

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. Т. Астрелин, В. М. Свешников

(Новосибирск)

При расчете сильноточных релятивистских пучков заряженных частиц, движущихся в электромагнитных полях, необходимо учитывать влияние собственных электрических и магнитных полей, создаваемых самим пучком. Моделированию этого эффекта на ЭВМ посвящены работы [1, 2]. В данной работе описываются численные алгоритмы, реализованные в составе компилирующей системы КСИ-БЭСМ [3], позволяющие охватить широкий класс релятивистских задач с учетом магнитного поля токов, протекающих по металлическим частям рассчитываемого прибора, а также задачи с виртуальными катодами.

Рассматриваются осесимметричные задачи, предполагающие следующую постановку. Потенциал φ электрического поля удовлетворяет уравнению Пуассона

$$(1) \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho$$

(ρ — плотность пространственного заряда; $\Delta = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа) в замкнутой области $\bar{G} = G + \Gamma$. На кусках границы Γ для потенциала задаются граничные условия первого или второго рода. В расчетной области G могут присутствовать внутренние границы раздела двух сред с различными диэлектрическими постоянными. Движение частицы с массой покоя m и зарядом e описывается уравнением

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\gamma m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = e\mathbf{E}_s + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}],$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор; \mathbf{v} — скорость частицы; c — скорость света; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор ($v = |\mathbf{v}|$). Предполагается, что $\mathbf{H} = \mathbf{H}_b + \mathbf{H}_c$, где \mathbf{H}_b — внешнее магнитное поле; \mathbf{H}_c — собственное магнитное поле, создаваемое пучком и токами в металле. Плотность тока \mathbf{j} исследуемого пучка частиц на границе входа в расчетную область является либо заданной функцией координат, либо определяется в процессе решения задачи по закону «3/2» [4], причем предполагается, что выполняется условие

$$(3) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

во всей области.

Опишем вокруг расчетной области G прямоугольник и в нем построим сетку $\bar{\Omega}_h$, образованную линиями $x = x_i$, $y = y_j$. Пусть $h_i^x = x_{i+1} -$

— x_i , $h_j^y = y_{j+1} - y_j$ — шаги сетки, а $h = \sup_{x,y} \max_{i,j} (h_i^x, h_j^y)$. Уравнение (1) и граничные условия на потенциал φ аппроксимируются на Ω_h системой разностных уравнений [4]. Например, для внутренних неколограничных узлов $(i, j) \in \Omega_h$ разностные уравнения имеют вид

$$\frac{2x_{i-\frac{1}{2}}}{x_i h_{i-1}^x (h_{i-1}^x + h_i^x)} \varphi_{i-1,j} + \frac{2x_{i+\frac{1}{2}}}{x_i h_i^x (h_{i-1}^x + h_i^x)} \varphi_{i+1,j} + \frac{2\varphi_{i,j-1}}{h_{j-1}^y (h_{j-1}^y + h_j^y)} + \\ + \frac{2\varphi_{i,j+1}}{h_j^y (h_{j-1}^y + h_j^y)} - 2 \left(\frac{1}{h_{i-1}^x h_i^x} + \frac{1}{h_{j-1}^y h_j^y} \right) \varphi_{i,j} = 4\pi\rho_{i,j},$$

где $\varphi_{i,j}$ — приближенное значение потенциала в узлах Ω_h . Система разностных уравнений решается итерационными методами, в частности, применяется метод последовательности сгущающихся сеток [5—7]. Суть его состоит в том, что для решения задачи на сетке Ω_h предварительно решается вспомогательная задача на более грубой сетке Ω_{h_1} ($h_1 > h$) с меньшим числом узлов. Полученное решение интерполируется в узлы Ω_h и используется в качестве начального приближения для итерационного процесса, при помощи которого находится окончательное решение на сетке Ω_h . Как показывают теоретические оценки и решение практических задач, такой подход позволяет значительно сократить число арифметических действий, требуемых для получения решения с заданной точностью по сравнению со счетом на фиксированной сетке.

