

## КАНАЛОВАЯ МОДЕЛЬ СИЛЬНОТОЧНОГО РАЗРЯДА В РЕЛЬСОВОМ УСКОРИТЕЛЕ

С. В. Кухтецкий

(Красноярск)

Модель «плазменного поршня» [1, 2] часто используется в теоретическом анализе работы некоторых МГД-устройств с локализованным разрядом. Однако эксперименты, проведенные на рельсовом ускорителе с внешним магнитным полем, показали, что при высоких давлениях ( $p_\infty < 25$  кПа) наблюдается значительное превышение измеренного значения скорости разряда над рассчитанным по модели поршня [3]. В дальнейших опытах на этой же установке и на более длинном канале получено, что существуют две стадии движения разряда уже после выхода разрядного тока на стационарное значение. Сначала он заполняет все поперечное сечение канала, и повышенную скорость можно объяснить частичным просачиванием сжимаемого газа в токовую область [4]. Затем, по прошествии 20—25 см, разряд сжимается в поперечном направлении и далее движется, заполняя не более 50—60% сечения канала [5]. При этом становится существенным обтекание токовой области частью толкаемого газа.

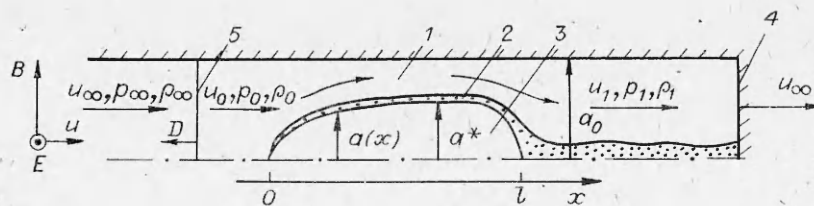
Детальный анализ структуры течения, представляющий трудную задачу даже при обтекании твердого недеформируемого тела, в рассматриваемом случае осложняется тем, что сама форма обтекаемого разряда, будучи весьма нерегулярной, в свою очередь зависит от параметров потока. В связи с этим в данной работе сделана попытка учета обтекания в простейшей квазиодномерной стационарной постановке при следующих предположениях.

1. Всю область за ударной волной (рис. 1) можно разбить на три квазиодномерные зоны: внешнее по отношению к разряду изэнтропическое течение 1, тонкий тепловой слой 2 на границе разряд — газ, переходящий в тепловой след за разрядом, и сама токовая область 3\*.

2. Тепловой слой представляет собой диссоциированный и прогретый разрядом газ, степень ионизации которого много меньше, чем в токовой области, а скорость газа в нем совпадает со скоростью внешнего изэнтропического течения. Однако в отличие от области 1 скорость в следе дозвуковая, в связи с чем задняя торцевая стенка ускорителя 4 оказывает существенное влияние на параметры всего течения. Тепловые слои полагаются тонкими, поэтому другие эффекты, связанные с их присутствием, такие как вытеснение и т. п., не учитываются.

3. Конвективные процессы внутри разряда 3 не учитываются, а энергобаланс рассматривается в двух предельных случаях: оптически тонкая плазма, когда все джоулево тепло, выделяющееся в разряде, уносится объемным излучением, и оптически плотная плазма, когда разряд излучает с поверхности как абсолютно черное тело. Энергия излучения поглощается в тепловом слое и сносится вниз по потоку.

4. Возможный отрыв потока и вихри в хвостовой части разряда не сказываются на интегральных характеристиках процесса, поскольку, как будет показано ниже, основное падение давления (и, значит, вклад в силу сопротивления) происходит в той области, где кривизна боковой кромки разряда мала.



Р и с. 1

\* На рис. 1 и ниже система отсчета связана с разрядом.

