (0, K)$. В силу связи между производными функций σ и F функция $F(K) - F(0)$ достигает единственного минимума в точке K_1 . Но, так как $F(l) - F(0)$ обращается в нуль при $l = 0$, $l = K$, это минимальное значение отрицательно и $F(l) - F(0) < 0$ при $l \in (0, K)$. Тогда из равенства (2.6) с учетом того, что $\eta_2'(l) > 0$, следует, что $K > 0$. При этом $\sigma'(0) > 0$, $\sigma'(K) < 0$. Сравнение этих неравенств и выражения (2.5) с характеристическим уравнением (1.7) показывает, что на разрыве выполняются условия устойчивости Лакса (сверхкритичность течения перед скачком и докритичность за скачком).

Покажем, что соотношения на разрыве позволяют определить течение за фронтом скачка, если параметры набегающего потока u_1 , H_1 и скорость разрыва D удовлетворяют неравенству

$$1 - \frac{1}{R(\eta_1 + p_0)} \int_0^1 H_1(u_1 - D)^{-2} d\nu < 0 \quad (2.9)$$

(условие сверхкритичности потока). Пусть для набегающего потока дополнительно выполнено неравенство $F(K_*) - F(0) \geq 0$. Тогда существует единственное значение $K_S \in (0, K_*]$, удовлетворяющее уравнению (2.3). Действительно, в силу (2.9) $F(K) - F(0) < 0$ при малых положительных K , и поэтому функция $F(K) - F(0)$ обращается в нуль на интервале $(0, K_*]$. Единственность корня и положительность $\sigma(K_S)$ доказаны выше.

Пусть параметры набегающего на фронт прыжка потока удовлетворяют неравенству $F(K_*) - F(0) < 0$. В этом случае уравнение (2.3) на интервале $(0, K_*)$ корней не имеет ($F(l) - F(0) < 0$ при $0 < l \leq K_*$), но $\sigma(K_*) > 0$ в силу (2.6) и $\sigma'(K_*) < 0$. Пусть в

единственной точке $\lambda = \lambda_*$ ($0 < \lambda_* < 1$) достигается равенство $(u_1(\lambda_*) - D)^2 = K_*$, тогда $u_2(\lambda_*) - D = 0$. В этом случае функция

$$H_2 = \frac{H_1(u_1 - D)}{\sqrt{(u_1 - D)^2 - K_*}} + \eta_* \delta(\lambda - \lambda_*) \quad (2.10)$$

($\delta(\lambda - \lambda_*)$ — функция Дирака, $\delta(\lambda - \lambda_*)d\lambda$ — дискретная мера, сосредоточенная в точке $\lambda = \lambda_*$) удовлетворяет соотношениям на разрыве и величина η_2 вычисляется в виде

$$\eta_2 = \eta_2(K_*) + \eta_* \quad (2.11)$$

(η_* — новая неизвестная величина, $\eta_2(K)$ определена в (2.3)). В случае, когда λ_* совпадает с одной из концевых точек отрезка $[0, 1]$, представление η_2 в виде (2.11) обосновывается путем введения меры Стильтьеса $dp = -Hd\lambda$, порождаемой функцией скачков и абсолютно непрерывной функцией, при этом возникает аналог соотношения (2.10) для мер dp_1, dp_2 .

Закон сохранения полного импульса слоя и условие убывания полной энергии в рассматриваемом случае имеют вид

$$P(\eta_2(K_*) + \eta_*) - P(\eta_2(K_*)) = -F(K_*) + F(0), \quad i(\eta_2(K_*) + \eta_*) - i(\eta_2(K_*)) \leq \sigma(K_*). \quad (2.12)$$

Первое уравнение однозначно определяет величину $\eta_* > 0$ ($P(\eta)$ — монотонная функция, $P(\eta) \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow \infty$). Покажем, что для найденного η_* выполнено второе неравенство (2.12). В силу (2.6)

$$\sigma(K_*) \geq (\eta_2(K_*))^{-1}(F(0) - F(K_*)),$$

поэтому достаточно показать, что

$$i(\eta_2(K_*) + \eta_*) - i(\eta_2(K_*)) \leq (\eta_2(K_*))^{-1}(P(\eta_2(K_*) + \eta_*) - P(\eta_2(K_*))).$$