Уравнения движения (2) интегрируются численно по следующей разностной схеме:

$$(4) \quad \mathbf{v}_{p+1} = \Delta t_p \frac{e}{m} \sqrt{1 - \beta_{p+\frac{1}{2}}} \left(\mathbf{E}_{p+\frac{1}{2}} + \left[\frac{\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p+1}}{2c} \times \mathbf{H}_{p+\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{2c^2} \times \right. \\ \left. \times \left((\mathbf{v}_{p+1} + \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{E}_{p+\frac{1}{2}} \right) \frac{\mathbf{v}_{p+1} + \mathbf{v}_p}{2} \right) + \mathbf{v}_p, \quad \mathbf{r}_{p+1} = \mathbf{r}_p + \Delta t_p \frac{\mathbf{v}_{p+1} + \mathbf{v}_p}{2},$$

где Δt_p — шаг численного интегрирования; индекс $p + 1/2$ означает, что значение величины вычисляется в «средней» точке $\mathbf{r}_{p+1/2} = \mathbf{r}_p + (\Delta t_p/2)\mathbf{v}_p$; $\beta = v^2/c^2$, причем значение v вычисляется как $v_{p+1/2} = \left(1 - \left(\frac{|e| \varphi_{p+1/2}}{c^2} + 1 \right)^{-1} \right)^{1/2}$, $\varphi \geq 0$. Такая разностная схема имеет погрешность $O(\Delta t^2)$, где $\Delta t = \max_p \Delta t_p$.

При расчете пространственного заряда используется метод «трубок тока» [8, 9], представляющий собой экономичный вариант широко известного метода «больших» частиц.

В целом для получения решения так называемой самосогласованной задачи, определяемой уравнениями (1)—(3) с начальными и граничными условиями, строится итерационный процесс по пространственному заряду. Обычно используется процесс следующего вида:

$$(5) \quad \Delta \varphi^{n+1} = -4\pi\rho^n, \quad \rho^n = \omega\rho^{n,1} + (1 - \omega)\rho^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\rho^{n,1}$ — значение пространственного заряда, полученное при расчете траекторий в поле потенциала φ^n ; $0 < \omega \leq 1$ — параметр релаксации последовательных приближений. Другой возможный алгоритм процесса

последовательных приближений по пространственному заряду приведен в работе [10].

Остановимся подробнее на алгоритме расчета собственного магнитного поля пучка заряженных частиц. В уравнениях движения учитываем лишь азимутальную составляющую собственного магнитного поля пучка

$$H_{\psi} = 2I/cR$$

(I — ток через сечение радиуса R), предполагая остальные составляющие пренебрежимо малыми. Отметим, что в отсутствие внешнего магнитного поля собственное поле пучка содержит лишь азимутальную компоненту, так что для этого случая магнитное поле пучка в алгоритме учитывается полностью.

Для расчета магнитного поля пучка в области G выделяется подобласть G' , в которой проходит исследуемый пучок. В подобласти G' строится прямоугольная неравномерная сетка $\Omega_h = \{x = x_i, y = y_j, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$ с шагами $h_x^i = x_{i+1} - x_i, h_y^j = y_{j+1} - y_j$. Начальный фронт пучка, т.е. границу входа частиц в расчетную область, разобьем на N_T трубок тока (траекторий), каждая из которых несет ток $I_k (k=1, 2, \dots, N_T)$. Пусть для определенности пучок идет в направлении оси y и r_p^k, r_{p+1}^k — расчетные точки k -й траектории, полученные при интегрировании уравнений движения по схеме (4), причем $r_p^k, r_{p+1}^k \in G$. Если найдется линия $y = y_j$ сетки Ω_h такая, что $y_p^k \leq y_j \leq y_{p+1}^k$ (или $y_{p+1}^k \leq y_j \leq y_p^k$), то производится вклад тока траектории I_k (или $-I_k$) в (i, j) -й узел, ближайший к точке $r_{p+1/2}^k = \frac{r_{p+1}^k + r_p^k}{2}$. Существенно, что шаг интегрирования выбирается достаточно малым, так что пересечения траекторией нескольких линий сетки за один шаг не происходит. При отсутствии пересечения линии сетки вклад тока траектории не производится.