Таким образом, схема течения выглядит следующим образом (см. рис. 1). Сверхзвуковой поток со скоростью  $u_\infty$ , известным давлением  $p_\infty$  и плотностью  $\rho_\infty$  тормозится на фронте ударной волны  $B$ , отходящей от разряда со скоростью  $D$ ,  $a_0$  — полуширина канала,  $a(x)$  — полуширина обтекаемой токовой области,  $0 \leq x \leq l$ . Все сечения берутся на единицу высоты канала  $h$ . После ударной волны течение в области  $I$  аналогично течению в сопле Лаваля с критическим сечением  $a_0 = a^*$  и равными входным и выходным сечениями  $a_0$ . Параметры газа на входе сопла —  $u_0, p_0, \rho_0$ , на выходе —  $u_1, p_1, \rho_1$ . В области  $0 \leq x \leq l$  скорость газа, давление и плотность равны  $u(x), p(x)$  и  $\rho(x)$ . Используя известные формулы [6] для изэнтропического течения в канале переменного сечения

$$(1) \quad \left(1 - \frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{M_0^2}{M^2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

условие  $M = 1$  при  $a = a^*$  и равенство входного и выходного сечений, имеем

$$(2) \quad \left(1 - \frac{a^*}{a_0}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} M_0^2}{\left(\frac{2}{\gamma-1} + M_0^2\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} = \frac{\left(\frac{1}{M_1^2}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_1^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}};$$

$$(3) \quad \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{M_0^2}{M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Здесь  $M = u/c$  — число Маха;  $\gamma$  — показатель адиабаты. Из (1), исключая  $M$  и используя (2) и (3), можно связать форму разряда  $a(x)$  с давлением  $p(x)$ :

$$(4) \quad \frac{a}{a_0} = 1 - \frac{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{1/2}}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right] \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\right] \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\}^{1/2}}.$$

В стационарном случае распределения давления в области  $I$  и в разряде должны совпадать, а градиент давления в разряде уравновешиваться силой  $jB$  ( $j$  — плотность тока,  $B$  — индукция магнитного поля). Таким образом,

$$(5) \quad \partial p / \partial x = -jB, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Умножая обе части (5) на  $a(x)$  и интегрируя по  $x$ , находим

$$\int_0^l a \frac{\partial p}{\partial x} dx = -a_0 p_0 \int_{p_1/p_0}^1 \frac{a}{a_0} d\left(\frac{p}{p_0}\right) = -B \int_0^l j a dx = -\frac{1}{2} IB$$

( $I$  — полный разрядный ток) или в безразмерной форме

$$(6) \quad \frac{IB}{2a_0 p_\infty} \frac{p_\infty}{p_0} = \int_{p_1/p_0}^1 \frac{a}{a_0} d\left(\frac{p}{p_0}\right).$$

Подставляя в (6) выражение (4) и произведя интегрирование, получаем

$$(7) \quad \frac{p_0}{p_\infty} = \frac{\frac{IB}{2a_0 p_{c0}}}{1 - \frac{p_1}{p_0} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\gamma} - \frac{p_1}{p_0}}{1 + \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\gamma}}}$$

Используя соотношения Гюгонио на фронте ударной волны, легко связать скорость набегающего потока  $M_\infty = u_\infty/c_\infty$  с  $p_0/p_\infty$ :

$$(8) \quad M_\infty = \frac{c_0}{c_\infty} M_0 + \frac{\frac{p_0}{p_\infty} - 1}{\left[ \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_0}{p_{c0}} + 1 \right) \right]^{1/2}},$$

где  $c_0/c_\infty$  — отношение скорости звука за фронтом ударной волны к скорости звука в набегающем потоке, выраженное через  $p_0/p_\infty$ . Учитывая замечание о тепловом следе, высказанное выше, можно положить, что в стационарном случае скорость газа  $u_1$  будет совпадать со скоростью задней торцевой стенки ускорителя, т. е.  $u_1 = u_\infty$ , несмотря на то что  $M_1 = u_1/c_1 > 1$ . В безразмерной форме

$$(9) \quad M_1 \frac{c_1}{c_0} \frac{c_0}{c_\infty} = M_\infty.$$

Из условия изэнтропичности течения в области  $I$  имеем

$$(10) \quad \frac{c_1}{c_0} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.$$

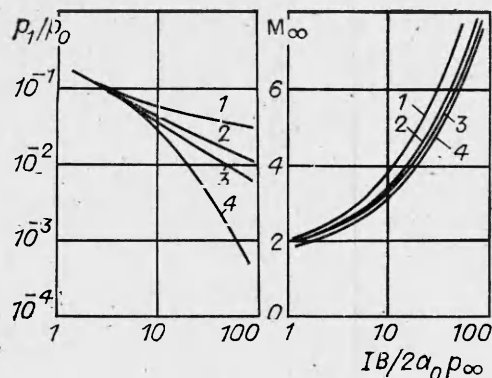
Из (2), (3), (8), (9) и (10), исключая  $M_1$ ,  $M_0$  и  $M_\infty$ , получаем

$$(11) \quad \frac{\left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]}{1 + \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{\left( \frac{p_0}{p_\infty} - 1 \right)^2}{\gamma \frac{p_0}{p_\infty} \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_0}{p_\infty} \right)}.$$