Представление приращений функций интегралами от их производных приводит к очевидному неравенству

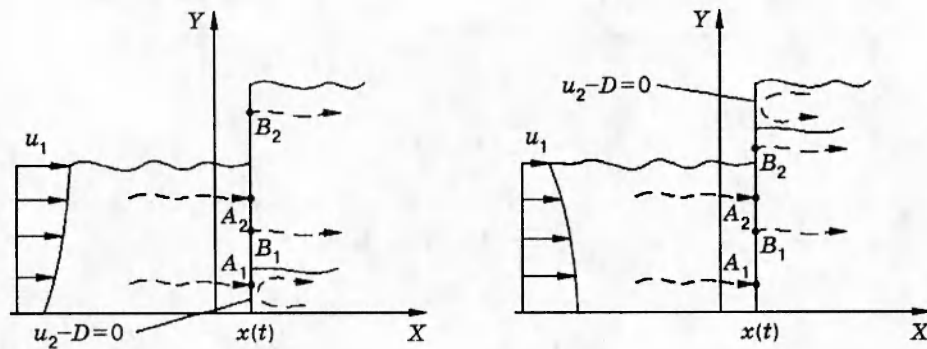
$$\int_{\eta_2}^{\eta_2 + \eta_*} \frac{1}{\eta} p'(\eta) d\eta \leq \frac{1}{\eta_2} \int_{\eta_2}^{\eta_2 + \eta_*} p'(\eta) d\eta.$$

Следовательно, условие убывания энергии выполнено. В итоге при $F(K_*) - F(0) < 0$ скорость течения за фронтом определяется формулой (2.2) (в которой нужно положить $K = K_*$), а H_2 — формулой (2.10). Давление на дне совпадает с $\eta_2 + p_0$, где η_2 определено в (2.11). Первое соотношение (1.3) при $Y = 0$ определяет глубину слоя жидкости h . Уравнениями

$$f(h - Y_1) = \int_{\lambda_*}^1 \frac{H_1(u_1 - D)dv}{\sqrt{(u_1 - D)^2 - K_*}} + \eta_*; \quad (2.13 \text{ а})$$

$$f(h - Y_2) = \int_{\lambda_*}^1 \frac{H_1(u_1 - D)dv}{\sqrt{(u_1 - D)^2 - K_*}} \quad (2.13 \text{ б})$$

определяются значения глубины Y_1, Y_2 , где $u_2 - D$ обращается в нуль. В слое $Y_1 \leq Y \leq Y_2$ выполнено равенство $u_2 - D = 0$, а плотность задана соотношением $\rho = f'(h - Y)$. Если в (2.13) заменить λ_* на λ , то (2.13 а) при $\lambda < \lambda_*$ определяет функцию $Y_1(\lambda)$, а (2.13 б) — функцию $Y_2(\lambda)$. Равенствами (2.2) и $Y = Y_1(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq \lambda_*$) задана функция $u_2(Y)$ на фронте разрыва при $0 \leq Y \leq Y_1$. Аналогично формула (2.2) и $Y = Y_2(\lambda)$ определяют $u_2(Y)$



при $Y_2 \leq Y \leq h$. Если набегающий поток характеризовался монотонным профилем скорости, то либо $Y_1 = 0$, либо $Y_2 = h$. Построенное решение описывает течение с застойной (относительно фронта прыжка) зоной $Y_1 \leq Y \leq Y_2$. Формирование этой зоны связано с образованием либо зоны возвратного течения в окрестности дна ($Y_1 = 0$), либо «вальца» в окрестности свободной границы ($Y_2 = h$).

