

**ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ
ГАРМОНИЧЕСКИХ АНТИПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ
ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ**

С. О. Воробьева, А. А. Ляпин, М. Г. Селезнев
(Ростов-на-Дону)

1. Постановка краевой задачи об антиплоских установившихся гармонических колебаниях. Пусть упругая среда занимает в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) область $x \geq -b$, $r = \sqrt{(x-h)^2 + y^2} \geq a$. Слой толщины b ($-b \leq x \leq 0$) с параметрами ρ , μ (ρ — плотность, μ — модуль сдвига) жестко сцеплен с полупространством $x \geq 0$, характеризуемым параметрами ρ_1 , μ_1 , целиком содержащим горизонтальную, цилиндрическую полость радиуса a с центром в точке $(h, 0)$.

На границе области заданы распределенные сдвиговые усилия, совершающие гармонические установившиеся колебания во времени с частотой ω :

$$(1.1) \quad x = -b: \tau_{xz} = Z(y) e^{-i\omega t}, \quad r = a: \tau_{rz}^{(1)} = T(\varphi) e^{-i\omega t}.$$

На границе раздела слоя и полупространства ($x = 0$) заданы условия жесткого сцепления, определяющие равенство смещений $(w(x, y))$ и касательных напряжений τ_{xz} :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} w(x, y)|_{x \rightarrow -0} &= w^{(1)}(x, y)|_{x \rightarrow +0}, \\ \tau_{xz}(x, y)|_{x \rightarrow -0} &= \tau_{xz}(x, y)|_{x \rightarrow +0}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже индексу ⁽¹⁾ соответствуют характеристики полупространства. Движение среды описывается динамическими уравнениями теории упругости в смещениях — уравнениями Ламэ [1]. Решение сформулированной краевой задачи ищем в классе суммируемых функций.

Обозначим контактные напряжения на границе слоя и полупространства

$$(1.3) \quad x = 0: \tau_{xz}(0, y, t) = R(y) e^{-i\omega t} = \tau_{xz}^{(1)}(0, y, t).$$

В этом случае решение краевой задачи для упругого слоя $-b \leq x \leq 0$ с граничными условиями (1.1), (1.3) строим методом преобразования Фурье. При этом выражение для амплитуды смещения точек слоя получаем как

$$(1.4) \quad w(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} (\tilde{R}(\alpha) \operatorname{ch} \sigma(\bar{x} - \bar{b}) - \tilde{Z}(\alpha) \operatorname{ch} \sigma \bar{x}) / (\sigma \operatorname{sh} \sigma \bar{b}) e^{-i\alpha \bar{y}} d\alpha,$$

где $\tilde{R}(\alpha) = F[R(y)]$; $\tilde{Z}(\alpha) = F[Z(y)]$; $\sigma = \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}$; $\theta^2 = \rho\omega^2 a^2 / \mu$; $\bar{y} = y/a$, $\bar{x} = x/a$, $\bar{b} = b/a$, α — безразмерные параметры.

Контур Γ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и имеет следующий вид [2]: огибает положительные особенности подынтегральной функции снизу, отрицательные — сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью.

Амплитудная функция поля смещений, возбуждаемого нагрузкой (1.3) в упругом полупространстве с полостью, строится на основе метода суперпозиции:

$$(1.5) \quad w^{(1)} = w_1^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) + w_2^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$(1.6) \quad w_1^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_1(\eta)}{\sigma_1} \exp(-\sigma_1 \bar{x} + i\alpha(\eta - \bar{y})) d\eta d\alpha;$$

$$w_2^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{w}_2^{(1)}(\bar{r}, \varphi) = \frac{a}{2\pi\mu_1\theta_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(\theta_1 r) e^{im\varphi}}{H_{m-1}^{(1)}(\theta_1) - \frac{m}{\theta_1} H_m^{(1)}(\theta_1)} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} T_1(\eta) e^{-in\eta} d\eta;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \theta_1^2}; \theta_1^2 = \frac{\rho_1 \omega^2 a^2}{\mu_1}; \bar{r} = \sqrt{\left(\bar{x} - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 + y^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\bar{y}}{x - \varepsilon^{-1}}; \varepsilon = \frac{a}{h}.$$

Здесь и ниже используются только безразмерные координаты $\bar{x}, \bar{y}, \bar{r} = r/a$, поэтому черту далее опускаем. Функции напряжений $R_1(y), T_1(\varphi)$ определяются из системы интегральных уравнений [3]:

$$(1.7) \quad R_1(y) + \frac{1}{2\pi\theta_1} \int_{-\pi}^{\pi} T_1(\eta) K_1(y, \eta) d\eta = R(y),$$

$$T_1(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\eta) K_2(\alpha, \varphi) e^{i\alpha\eta} d\eta d\alpha = T(\varphi).$$