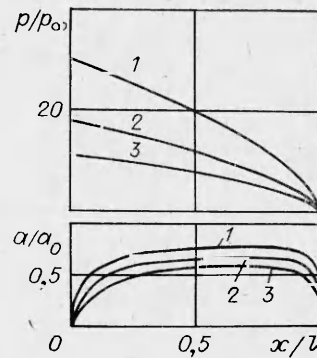
Решение этого уравнения совместно с (7) дает зависимость  $p_1/p_0$  от параметра  $IB/2a_0 p_\infty$ , а зная  $p_1/p_0$ , легко по приведенным выше формулам рассчитать все параметры потока вне разряда в области  $x \leq 0$  и  $x \geq l$ . На рис. 2 представлены зависимости  $M_\infty$  (в лабораторной системе координат  $M_\infty$  — безразмерная скорость разряда) и  $p_1/p_0$  от  $IB/2a_0 p_\infty$  для  $\gamma = 1,667$ ; 1,4; 1,333; 1,2 (линии 1—4).

Значения  $p_1/p_0$  дают необходимые граничные условия для решения уравнения (5). Для ускорителей плотных газов при значениях внешнего магнитного поля  $B \sim 1-2$  Тл и разрядных токах  $I \sim 10-40$  кА индуцированное электрическое поле  $uB$  в несколько раз меньше внешнего поля  $E$ , и им можно пренебречь. Таким образом,  $j = \sigma E$  ( $\sigma$  — проводимость плазмы). Полагая плазму однородной вдоль тока (по оси  $z$ ) и учитывая, что проводимость электродов много больше проводимости плазмы, получаем, что  $E$  не зависит от  $x$ . Следовательно, для решения (5) необходимо конкретизировать лишь зависимость  $\sigma$  от  $p$ . Для этого рассмотрим энергетический баланс в токовой области.

1. *Оптически тонкая плазма.* Характерное время процесса в ускорителе  $\sim 10^{-4}-10^{-3}$  с, поэтому на пространственных масштабах  $\gg i-10$  см влиянием теплопроводности можно пренебречь. Поскольку конвек-



Р и с. 2



Р и с. 3

тивные процессы внутри токовой области не рассматриваются, в стационарном случае

$$(12) \quad \sigma E^2 = Q_R \text{ при } 0 \leq x \leq l, |y| \leq a(x).$$

В общем случае проводимость  $\sigma$  и мощность объемных лучистых потерь  $Q_R$  являются функциями давления  $p$  и температуры  $T$ . Однако, поскольку проводимость здесь анализ носит лишь качественный характер, учтем, что  $\sigma$  слабо зависит от  $p$ , а  $Q_R$  с точностью до множителя порядка единицы можно представить в виде  $Q_R(p, T) = p q_R(T)$ , где  $q_R$  зависит только от температуры. Имеем

$$(13) \quad \sigma(T) E^2 = p q_R(T)$$

( $\sigma(T)$  и  $q_R(T)$  — известные функции). Разрешая это уравнение относительно  $T$  и подставляя в  $\sigma(T)$ , находим

$$(14) \quad \sigma = \sigma(p/E^2).$$

Для чистого воздуха зависимость  $\sigma$  от  $p/E^2$  хорошо аппроксимируется выражением

$$(15) \quad \sigma = \alpha \left( \frac{p}{E^2} \right)^{-\beta},$$

где  $\alpha = 0,27$  и  $\beta = 0,71$ , если  $\sigma$  в Ом·см,  $E$  в В/см и  $p$  в  $10^5$  Па. Используя (15), получаем из (5)

$$(16) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma \left( \frac{p}{E^2} \right) EB = -\alpha \left( \frac{p}{E^2} \right)^{-\beta} EB.$$

Интегрируя (1) с учетом того, что  $p = p_0$  при  $x = 0$ , имеем

$$\frac{1}{\beta+1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\beta+1} \right] = \frac{\alpha B E^{2\beta+1}}{p_0^{\beta+1}} x.$$

Поскольку при  $x = l$   $p = p_1$ , окончательно

$$(17) \quad \frac{p}{p_0} = \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\beta+1} \right] \frac{x}{l} \right\}^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Это выражение позволяет найти зависимость всех остальных параметров потока от  $x/l$  в области  $0 \leq x \leq l$ , а также форму разряда  $a/a_0$  из (4).