Возможные схемы течения в случае монотонного профиля скорости представлены на рисунке. Если $F(K_*) - F(0) \geq 0$, то застойных зон нет и весь слой жидкости за фронтом состоит из частиц, прошедших через фронт скачка. В случае, когда минимальное значение $(u_1 - D)^2 = K_*$ достигается в нескольких точках λ , можно построить решение с несколькими застойными зонами. При этом уравнение баланса импульса позволяет найти только сумму перепадов давления η_* . Течение в прослойках и их толщины в общем случае определяются условиями справа от фронта разрыва. Следует отметить, что для баротропной среды с выпуклым (в смысле неравенства (2.1)) уравнением состояния качественные свойства гидравлического прыжка аналогичны свойствам прыжка в несжимаемой жидкости [1].

В общем случае, когда неравенство (2.1) может нарушаться, введем понятие допустимого разрыва с целью исключения из рассмотрения структурно-неустойчивых разрывов [5]. Разрыв называется допустимым, если для соответствующего корня K уравнения (2.3) выполняется условие

$$K(F(l) - F(0)) \leq 0 \quad (l \in (0, K)), \quad (2.14)$$

которое означает, что график функции $Z(l) = F(l) - F(0)$ при $l \in (0, K)$ лежит в полуплоскости $Z \leq 0$, если $K > 0$, и в полуплоскости $Z \geq 0$, если $K < 0$. Из (2.14) следуют условия убывания энергии $\sigma(K) > 0$ и условия устойчивости Лакса $\sigma'(0) \geq 0$, $\sigma'(K) \leq 0$ в ослабленной форме (допускается знак равенства).

Будем предполагать, что параметры потока набегающего на фронт прыжка удовлетворяют либо условию $\sigma'(0) > 0$, либо условиям $\sigma'(0) = 0$, $\sigma''(0) > 0$. При выполнении неравенства $F(K_*) - F(0) \geq 0$ можно показать, что существует значение $K > 0$, определяющее допустимый скачок повышения уровня без застойных зон на фронте. Если $F(K_*) - F(0) < 0$, то решение соотношений на разрыве также существует, но может определять скачок с застойными зонами за фронтом (в последнем случае неравенство (2.14) должно выполняться при $K = K_*$). В определенных областях параметров набегающего потока возможно появление скачков понижения уровня: если функция $(F(l) - F(0)) \leq 0$ для некоторого $l < 0$, то из соотношений на разрыве определяются $K < 0$ и параметры потока

за фронтом допустимого скачка понижения уровня. Доказываются эти факты по той же схеме, что изложена выше. Обоснование условия допустимости (2.14) требует отдельного рассмотрения. Можно только отметить, что предложенное условие является аналогом условия допустимости разрывов в газовой динамике [5].

В итоге установлено, что для баротропной среды с уравнением состояния, удовлетворяющим неравенству (2.1), соотношения на разрыве (1.13) и условие убывания энергии (1.14) позволяют определить параметры течения за гидравлическим прыжком, движущимся с заданной сверхкритической скоростью относительно набегающего потока. Если профиль скорости в набегающем потоке монотонный ($u_y \neq 0$), то параметры определяются однозначно. Для сред с уравнениями состояния, не удовлетворяющими условию (2.1), показано, что соотношения на разрыве (1.13) и критерий допустимости разрывов (2.14) также позволяют определить (вообще говоря, неоднозначно) состояние за фронтом разрыва, движущимся со скоростью не менее критической. При этом наряду со скачками повышения уровня могут возникать и скачки понижения уровня. Этот факт показывает, что при моделировании крупномасштабных процессов (например, атмосферных) свойства уравнений состояния среды существенно влияют на качественную картину течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17621).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тешуков В. М. Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11-19.
2. Varley E., Blythe P. A. Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103-187.
3. Sachdev P. L., Varughese Philip. Exact simple waves on shear flows in a compressible barotropic medium // Stud. Appl. Math. 1988. V. 79. P. 193-203.
4. Тешуков В. М. Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17-26.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 30/VI 1995 г.