Здесь

$$K_1(y, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\arctg(-y\varepsilon) - \eta)}}{\Delta_m(\theta_1)} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{imy}{r_0^2} H_m^{(1)}(\theta_1 r_0) - \frac{\theta_1}{\varepsilon r_0} \left(-\frac{m}{\theta_1 r_0} H_m^{(1)}(\theta_1 r_0) + H_{m-1}^{(1)}(\theta_1 r_0) \right) \right\}; r_0 = \sqrt{y^2 + \varepsilon^{-2}};$$

$$K_2(\alpha, \varphi) = \exp(-\sigma_1(\varepsilon^{-1} + \cos \varphi) - i\alpha \sin \varphi) \left(\cos \varphi + \frac{i\alpha}{\sigma_1} \sin \varphi \right);$$

$$\Delta_m(\theta_1) = H_{m-1}^{(1)}(\theta_1) - \frac{m}{\theta_1} H_m^{(1)}(\theta_1).$$

Функция $R(y)$, определяющая распределение контактных напряжений вдоль границы раздела упругих параметров среды ($x = 0$), в системе (1.7) неизвестна. Для замыкания системы используем условия сцепления (1.2), учитывая, что равенство напряжений (второе условие (1.2)) удовлетворяется автоматически заданием граничного условия вспомогательных краевых задач (1.3). Из первого условия (1.2) имеем

$$(1.8) \quad \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(R(\eta) \operatorname{ch} \sigma b - Z(\eta)) e^{i\alpha(\eta-y)}}{\sigma \operatorname{sh} \sigma b} d\eta d\alpha + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_1(\eta) e^{i\alpha(\eta-y)}}{\sigma_1} d\eta d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\mu_1 \theta_1} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(y, \eta) T_1(\eta) d\eta = 0,$$

$$K_3(y, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(im(-\eta + \arctg(-y\varepsilon))) H_m^{(1)}(\theta_1 r_0)}{\Delta_m(\theta_1)}.$$

Таким образом, для определения неизвестных функций напряжения $R_1(y), T_1(\varphi), R(y)$ получили систему трех интегральных уравнений (1.7), (1.8), через решение которых по соотношениям (1.4)–(1.6) описываем волновое поле в среде.

2. Решение системы интегральных уравнений. Из анализа свойств элементов системы (1.7), (1.8) следует, что при $\varepsilon = a/h < 1$ оператор сис-

темы вполне непрерывен в пространстве суммируемых функций, при $\varepsilon \ll 1$ он аналогично [3, 4] будет сжимающим, что позволит при построении решения системы эффективно использовать метод последовательных приближений с асимптотическим вычислением интегралов [5].

Остановимся подробнее на случае полости относительно малого радиуса. Не нарушая общности исходной краевой задачи (1.1), (1.2), можно произвести ее разбиение на две.

Задача 1. Граница двухслойного полупространства ($x = -b$) свободна от усилий, а на границе полости ($r = 1$) заданы распределенные усилия $Z(y) = 0$, $T(\varphi) \neq 0$.

Задача 2. Загружена граница двухслойного полупространства ($x = -b$), граница полости ($r = 1$) свободна от усилий $Z(y) \neq 0$, $T(\varphi) = 0$.

Рассмотрим задачу 1 для $\varepsilon \ll 1$. Анализ элементов системы (1.7), (1.8) при этом определяет в первом приближении решение системы как

$$R_1(y) = O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_1}}\right), \quad T_1(\varphi) = T(\varphi) + O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_1}}\right).$$

Для вычисления второго приближения конкретизируем граничные условия. Положим $T(\varphi) = p = \text{const}$. Учитывая, что в представление, описывающее волновое поле в среде, входят не сами функции $Z(y)$, $R(y)$, $R_1(y)$, а их преобразование Фурье, выпишем во втором приближении

$$(2.1) \quad \tilde{R}_1(\alpha) = F[R(y)] = \frac{2p \exp\left[i\left(\varepsilon^{-1} \sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2} - \pi/2\right)\right] D^-}{\theta_1 H_{-1}^{(1)}(\theta_1) D^+} + O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_1}}\right),$$

$$T_1(\varphi) = p \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_1}} \frac{\exp\left[i\left(2\theta_1 \varepsilon^{-1} + \pi/4 - \theta_1 \cos \varphi\right)\right] D_0^+}{H_{-1}^{(1)}(\theta_1) D_0^-} \cos \varphi\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{\theta_1}\right),$$

$$D^\pm = \pm \sigma_1 \mu_1 \text{ch } \sigma b + \mu \sigma \text{sh } \sigma b, \quad D_0^\pm = \cos \theta b \pm i \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\rho_1 \mu_1}} \sin \theta b.$$