На рис. 3 представлены зависимости  $p/p_\infty$  и  $a/a_0$  от  $x/l$  для  $\gamma = 1,4$  и  $p_m = IB/2a_0 p_\infty = 20; 10; 5$  (линии 1—3). Отметим, что кривизна боковой кромки разряда очень мала в интервале  $0,1 \leq x/l \leq 0,95$ . При больших  $p_m$  сечение разряда в плоскости  $(x, y)$  почти прямоугольное. Это может существенно облегчить анализ процессов на периферии разряда (тепловом слое 2, см. рис. 1), где роль теплопроводности уже не будет мала. Известно [7], что сила сопротивления свободно обтекаемого тела

при больших числах Рейнольдса в основном обусловлена резким падением давления в кормовой части тела, вызванным отрывом пограничного слоя и формированием вихревого течения в застойной зоне. В данном случае при обтекании тела в канале градиент давления вдоль течения отрицательный, поэтому отрыв, по всей видимости, может произойти лишь непосредственно вблизи кормовой части, т. е. при  $x/l \gtrsim 0,95$ . Как видно из рис. 3, на участок  $0,95 \leq x/l \leq 1$  приходится только 10—15% полного перепада давления в потоке, поэтому учет отрыва не дает большого вклада в силу сопротивления разряда.

Рассмотренная каналовая модель разряда в приближении оптически тонкой плазмы содержит один неопределенный параметр — длину разряда  $l$  (или, что эквивалентно, напряженность электрического поля  $E$ ), который необходимо задавать из эксперимента либо вводить так называемую температуру ионизации [8], величина которой в общем достаточно произвольна. Выбор локальной модели теплового баланса (12) и пренебрежение процессами в тепловом пограничном слое делают невозможным применение каких-либо вариационных принципов.

2. *Оптически плотная плазма.* Джоулево тепло выносится из ядра разряда на периферию лучистой теплопроводностью, поглощается в тепловом слое и сносится вниз по потоку. По существу, это предельный случай конвективного теплообмена разряда с обтекающим его газом и может рассматриваться лишь как верхняя граничная оценка энергетических потерь в рельсовом ускорителе. Как и раньше, тепловой слой полагается тонким. В случае оптически плотной плазмы стационарная температура в разряде  $T_p$  одинакова во всей области  $0 \leq x \leq l$ ,  $|y| \leq a(x)$  и совпадает с температурой поверхности разряда. Имеем уравнения силового баланса

$$(18) \quad \partial p / \partial x = -\sigma E B \approx \text{const}$$

и энергобаланса

$$(19) \quad hIE = \varepsilon \sigma_S T_f^4 \left[ 2h \int_0^l \sqrt{1 + \left( \frac{da}{dx} \right)^2} dx + 2 \int_0^l a dx \right],$$

где  $\sigma_S$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $h$  — высота разряда;  $\varepsilon$  — эффективный коэффициент черноты. Первый член в правой части (19) представляет собой площадь боковой (обтекаемой) поверхности разряда, а второй — площадь приэлектродных областей. Для простоты другими потерями в электроды пренебрегаем. Делая замену переменных  $x \rightarrow p$  при помощи (18), имеем в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \frac{IE}{\varepsilon \sigma_S T_f^4 2a_0} &= \int_{p_1/p_0}^1 \left\{ \left( \frac{2a_0 p_0}{IB} \frac{I}{\sigma E 2a_0^2} \right)^2 + \left( \frac{da/a_0}{dp/p_0} \right)^2 \right\}^{1/2} d \left( \frac{p}{p_0} \right) + \\ &+ \frac{2a_0}{h} \frac{2a_0 p_0}{IB} \frac{I}{\sigma E 2a_0^2} \int_{p_1/p_0}^1 \frac{a}{a_0} d \left( \frac{p}{p_0} \right) \end{aligned}$$