На первом шаге интегрирования (r_p^k — начальная точка) ток траектории добавляется ко всем узлам сетки, имеющим координату $y_j \leq y_p^k$ и лежащим на линии $x = x_i$, ближайшей к точке r_p^k .

При попадании траектории на какую-либо металлическую поверхность производится анализ, является ли эта поверхность катодной частью прибора. Если да, т.е. r_{p+1}^k — внешняя точка, принадлежащая области катода, то ток траектории I_k вычитается из узлов (x_i, y_j) ($i = \text{const}, j \leq j_1$), где (x_i, y_{j_1}) — узел, ближайший к точке r_p^k . Если же внешняя точка r_{p+1}^k принадлежит области анода, то ток траектории добавляется ко всем узлам (x_i, y_j) ($i = \text{const}, j \geq j_1$). Таким образом, после расчета всех траекторий в узлах сетки $(i, j) \in \Omega_h$ получается полная пространственная картина распределения токов I_{ij} исследуемой системы.

Значения собственного магнитного поля токов в точках x_i, y_j вычисляются по формуле

$$(H_{\psi})_{ij} = \frac{2 \sum_{s=0}^i I_{sj}}{cx_i'}$$

При решении самосогласованной задачи параллельно с процессом последовательных приближений по пространственному заряду (5) проводится релаксация магнитного поля

$$H_{\psi}^n = \omega H_{\psi}^{n,1} + (1 - \omega) H_{\psi}^{n-1},$$

где $H_\psi^n = \{(H_\psi^n)_{ij}\}$ — вектор с компонентами, являющимися значениями магнитного поля в узлах Ω_h ; ω — та же величина, что и в (5); H_ψ^{n-1} — магнитное поле, создаваемое токами n -го приближения. Отметим, что полагается $H_\psi^0 = 0$. Траектории n -го приближения рассчитываются в поле H_ψ^{n-1} , причем значение $(H_\psi)_{p+1/2}$ в формуле (4) вычисляется путем линейной интерполяции величин $(H_\psi^{n-1})_{ij}$ в близлежащих узлах:

$$(H_\psi^{n-1})_{p+1/2} = (H_\psi^{n-1})_{ij} + \frac{y_{p+1/2} - y_j}{h_j^y} [(H_\psi^{n-1})_{ij+1} - (H_\psi^{n-1})_{ij}],$$

где (i, j) — узел, определяемый неравенствами $0 \leq x_{p+1/2} - x_i \leq h_i^x$, $0 \leq y_{p+1/2} - y_j \leq h_j^y$.

Рассмотренные алгоритмы реализованы в составе библиотеки модулей компилирующей системы КСИ-БЭСМ [3]. Данная система позволяет рассчитывать стационарные и нестационарные [11] пучки заряженных частиц различных знаков заряда и масс с учетом начального энергетического и углового распределения, явлений вторичной эмиссии [12] и собственного электромагнитного поля пучка.

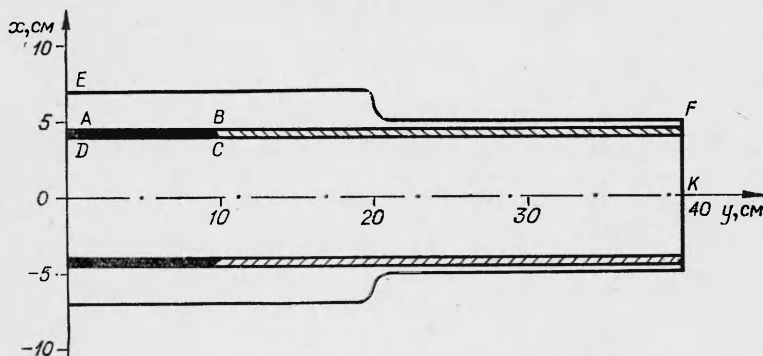
При помощи КСИ-БЭСМ решен ряд задач. Для исследования погрешности изложенных выше алгоритмов рассматривалась задача о расширении пучка релятивистских частиц в эквипотенциальном пространстве. Для численного расчета взята следующая модель. Монохроматический электронный пучок с током $I = 1$ кА, начальный радиус которого $R_0 = 0,5$ см, со скоростью $v_0 = c\gamma^{-1}(\gamma^2 - 1)^{1/2}$ ($\gamma = 4$) влетает в цилиндр радиуса $R = 1,5$ см и длины $l = 6$ см. На поверхности входа частиц и на оси цилиндра задается условие для потенциала $\partial\phi/\partial n = 0$, на другом торце цилиндра и на его боковой поверхности $\phi = 1500$ кВ. Пучок движется вдоль оси цилиндра, совпадающей с осью y системы координат. Сетка Ω_h вдоль оси y равномерна с числом узлов $m_y = 120$, вдоль x имеет две зоны с границами $x_0 = 0$, $x_1 = 0,7$ см, $x_2 = 1,5$ см и числом узлов в них $l_1^x = 28$, $l_2^x = 10$. Сетка Ω_h имеет следующие параметры: $y_0 = 0$, $y_1^x = 6$ см, $m_y = 120$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,45$ см, $x_2 = 0,8$ см, $l_1^x = 9$, $l_2^x = 14$. Пучок моделировался 60 траекториями. В таблице приводится сравнение значений приращения радиуса пучка Δr , полученных из численных расчетов, с приближенными аналитическими данными [13]