Поступая аналогичным образом для задачи 2, в первом приближении получим

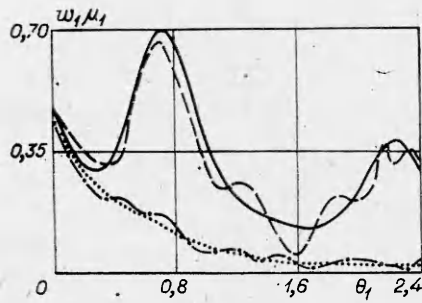
$$R_1(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu_1 \sigma_1}{\mu \sigma \text{sh } \sigma + \mu_1 \sigma_1 \text{ch } \sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\eta) e^{i\alpha \eta} d\eta e^{-i\alpha y} d\alpha, \quad T_1(\varphi) = O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_1}}\right).$$

При вычислении второго приближения конкретизируем граничные условия на плоской границе, положив

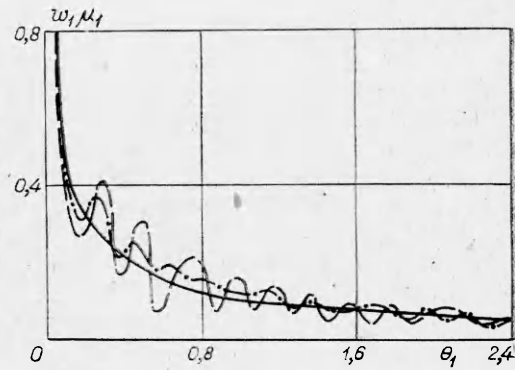
$$Z(y) = \begin{cases} p, & y \in [c, d], \quad p = \text{const}, \\ 0, & y \in [c, d]. \end{cases}$$

В этом случае в результате вычисления интегралов во втором приближении найдем

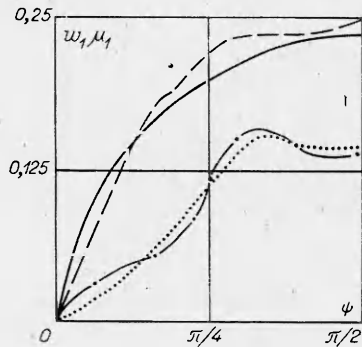
$$(2.2) \quad \tilde{R}_1(\alpha) = \frac{\mu_1 \sigma_1 \tilde{Z}(\alpha)}{D^+} + 4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi \theta_1}} e^{i\varepsilon^{-1}(\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2} + \theta_1)} (d - c) p e^{-i\pi/4} \times \\ \times \left\{ J'_0(\theta_1) / (2\Delta_0(\theta_1)) + \sum_{m=1}^{\infty} J'_m(\theta_1) T_m\left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2}}{\theta_1}\right) / \Delta_m(\theta_1) \right\} \times \\ \times D^- / (D_0^- D^+) + O\left(\frac{\varepsilon}{\theta_1}\right), \\ T_1(\varphi) = - \sqrt{\frac{\varepsilon \theta_1}{2\pi}} \exp\left(i(\theta_1 \cos \varphi + \theta_1 \varepsilon^{-1} - \pi/4)\right) / \Delta_0(\theta_1) \times \\ \times \cos \varphi \cdot p (d - c) + O\left(\frac{\varepsilon}{\theta_1}\right).$$



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

При необходимости процесс построения последовательных приближений при решении системы для задач 1,2 можно продолжить до достижения требуемой точности.

3. Расчет волновых полей в среде.

Для расчета волнового поля в упругом слое ($-b \leq x \leq 0$) имеем представление (1.4). Подставляя в (1.4) решение интегральных уравнений (для задачи 1,2 соответственно (2.1), (2.2)), сводим задачу к расчету однократного интеграла, что возможно непосредственно на ЭЦВМ. Для расчета волнового поля в упругом полу-

пространстве с полостью для задачи 1 получаем

$$w_1^{(1)}(x, y) = -\frac{iap}{\pi\mu_1\theta_1 H_{-1}^{(1)}(\theta_1)} \int_{\Gamma} \frac{\exp(-\sigma_1(x + \varepsilon^{-1}) - i\alpha y) D^-}{\sigma_1 D^+} d\alpha + O\left(\frac{\varepsilon}{\theta_1}\right),$$

$$w_2^{(1)}(r, \varphi) = \frac{p}{\theta_1\mu_1} \left[\frac{H_0^{(1)}(\theta_1 r)}{H_{-1}^{(1)}(\theta_1)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(\theta_1 r)}{H_{-1}^{(1)}(\theta_1) \Delta_m(\theta_1)} \times \right. \\ \left. \times e^{i(m\varphi + 2\theta_1 \varepsilon^{-1} - \pi/4 + m\pi/2)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi\theta_1}} J'_m(\theta_1) D_0^+ / D_0^- \right] + O\left(\frac{\varepsilon}{\theta_1}\right).$$

