

Исходя из (1.8), (1.9), (1.15), получим

$$A_1(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha^2 - k^2 + a\eta}{\alpha\pi[\delta k^2 + a(\alpha^2 - \eta\delta)]} \int_0^1 \theta(\xi) \sin(\alpha\xi) d\xi = \frac{2\sqrt{3}i}{k\pi} \int_0^1 \xi\theta(\xi) d\xi.$$

Итак, окончательно находим

$$S = -8\operatorname{Re} \int_0^1 \xi\theta(\xi) d\xi.$$

Подставляя сюда значения  $\theta(\xi)$  из (1.23) и ограничиваясь несколькими слагаемыми, выразим поперечное сечение в функции двух параметров  $k$  и  $\beta$

$$S = 8 \left\{ 1 + \frac{2k^2}{5\pi} \left( -E_{20} + \beta E_{21} - \frac{\beta^2}{2} E_{22} + \dots \right) + \frac{k^4}{105\pi^2} \left[ 17E_{20}^2 + 108E_{40} - \right. \right. \\ \left. \left. - \beta(34E_{21}E_{20} + 108\pi E_{41}) + \beta^2(17E_{22}E_{20} + 54\pi E_{42}) - \beta^3(17E_{22}E_{21} + \right. \right. \\ \left. \left. + 18\pi E_{43}) + \frac{\beta^4}{2}(17E_{22}^2 + 18\pi E_{44}) + \dots \right] + \dots \right\}.$$

Поступила 7 IV 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Robertson J. A. Diffraction of a plane longitudinal wave by a penny-shaped crack.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1967, vol. 63, p. 229—238.
2. Снеддон И. Н. Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1957, с. 542—557.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. Л., «Наука», 1967, с. 266—268.
4. Hook J. F. Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous isotropic media.— «J. Acoust. Soc. Amer.», 1961, vol. 33, N 3, p. 302—313.
5. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1963, vol. 59, p. 351—362.
6. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
7. Barrat P. G., Collins W. D. The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1965, vol. 61, p. 969—981.
8. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3.01

### ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА С ОТВЕРСТИЕМ

Н. Б. Ромалис

(Воронеж)

В настоящее время имеется очень большое количество решений о деформировании неограниченных стохастически неоднородных тел. В этих решениях определяются эффективные упругие модули, т. е. осредненные по пространственной области механические характеристики материала в зависимости от параметров, характеризующих структурную неоднородность среды. Однако в силу нелокальности связи между средними напряжениями и средними деформациями

[1] эффективные упругие модули существенно зависят от вида краевой задачи. Следует заметить, что при решении конкретных краевых задач неоднородной теории упругости возникают значительные математические трудности. В настоящее время имеются решения ряда плоских краевых задач стохастически неоднородной теории упругости для полуплоскости, полосы [1], бесконечной плоскости с круговым отверстием [2, 3]. В случае антиплоской деформации решена задача о распространении трещины в стохастически неоднородном теле [4, 5].

Рассмотрим плоскую задачу о деформировании тела, упругие константы которого являются случайными функциями координат. При заданных на контуре  $L$  области  $S$ , занимаемой телом, поверхностных силах  $g_i$  и при отсутствии объемных сил уравнения плоской задачи теории упругости изотропных неоднородных тел, записанные в напряжениях, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny = g_1, \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos nx + \sigma_y \cos ny = g_2, \\ (1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \nabla^2 [\gamma (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \sigma_x + 2 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \sigma_y, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $q$  и  $\gamma$  выражаются через модули Юнга  $E(x, y)$  и коэффициент Пуассона  $\nu(x, y)$  соотношениями

$$(2) \quad \gamma = 1/E, \quad q = (1 + \nu)/E,$$

$\nabla^2$  — оператор Лапласа.

