ЛИТЕРАТУРА

1. **Горшков Г. Ф., Усков В. Н., Ушаков А. П.** Автоколебательный режим взаимодействия недорасширенной струи с преградой при наличии сверхзвукового спутного потока // ПМТФ.— 1991.— № 4.
2. **Powell A.** The sound producing oscillations of round underexpanded jets impinging on normal plates // J. Acoust. Soc. Am.— 1988.— V. 83, N 2.
3. **Глазнев В. Н., Демин В. С., Желтухин Н. А.** К теории струйного генератора Гартмана // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1973.— № 13, вып. 3.
4. **Глазнев В. Н., Демин В. С.** Полуэмпирическая теория генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду // ПМТФ.— 1976.— № 6.
5. **Глазнев В. Н.** К полуэмпирической теории генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 6.
6. **Глазнев В. Н.** Автоколебания при истечении сверхзвуковых нерасчетных струй // Моделирование в механике: Сб. науч. тр.— Новосибирск, 1987.— Т. 1, № 6.
7. **Набережнова Г. В., Нестеров Ю. Н.** Неустойчивое взаимодействие расширяющейся сверхзвуковой струи с преградой // Тр. ЦАГИ.— 1976.— Вып. 1765.
8. **Солотчин А. В.** О неустойчивости сверхзвуковой недорасширенной струи, натекающей на преграду // Газодинамика и акустика струйных течений.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.

г. Новосибирск *Поступила 23/III 1990 г.*

УДК 534.2

М. А. Гузев

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В [1—3] обсуждалась задача о распространении волнового фронта — ударной волны или разрыва (по терминологии [2]) — в слоистых средах. Для линейной среды в [3] вычислены скорость распространения и амплитуда фронта. В данной работе находятся скорость распространения и амплитуда волнового фронта в нелинейной слоистой среде.

Рассматривается краевая задача для нелинейного волнового уравнения. Во многих случаях оказывается удобным свести краевую задачу к задаче с начальными условиями, поскольку такой переход может быть полезен для численного решения и является необходимым при статистическом анализе, так как задача с начальными данными обладает свойством динамической причинности, которое требуется для построения статистической теории. С этой целью часто используется метод инвариантного погружения (МИП).

Согласно общей идее МИП решение определяется из системы уравнений погружения, эвристический рецепт получения которых сводится к следующему: допустим, что задача характеризуется параметром и допускает точное решение при некотором его начальном значении. Тогда, варьируя по параметру, можно перейти от простой (точно решаемой) задачи к рассматриваемой, что связано с причинностью уравнений инвариантного погружения по варьируемому параметру: решение определяется лишь предыдущими значениями параметра и не зависит от последующих. Этот рецепт обсуждался и использовался для конкретных расчетов в разных задачах теории распространения волн [3—5], теории рассеяния [6—8]. Ниже получены уравнения погружения для нестационарной задачи о распространении волны в нелинейной слоистой среде. В дальнейшем эти уравнения используются для вычисления скорости распространения и амплитуды волнового фронта.

Пусть слой среды занимает часть пространства ($L_0 \leqslant x \leqslant L$), на который справа падает плоская волна $\varphi = \varphi(x - L + t)$, взаимодействующая со средой, так что в области $x > L$ возникает отраженная волна $R(x - L - t)$, а волновое поле $u(x, t) = \varphi(x - L + t) + R(x - L - t)$. В слое поле $u = u(x, t)$ определяется решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = F_{tt}, \quad F = F(x, u) = \varepsilon(x, u)u, \tag{1}$$

в котором $\varepsilon = \varepsilon(x, u)$ описывает свойства среды и самовоздействие поля (индексами здесь и далее обозначаются частные производные по соответствующим аргументам). Уравнение (1) возникает, например, при описании электрического поля электромагнитной волны, падающей из вакуума нормально к границе немагнитной среды с нелинейностью произвольного вида [9], тогда ε характеризует отклонение диэлектрической проницаемости от единицы. В области $x < L_0$ присутствует только прошедшая волна $T(x - L_0 + t)$. Поле $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x, t) = \varphi(x - L + t) + \int_{L_0}^{L} dx_1 \int dt_1 g F(x_1, u(x_1, t_1))_{t_1 t_1}. \tag{2}$$