Аналогично для задачи 2

$$w_1^{(1)}(x, y) = -\frac{a}{2\pi\mu_1} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\exp(-\sigma_1 x - i\alpha y)}{\sigma_1} \left(\frac{\mu_1 \sigma_1 \tilde{Z}(\alpha)}{D^+} + 4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta_1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(i(\varepsilon^{-1}\theta_1 + \pi/4) - \varepsilon^{-1}\sigma_1) p(d-c) \left\{ J'_0(\theta_1) / (2H_0^{(1)}(\theta_1)) + \sum_{m=1}^{\infty} J'_m(\theta_1) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times T_m \left(\frac{\sqrt{\theta_1^2 - \alpha^2}}{\theta_1} \right) / H_m^{(1)}(\theta_1) \right\} D^- / (D_0^- D^+) \right) d\alpha \right\} + O\left(\frac{\varepsilon}{\theta_1}\right),$$

$$\bar{w}_2^{(1)}(r, \varphi) = -\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{\theta_1}} \exp(i\theta_1 \varepsilon^{-1} + i\pi/4) p(d-c) \left\{ \frac{H_0^{(1)}(\theta_1 r)}{H_0^{(1)}(\theta_1)} J'_0(\theta_1) \times \right. \\ \left. \times 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(\theta_1 R)}{H_m^{(1)}(\theta_1)} J'_m(\theta_1) e^{im\pi/2} \cos m\varphi \right\} / D_0^-.$$

На рис. 1 показано поведение амплитудно-частотной характеристики точки среды с координатами $x = y = 5$ ($\varepsilon = 0,1$, $b = 1$) для задачи 2 при

следующих соотношениях: $\mu_1/\rho_1 = 1,32 \cdot 10^5$, $\mu/\rho = 2,5 \cdot 10^4$ — штриховая линия, $\mu_1/\rho_1 = 2,5 \cdot 10^4$, $\mu/\rho = 1,32 \cdot 10^5$ — штрихпунктирная, сплошная и пунктирная линии — характеристики той же точки в случае области без полости при аналогичных параметрах задачи. Качественное различие приведенных графиков определяется тем, что для $V_s < V_{s1}$ ($V_s = \sqrt{\rho/\mu}$, $V_{s1} = \sqrt{\rho_1/\mu_1}$) при возбуждении установившихся гармонических колебаний слой работает как волновод, вдоль границ которого распространяются волны с неубывающей амплитудой, обусловленные наличием вещественных нулей у функции D^+ . Для задачи 1 это условие неопределяющее, так как основной вклад в формирование волнового поля среды вносит осциллирующая полость. Амплитудно-частотная зависимость точки среды при нагружении на поверхности цилиндрического отверстия приведена на рис. 2. Соответствие линий и параметров задачи то же, что и на рис. 1.

При анализе закономерностей поведения решения задачи 2 по угловой координате при фиксированном удалении от источника колебаний получены результаты, представленные на рис. 3 в виде зависимости $w_1\mu_1$ от угла ψ при $\theta_1 = 1$, $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = 13$, $\psi = \arctg x/y$, $\varepsilon = 0,1$, $\rho_1 = \rho = 2 \cdot 10^3$. Штриховая линия — зависимость при $\mu_1 = 3 \cdot 10^8$, $\mu = 7,5 \cdot 10^7$, штрихпунктирная — при $\mu_1 = 7,5 \cdot 10^7$, $\mu = 3 \cdot 10^8$, сплошная и пунктирная линии — аналогичные характеристики для двухслойного полупространства без полости. При области с отверстием наблюдается дополнительная осцилляция, вносимая наличием отражающих границ полости, полупространства и слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979.
3. Бабешко В. А., Селезнева Т. Н. и др. Об установившихся колебаниях упругого полупространства с горизонтальной цилиндрической полостью. — ПМ, 1983, т. 19, вып. 10.
4. Бабешко В. А., Селезнева Т. Н. и др. Об одном методе исследования установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего сферическую или горизонтальную цилиндрическую полость. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 1.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

Поступила 17/VI 1985 г.

УДК 539.3

О СТРУКТУРЕ ТЕНЗОРА МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ И КЛАССИФИКАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н. И. Остробаблин
(Новосибирск)

В линейной теории упругости удельная энергия деформации для анизотропных материалов имеет вид [1—3]

$$(1) \quad 2\Phi = A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl},$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — компоненты тензора деформаций в ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3 ; A_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости. В (1) и далее повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до 3. Постоянные A_{ijkl} обладают свойствами симметрии:

$$(2) \quad A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij},$$

это следует из симметрии тензора ε_{ij} и возможности переобозначить индексы суммирования в (1). Из (2) видно, что независимых компонент A_{ijkl} только 21. Энергия деформации (1) должна быть положительно определенной квадратичной формой [1, 3].