$$\Delta r_A = \frac{3 \cdot 10^9 e I y^2}{m (\gamma \beta c)^3 R_0}$$

(I — ток, А, все остальные величины в единицах СГСЕ) при некоторых значениях координат y .

Как видно из таблицы, относительная погрешность величины расширения пучка $\delta = (|\Delta r - \Delta r_A|)/\Delta r_A$ не превосходит 10%. Относительная погрешность вычисления радиуса при этом не превосходит 1%. Для большинства практических задач такая точность решения является достаточной.

y	3	3,5	4	4,5	5
Δr_A	0,0190	0,0258	0,0337	0,0427	0,0527
Δr	0,0173	0,0236	0,0312	0,0394	0,0476
$\delta, \%$	8,9	8,5	7,4	7,7	9,6



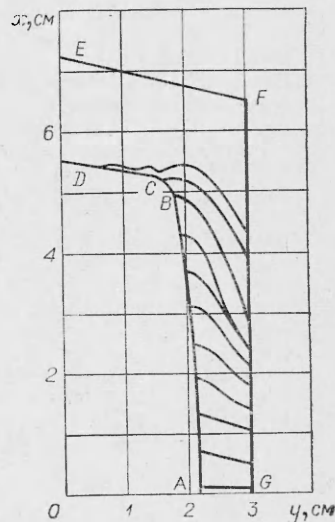
Ф и г. 1

Совместно с С. Я. Беломятцевым [14] проводился расчет пучка частиц в диодном промежутке (фиг. 1), эмиттировавших с поверхности $ABCD$ с плотностью тока, ограниченной пространственным зарядом по закону «3/2». Граничные условия: на $ABCD$ $\varphi = 0$, на AE , OD , FK , OK (ось симметрии системы) $\partial\varphi/\partial n = 0$, на EF $\varphi = \varphi_0$. Требовалось найти минимальную величину внешнего магнитного поля H_z , при котором электроны пучка не попадают на стенки дрейфовой камеры EF . При $\varphi_0 = 2,5$ МВ и $H_z = 10$ кГс пучок, имеющий начальную ширину 0,5 см, расширяется до 0,8 см, так что величина зазора между пучком и стенкой камеры составляет 0,2 см. Энергия электронов внутреннего слоя на выходе системы составляет 2 МВ, а наружного — 2,3 МВ, т. е. разброс электронов пучка по энергии составляет 15%. Максимальные скорости электронов при этом достигают величины $c/3$.

При расчете мощных релятивистских пучков в отсутствие внешних магнитных полей азимутальное магнитное поле пучка и токов в металле оказывает существенное влияние на поведение частиц. Такая ситуация имеет место, например, в задачах расчета магнитной изоляции при пропускании мощных импульсных токов в вакуумных коаксиальных линиях [15], а также при фокусировке сильноточного электронного пучка в диоде.