Здесь $g = g(x - x_1, t - t_1) = (1/2)\theta(t - t_1 - |x - x_1|)$ — функция Грина волнового оператора в свободном пространстве, а падающее поле $\varphi = \int dt_1 g(x - L, t - t_1) f(t_1)$, где $f(t) = 2\varphi_t(t)$. Из (2) сразу получаем краевые условия для уравнения (1):

$$(\partial_x + \partial_t) u(x, t)|_{x=L} = f(t), \quad (\partial_x - \partial_t) u(x, t)|_{x=L_0} = 0. \tag{3}$$

Волновое поле $u(x, t) = u(x, t; L)$ зависит от параметра L (положение правой границы слоя), который будем использовать в качестве параметра погружения. Согласно общей идее МИП, мы должны связать $\partial u/\partial L$ с самим полем u. Искомая связь содержит $\partial u/\partial t$ и вариационную производную $\delta u/\delta f$. Действительно, варьируя уравнение (2) по L и $f(s_1)$, имеем

$$u_L(x, t; L) = \varphi_L(x - L + t) + \int dt_1 g(x - L, t - t_1) F(L, u(L, t_1; L))_{t_1 t_1} + \int_{L_0}^{L} dx_1 \int dt_1 g [F_u(x_1, u) u_L]_{t_1 t_1}, \tag{4}$$

$$\frac{\delta u(x, t; L)}{\delta f(s_1)} = g(x - L, t - s_1) + \int_{L_0}^{L} dx_1 \int dt_1 g \left[F_u(x_1, u) \frac{\delta u}{\delta f(s_1)}\right]_{t_1 t_1}$$

($u = u(x_1, t_1; L)$). Сравнивая полученные уравнения, заметим, что связь между $\partial u/\partial L$ и $\delta u/\delta f$ следует искать в форме

$$u_L(x, t; L) = \psi(x, t; L) + \int dt_1 \frac{\delta u(x, t; L)}{\delta f(t_1)} F(L, v(t_1, L))_{t_1 t_1} \tag{5}$$

с неизвестными (подлежащими определению) функциями $\psi = \psi(x, t; L)$ и $v(t, L) = u(L, t; L)$. Подставляя (5) в (4), легко убедиться, что ψ удовлетворяет уравнению в вариациях для (2) и переменная $(-t)$ является параметром вариации. Тогда $\psi = -u_t$ и соотношение (5) принимает вид

$$(\partial_L + \partial_t) u(x, t; L) = \int dt_1 \frac{\delta u(x, t; L)}{\delta f(t_1)} F(L, v(t_1, L))_{t_1 t_1}, \tag{6}$$

его можно рассматривать как дифференциальное уравнение для волнового поля $u(x, t; L)$ с начальным условием $u(x, t; L)|_{L=x} = u(x, t; x)$. Для неизвестной функции $v(t, L)$ имеем $\partial_L v(t, L) = (\partial_L + \partial_x) u(x, t; L)|_{x=L}$. Первый член в правой части определяется из (6) при $x = L$, второй выразим из (3). В результате получаем замкнутое интегродифференциальное уравнение

$$(\partial_L + 2\partial_t) v(t, L) = f(t) + \int dt_1 \frac{\delta v(t, L)}{\delta f(t_1)} F(L, v(t_1, L))_{t_1 t_1} \tag{7}$$

с начальным условием $v(t, L)|_{L=L_0} = \varphi(t)$.

Уравнения (6), (7) — система уравнений погружения для рассматриваемой задачи, обладающая свойством причинности по L: волновое поле $u(x, t; L)$ в точке x определяется теми значениями L, для которых $x \leqslant L$. Для дальнейшего анализа (6), (7) полезно соотношение, связывающее вариационную производную волнового поля с производной по времени:

$$\frac{\partial u(x,\ t;\ L)}{\partial t}+\int dt_1 f(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\delta u(x,\ t;\ L)}{\delta f(t_1)}=0, \tag{8}$$

которое следует из (5), (6) и второго уравнения (4).