или, используя (6), находим

$$(19)' \quad \frac{IE}{\varepsilon \sigma_S T_f^4 2a_0} = \int_{p_1/p_0}^1 \left\{ \left( \frac{2a_0 p_0}{IB} \frac{I}{\sigma E 2a_0^2} \right)^2 + \left( \frac{da/a_0}{dp/p_0} \right)^2 \right\}^{1/2} d \frac{p}{p_0} + \frac{2a_0}{h} \frac{I}{\sigma E 2a_0^2}.$$

Здесь  $a/a_0$  выражается через  $p/p_0$  и  $p_1/p_0$  из (4),  $2a_0 p_0 / IB$  из (7), а  $p_1/p_0$  из решения внешней задачи при заданных  $\gamma$  и  $IB/2a_0 p_\infty$ . Таким образом, уравнение (19)' дает связь пяти безразмерных параметров вида

$$(20) \quad \frac{IE}{\varepsilon \sigma_S T_f^4 2a_0} = \Phi \left( \frac{I}{\sigma E 2a_0^2}, \frac{IB}{2a_0 p_\infty}, \frac{2a_0}{h}, \gamma \right).$$

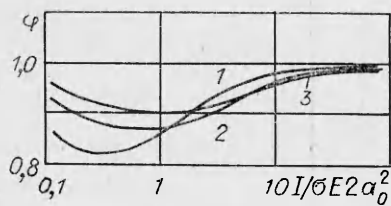


Рис. 4

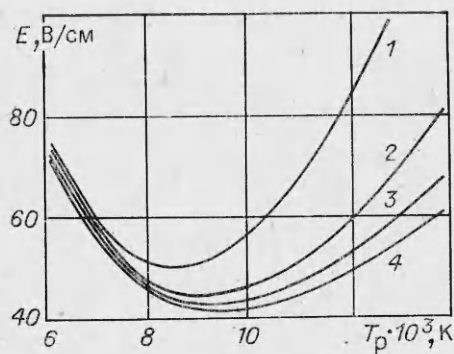


Рис. 5

Аналитического выражения для  $\Phi$  получить не удалось, однако эта функция хорошо аппроксимируется линейной зависимостью от  $I/\sigma E 2a_0^2$

$$(21) \quad \frac{IE}{\varepsilon \sigma_S T_p^4 2a_0} = \alpha \frac{I}{\sigma E 2a_0^2} + \beta,$$

где

$$\alpha = \alpha \left( \frac{IB}{2a_0 p_\infty}, \frac{2a_0}{h}, \gamma \right) = \frac{2a_0 p_0}{IB} \left( 1 - \frac{p_1}{p_0} \right) + \frac{2a_0}{h}; \quad \beta = 2 \frac{a^*}{a_0},$$

$a^*$  — критическое сечение разряда (см. рис. 1 и (2)). Действительно, на рис. 4 приведены зависимости отношения  $\Phi$  правых частей уравнений (20) и (21) от  $I/\sigma E 2a_0^2$  для  $\gamma = 1,4$  и  $2a_0/h = 1$  ( $p_m = IB/2a_0 p_\infty = 2,5; 10; 40$  — линии 1—3). Видно, что отличие линейной зависимости от точной не более 20%. С использованием (21)

$$(22) \quad E = \frac{\varepsilon \sigma_S T_p^4 2a_0}{I} \left\{ \frac{a^*}{a_0} + \left[ \left( \frac{a^*}{a_0} \right)^2 + \frac{\left( \frac{2a_0 p_0}{IB} \left( 1 - \frac{p_1}{p_0} \right) + \frac{2a_0}{h} \right) I^2}{\sigma 2a_0^2 \varepsilon \sigma_S T_p^4 2a_0} \right]^{1/2} \right\}.$$