Рассчитывался диодный узел ускорителя «Акватен» [16] (фиг. 2). Поверхность катода представляет сегмент сферы AB , сопряженный с конической поверхностью CD . Радиус кривизны участка сопряжения BC составляет 0,4 см. Расчет проводился при нулевом потенциале катода $ABCD$ и потенциале анода EFG , равном 1 МВ.

Из расчета траекторий, показанных на фиг. 2, следует значительная фокусировка электронов под влиянием азимутального собственного магнитного поля пучка. При этом угловой разброс электронов на выходе достигает 60° . Вычисленная величина полного тока диода, равная 100 кА, находится в хорошем соответствии с теоретической оценкой 130 кА по релятивистскому аналогу закона «3/2» [17].



Ф и г. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Импульсный источник γ -излучения «Гермес-II». — Сб. пер. Атомная техника за рубежом. М., 1970, № 3.
2. Poukey J. W., Freeman J. R., Yonas S. Simulations of relativistic electron beam diodes. — *J. vacuum science and techn.*, 1973, vol. 10, N 6.
3. Блейвас И. М., Голубцов Б. И., Ильин В. П., Попова Г. С., Свешников В. М. Комплекс программ для решения на БЭСМ-6 широкого класса задач статической электроники (компилирующая система КСИ-БЭСМ). — В кн.: Методы расчета электронно-оптических систем. Ч. II. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1973.
4. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрооптики. Новосибирск, «Наука», 1974.
5. Федоренко Р. П. О скорости сходимости одного итерационного процесса. — ЖВММФ, 1964, т. 4, № 3.
6. Бахвалов Н. С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор. — ЖВММФ, 1966, т. 6, № 5.
7. Ильин В. П., Свешников В. М. О разностных методах на последовательности сеток. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 2, № 1. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1971.
8. Захаров А. В., Самарский А. А., Свешников А. Г. Применение метода больших частиц к расчету движения заряженного пучка в электромагнитном поле с учетом пространственного заряда пучка. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Т. 16. М., изд. Москв. ун-та, 1971.
9. Buneman O., Kooyers G. Computer simulations of the electron mixing mechanism in ion propulsion. — *AIAA J.*, 1963, vol. 1, N 11.
10. Блейвас И. М., Зелинский Э. М., Ильин В. П. Эффективный метод ускорения сходимости процесса последовательных приближений при решении самосогласованных задач электронной оптики. — В кн.: Методы расчета электронно-оптических систем. М., «Наука», 1977.
11. Блейвас И. М., Ильин В. П., Свешников В. М. Численный расчет нестационарных пучков заряженных частиц. — ПМТФ, 1974, № 6.
12. Акимов П. И., Голубцов Б. И., Ильин В. П. Расчет электронно-оптических задач с учетом вторичной эмиссии. — В кн.: Методы расчета электронно-оптических систем. Ч. II. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1973.
13. Батыгин В. В., Топтыгин И. И. Сборник задач по электродинамике. М., «Наука», 1970.
14. Belomytsev S. Ya., Sveshnikov V. M., Popova G. S. Beam parameter calculation in coaxial vacuum diode. — In: Proceedings of the VIIth International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum. Novosibirsk, 1976.
15. Ron A., Mondelli A. A., Rostoker N. — *IEEE Trans. Plasma Science*, 1973, PS-1.
16. Авроров А. П., Астрелин В. Т., Бояринцев Э. Л., Капитонов В. А., Логунов В. М. Импульсный ускоритель электронов «Акваген». — В кн.: Доклады Всесоюзной конференции по инженерным проблемам термоядерных реакторов. Т. II. Ленинград, изд. НИИЭФА, 1977.
17. Брейзман Б. И., Рютов Д. Д. К теории фокусировки релятивистского электронного пучка в диоде. — *Докл. АН СССР*, 1975, т. 225,

УДК 536.5.55

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

В. Н. Богомолов, И. И. Захаркин

(Москва)

Задача определения высоких и сверхвысоких температур является актуальной в связи с освоением техники новых источников энергии большой мощности. Известные методы измерения температур с использованием термометров, ультразвука, а также оптические методы имеют ограничения по диапазону измеряемых величин, либо их использование связано с большими трудностями практической реализации.