Решения u, v уравнений (6), (7) — некоторые функционалы от f, которые представим в виде

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\int\ldots\int dt_1\ldots dt_n u_n(x,t;t_1,\ldots,t_n;L)\prod_{i=1}^{n}f(t_i), \tag{9}$$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\int\ldots\int dt_1\ldots dt_n v_n(t;t_1,\ldots,t_n;L)\prod_{i=1}^{n}f(t_i)$$

с симметричными по t_i коэффициентными функциями u_n, v_n. Временные аргументы t, t_i входят в комбинации $(t - t_i)$. Чтобы в этом убедиться, подставим (9) в (8) и приравняем почленно нулю коэффициенты при степенях f, тогда имеем уравнение $\partial_t u_n + \sum_{i=1}^{n}\partial_{t_i}u_n = 0$, общее решение которого — произвольная функция первых интегралов $c_i = t - t_i$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ и переменных x, L, следовательно, $u_n = u_n(x,\ t - t_1,\ \ldots,\ t - t_n;\ L)$.

Для определения коэффициентных функций необходимо подставить (9) в (6), (7) и приравнять коэффициенты при степенях f, тогда получим систему зацепляющихся уравнений. В линейной задаче $\varepsilon(x,\ u) = \varepsilon(x)$ и единственными отличными от нуля коэффициентными функциями являются $u_1 = G(x,\ t - t_1,\ L)$ (функция Грина рассматриваемой задачи) и $v_1 = G(L,\ t - t_1;\ L) = H(t - t_1,\ L)$. Уравнения погружения

$$(\partial_L+\partial_t)G(x,t-t_1,L)=\varepsilon(L)\int dt_2 G(x,t-t_2;L)H(t_2-t_1,L)_{t_2t_2},$$

$$(\partial_L+2\partial_t)H(t-t_1,L)=\delta(t-t_1)+\varepsilon(L)\int dt_2 H(t-t_2,L)H(t_2-t_1)_{t_2t_2}$$

совпадают с полученными в [3, 4]. В общем случае система уравнений, определяющая коэффициентные функции, является бесконечной и для нахождеиия волнового поля необходимо знать все коэффициентные функции. Эту проблему удается решить при вычислении скорости распространения и амплитуды волнового фронта.

Известно [1, 2], что понятие фронта волны связано с обобщенным решением $u(x,\ t)$ уравнения (1). Пусть в пространстве — времени $(x,\ t)$ выделена некоторая кривая Γ, для каждой точки которой существуют односторонние пределы функции $u(x,\ t)$, но они не равны между собой, так что $u(x,\ t)$ терпит конечный скачок. Тогда движение точки x по Γ можно интерпретировать как распространение разрыва функции $u(x,\ t)$ — фронта волны — со временем. Например, в свободном пространстве ($\varepsilon = 0$) обобщенное решение $u(x,\ t) = \theta(x + t)$ уравнения (1) соответствует волне, фронт которой распространяется с единичными скоростью и амплитудой и достигает точки $(-x)$ в момент времени t, при этом кривая Γ определяется уравнением $x = -t$.

Пусть среда занимает полупространство (это позволяет исключить из рассмотрения процесс отражения волны па левой границе), а функция $\varphi(x - L + t) = (1/2)\theta(x - L + t - t_0)$ в (2) и описывает волну, фронт которой достигает границы $x = L$ в момент времени $t = t_0$. В результате взаимодействия со средой появляются отраженная волна $R(x - L - t)$ и ударная волна в среде. Амплитуду $\widehat{v_0}$ ударной волны на границе $x = L$ в момент времени $t = t_0 + 0$ можно найти из уравнения (7) с $f(t) = \delta(t - t_0)$, а скорость распространения c и амплитуду u_a в слое — из (6). С этой целью необходимо выделить в (6), (7) сингулярные ($\sim$ δ-функции) и регулярные ($\sim$ θ-функции) вклады. В первом случае получим уравнение для c и $\widehat{v_0}$, а во втором — дифференциальиое уравнение для u_a.

Предварительно проанализируем структуру функций $u = u(x,\ t;\ L)$, $u_1 = u_1(x,\ t;\ L;\ s_1) = \delta u/\delta f(s_1)$, $v = v(t,\ L)$, $v_1 = u_1|_{x=L} = v_1(t,\ L;\ s_1)$. Варьируя (6), (7) по $f(s_1)$ и полагая $f = \delta(t - t_0)$, имеем уравнение погружения для u_1, v_1, при этом f в правой части (7) переходит в $\delta(t - t_1)$. Тогда ясно, что v, v_1 содержат множителем $\theta(t - t_0)$ и $\theta(t - t_1)$ соответственно. В силу причинности по параметру L уравнений погружения