На рис. 5 представлена эта зависимость для воздуха при  $\gamma = 1,4$ ,  $2a_0 = 4$  см,  $2a_0/h = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $IB/2a_0 p_\infty = 10$ . При этом  $p_0/p_\infty = 17,94$ ,  $p_1/p_0 = 0,0436$  и  $a^*/a_0 = 0,687$ . Кривые 1—4 отвечают  $I = 10; 20; 30; 40$  кА. Поскольку лучистая теплопроводность носит диффузионный характер и предполагается, что конвективных потоков внутри токовой области нет, разряд представляет собой диссипативную систему, для которой справедлив принцип минимального производства энтропии. В применении к электрической дуге он известен как принцип Штеенбека [9]. Как видно из рис. 5, кривые  $E = E(T_p)$  имеют выраженные минимумы, что позволяет, применяя принцип Штеенбека, определить  $T_p$  и  $E$ , тем самым полностью решив задачу. Как видно, значение  $E$  меняется в диапазоне 40—50 В/см, а  $T_p = 8500$ —9500 К. Мощность, выделяющаяся при этом в разряде высотой  $h = 4$  см, равна  $IEh$  и изменяется в пределах 2—6,5 МВт. Экспериментально измеренная величина  $IU \approx IEh$  без учета приэлектродного падения потенциала такого же порядка ( $\sim 5$  МВт). Детальное сравнение с экспериментом провести трудно, поскольку при работе на молекулярных газах напряжение на электродах испытывает сильные пульсации, вызванные, видимо, особенностями движения приэлектродных участков. Непосредственное измерение  $E$  в столбе разряда не проводилось.

Форма разряда оптически плотной плазмы незначительно отличается от случая прозрачной плазмы (см. рис. 3). Кормовая часть более острая, что связано с линейной зависимостью  $p$  от  $x$ , и так же хорошо выражен пологий профиль при  $0,1 \leq x/l \leq 0,9$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Деревянко В. А., Славин В. С., Соколов В. С. МГД-генератор на продуктах газификации бурых углей // ПМТФ.— 1980.— № 5.
2. Voreham B. W. Study of travelling conduction wave accelerator // AIAA J.— 1976.— V. 14, N 1.
3. Кухтецкий С. В., Лебедев А. Д., Любочко В. А. Некоторые особенности движения сильнооточного квазистационарного разряда в магнитном поле // Тезисы докл. IX Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы.— Фрунзе: Илим, 1983.
4. Кухтецкий С. В., Лебедев А. Д., Любочко В. А. Движение сильнооточного разряда в плотном газе // ТВТ.— 1985.— № 3.
5. Кухтецкий С. В., Любочко В. А. и др. Интегральная модель разряда в рельсовом ускорителе с учетом обтекания // ПМТФ.— 1986.— № 1.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
8. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов.— М.: Наука, 1980.
9. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма.— М.: ИЛ, 1961.

Поступила 14/III 1986 г.

УДК 532.51

### О ПРИЛОЖЕНИЯХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ К ПОЛУЧЕНИЮ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

В работе исследуются свойства интегралов движения идеальной несжимаемой жидкости, полезные с точки зрения приложений к задачам устойчивости. Из интегралов движения построен функционал, для которого заданное установившееся течение жидкости — стационарная точка. В случаях знакоопределенности второй вариации этот функционал может играть роль функции Ляпунова [1, 2] в задаче выявления классов устойчивых течений. Анализ второй вариации позволил сделать вывод о том, что в общем случае знакоопределенности нет, она имеет место только для специальных классов движений, характеризующихся наличием одного из типов симметрии. Общие выражения для второй вариации являются интегралами линеаризованных на данном стационарном течении уравнений движения. Анализируются различные формы этих интегралов, и приведены аналогичные интегралы для течений непрерывно стратифицированной по плотности жидкости, находящейся в поле тяжести. Обсуждается гидродинамический смысл результатов и их связь с вариационным принципом [3, 4]. Работа имеет методический характер.

1. Основные уравнения. Рассматриваются пространственные движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в области  $\tau$  с неподвижной твердой границей  $\partial\tau$ . Используются обозначения:  $x_1, x_2, x_3$  и  $t$  — декартовы координаты и время;  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  — нормаль к  $\partial\tau$ ;  $p$  и  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — поле давления и скорости. Уравнения движения берутся в форме

$$(1.1) \quad D\mathbf{u} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

На границе  $\partial\tau$  выполняются условия непротекания

$$(1.2) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \equiv u_i n_i = 0.$$

По повторяющимся векторным и тензорным индексам повсюду подразумевается суммирование.

Пусть  $a(\mathbf{x}, t)$  есть скалярная функция, значения которой сохраняются в каждой жидкой частице:

$$(1.3) \quad Da = 0.$$

При помощи поля завихренности  $\omega$  вводится еще одна функция

$$(1.4) \quad \lambda(\mathbf{x}, t) \equiv (\omega \cdot \nabla)a,$$