$$
(10)\qquad u = \theta(t - \sigma(x,\ L) - t_0)\widehat{u}(x,\ t;\ L),
$$

$$
u_1 = \theta(t - \sigma_1(x,\ L) - s_1)\widehat{u}_1(x,\ t;\ L;\ s_1),
$$

где $\sigma(\sigma_1)$ — время достижения точки x фронтом волны $u(u_1)$. Подставляя (10) в (8) и приравнивая почленно нулю коэффициенты при δ- и θ-функциях, получим

$$
(11)\qquad \sigma = \sigma_1,\ \widehat{u}(x,\ \sigma + t_0;\ L) = \widehat{u}_1(x,\ \sigma_1 + t_0;\ L;\ t_0),
$$

$$
\widehat{u}_t(x,\ t;\ L) = -\,\widehat{u}_{1t_1}(x,\ t;\ L;\ t_1)\,|_{t_1=t_0}.
$$

Скорость распространения c и амплитуда фронта $\widehat{u}_a$ определяются соотношениями $c = 1/\sigma_x$, $u_a = \widehat{u}(x,\ \sigma + t_0;\ L)$. Для нахождения σ и $\widehat{u}$ подставим (10) в (6), (7) и разделим вклады от δ- и θ-функций. Система уравнений для коэффициентов при δ-функции имеет вид

$$
(12)\qquad \sigma_L(x,\ L) = 1 - F(L,\ \widehat{v}(t_0,\ L)),
$$

$$
2\widehat{v}(t_0,\ L) = 1 + F(L,\ \widehat{v}(t_0,\ L))\widehat{v}_1(t_0,\ L;\ t_0).
$$

Отсюда, учитывая (11) и вид функции F (1), получим уравнение для амплитуды ударной волны $\widehat{v}_0 = \widehat{v}_0(L) = \widehat{v}(t_0,\ L)$ на границе $x = L$ в момент времени $t = t_0 + 0$:

$$
(13)\qquad \varepsilon(L,\widehat{v}_0)\,\widehat{v}_0^2 - 2\widehat{v}_0 + 1 = 0.
$$

В общем случае существуют несколько решений $\widehat{v}_0$, нужная ветвь определяется требованием непрерывного сшивания с решением линейной задачи при $\varepsilon = 0$. Подставляя $\widehat{v}_0(L)$ в первое уравнение (12) и интегрируя при условии $\sigma(x,\ x) = 0$, находим $\sigma(x,\ L)$. Ясно, что $\sigma_x(x,\ L) = -\sigma_L(x,\ L)$, тогда, используя (13), имеем выражение для скорости распространения фронта в слое среды:

$$
(14)\qquad c = -\,1\Big/\sqrt{1 - \varepsilon(x,\widehat{v}_0(x))}.
$$

Выпишем оставшиеся уравнения после разделения вкладов в (6), (7):

$$
(15)\qquad (\partial_L + 2\partial_t)\,\widehat{v}(t,\ L) = \widehat{v}_1(t,\ L;\ t_1)\,\partial_{t_1}F(L,\widehat{v}(t_1,\ L))\,|_{t_1=t} -
$$

$$
-\,F(L,\widehat{v}(t_0,\ L))\,\partial_{t_1}\widehat{v}_1(t,\ L;\ t_1)\,|_{t_1=t_0} - \int_{t_0}^{t} dt_1\,\partial_{t_1}\widehat{v}_1\cdot\partial_{t_1}F;
$$

$$
(16)\qquad (\partial_L + \partial_t)\,\widehat{u}(x,\ t;\ L) = \widehat{u}_1(x, t;\ L;\ t_1)\,\partial_{t_1}F(L,\widehat{v}(t_1,\ L))\,|_{t_1=t-\sigma} -
$$

$$
-\,F(L,\widehat{v}(t_0,\ L))\,\partial_{t_1}\widehat{u}_1(x,\ t;\ L;\ t_1)\,|_{t_1=t_0} - \int_{t_0}^{t-\sigma} dt_1\partial_{t_1}\widehat{u}_1\cdot\partial_{t_1}F.
$$

Стоящие под интегралом функции $\widehat{u}_1 = \widehat{u}_1(x,\ t;\ L;\ t_1)$, $\widehat{v}_1 = \widehat{v}_1(t,\ L;\ t_1)$, $F = F(L,\ \widehat{v}(t_1,\ L))$. Уравнение для амплитуды фронта получим из (16) при $t = \sigma + t_0$. Тогда интеграл в правой части (16) обращается в нуль, а второе слагаемое группируется с $(\partial_L + \partial_t)\widehat{u}$ в du_a/dL. Оставшийся справа член содержит $\widehat{u}_1(x,\ \sigma + t_0;\ L;\ t_0) = \widehat{u}(x,\ \sigma + t_0;\ L)$ (см. (11)) и функцию $\widehat{v}_t(t,\ L)\,|_{t=t_0}$, которую находим из (13), (15): $\widehat{v}_t(t,\ L)\,|_{t=t_0} = -\,[\partial_L\widehat{v}_0(L)]^2/F_L(L,\ s)\,s\,|_{s=\widehat{v}_0(L)}$.

В итоге амплитуда волнового фронта u_a при учете определения (1) для функции F удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dL}\ln u_a = -\left(\frac{\partial\widehat{v}_0(L)}{\partial L}\right)^2 \frac{\varepsilon(L, s)+\varepsilon_s(L, s)\,s}{\varepsilon_L(L, s)\,s^2}\Bigg|_{s=\widehat{v}_0(L)} \tag{17}$$

с начальным условием $u_a|_{L=x} = \widehat{v}_0(x)$. Правая часть (17) — известная функция L, тем самым $\ln u_a$ дается простой квадратурой.

Для линейной среды $\varepsilon(x, u) = \varepsilon(x)$, тогда скорость распространения фронта $c = -1/\sqrt{1-\varepsilon(x)}$ и уравнение (17) интегрируется:

$$u_a = \frac{\sqrt{|c(x)\,c(L)|}}{1+|c(L)|} \tag{18}$$

(этот результат получен в [3]). В простейшем случае самовоздействия поля $\varepsilon(x, u) = z(x)u^n$ ($|z(x)| \ll 1$). Амплитуда ударной волны $\widehat{v}_0$ на границе $x = L$ в момент времени $t = t_0 + 0$ определяется из уравнения $z(L)\widehat{v}_0^{\,n+2} = 2\widehat{v}_0 - 1$, нужную ветвь решения которого можно построить с помощью элементарной теории возмущений: $\widehat{v}_0 = \frac{1}{2} + v(z) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} v_i z^i$, $z = z(L)$. Тогда, записывая правую часть уравнения (17) в виде $-(n+1)\,zz_L[\partial_z \ln(1+2v(z))]^2 \equiv -(n+1)\,zz_L\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i z^i$ и интегрируя по L, получим

$$u_a = \widehat{v}_0(x)\exp[\Phi(z(x)) - \Phi(z(L))],\quad \Phi(z) = (n+1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^{i+2}}{i+2}. \tag{19}$$

При $n = 0$ (линейная среда) выражение (19) для амплитуды фронта u_a совпадает с (18), поэтому существенно новым является рассмотрение случая $n \neq 0$. Из (19) видно, что u_a локально зависит от $z(x)$. В частности, если $z(x)$ в (19) — случайная функция, то при малых флуктуациях z отклонение амплитуды фронта от ее значения на границе $x = L$ — также малая величина, следовательно, эффект накопления изменений в амплитуде фронта, связанный с прохождением флуктуирующей среды, отсутствует.

Автор благодарит В. И. Кляцкина за предложенную задачу и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
2. **Лейбович С., Сибасс А.** Нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
3. **Бугров А. Г., Кляцкин В. И.** Метод погружения и решение обратных волновых задач в слоистых средах // Изв. вузов. Радиофизика.— 1989.— Т. 32, № 3.
4. **Кляцкин В. И.** Метод погружения в теории распространения волн.— М.: Наука, 1986.
5. **Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.** О краевых задачах для волнового уравнения // Акуст. журн.— 1982.— Т. 28, № 1.
6. **Калоджеро Ф.** Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния.— М.: Мир, 1972.
7. **Бабиков В. В.** Метод фазовых функций в квантовой механике.— М.: Наука, 1988.
8. **Абрамов Д. И.** Восстановление потенциала взаимодействия по данным рассеяния при помощи нелинейных уравнений // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 3.
9. **Бломберген Н.** Нелинейная оптика.— М.: Мир, 1966.

г. Владивосток

Поступила 12/X 1989 г., в окончательном варианте — 6/IV 1990 г.