Пусть  $q(x, y)$  и  $\gamma(x, y)$  — случайные функции координат. Тогда соотношения (1) представляют собой стохастически нелинейную задачу, определяющую случайные функции  $\tau_{ij}(x, y)$ . Представим величины  $q$  и  $\gamma$  в виде  $q = \langle q \rangle + q'$ ,  $\gamma = \langle \gamma \rangle + \gamma'$ . Предположим, что случайные функции  $q(x, y)$  и  $\gamma(x, y)$  статистически однородны и статистически однородно связаны между собой ( $\langle q \rangle = \text{const}$ ,  $\langle \gamma \rangle = \text{const}$ ). Если решение задачи (2) представить в виде ряда по степеням некоторого параметра  $\kappa$ , то задача (1) линеаризируется. Параметр  $\kappa$  вводится соотношениями [1]

$$(3) \quad q = \langle q \rangle + \kappa q', \quad \gamma = \langle \gamma \rangle + \kappa \gamma', \quad \tau_{ij} = \sum_{h=0}^{\infty} \kappa^h \tau_{ij}^{(h)}.$$

Подставляя (3) в (1) и приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\kappa$ , получим краевую задачу для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_x^0 - \sigma_y^0 + 2i\tau_{xy}^0) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) &= 0, \quad \langle \gamma \rangle \nabla^2 (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) = 0, \\ (X_n^0 + iY_n^0)|_L &= g_1 + ig_2 \quad (z = x + iy) \end{aligned}$$

и рекуррентную последовательность статистически линейных краевых задач для  $\tau_{ij}^{(h)}$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_x^{(h)} - \sigma_y^{(h)} + 2i\tau_{xy}^{(h)}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\sigma_x^{(h)} + \sigma_y^{(h)}) &= 0, \\ \nabla^2 (\sigma_x^{(h)} + \sigma_y^{(h)}) = f^{(h-1)}, \quad (X_n^{(h)} + iY_n^{(h)})|_L &= 0, \end{aligned}$$

где  $f^{(k-1)}$  — некоторая линейная комбинация выражения вида

$$\frac{1}{\langle \gamma \rangle} (\sigma_x^{(i-1)} - \sigma_y^{(i-1)} + 2i\tau_{xy}^{(i-1)}) \frac{\partial^2 q'}{\partial z^2}.$$

Задача (4) представляет собой задачу о деформировании однородного тела с некоторым образом распределенными массовыми силами и свободной от внешних нагрузок границей.

Решение такой задачи дается формулами [1, 6, 7]

$$(5) \quad \sigma_x^{(k)} + \sigma_y^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_{\Omega} f^{(k-1)}(\chi, \bar{\chi}) \ln |\chi - z| d\chi_1 d\chi_2 + 2 [\Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)}],$$

$$\sigma_x^{(k)} - \sigma_y^{(k)} + 2i\tau_{xy}^{(k)} = \frac{z}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f^{(k-1)}(\chi, \bar{\chi}) d\chi_1 d\chi_2}{\bar{\chi} - z} - 2 [z\overline{\Phi_k'(z)} - \overline{\Psi_k(z)}],$$

где  $\Omega$  — поперечное сечение области, занимаемой телом;  $\chi_1, \chi_2$  — переменные интегрирования ( $\chi = \chi_1 + i\chi_2, \bar{\chi} = \chi_1 - i\chi_2$ ), а  $\overline{\Phi_k(z)}$  и  $\Psi_k(z)$  — комплексные потенциалы Мусхелишвили, которые обеспечивают удовлетворение граничных условий. Потенциалы  $\Phi_k(z)$  и  $\Psi_k(z)$  легко находятся в явном виде во всех случаях, когда заданный контур отображается на круг рациональной функцией.

Рассмотрим в качестве примера случай растяжения бесконечного стохастически неоднородного тела с круговым отверстием (фиг. 1) и вычислим второе приближение напряжений  $\langle \sigma_{\theta}^{(2)} \rangle, \langle \sigma_{\rho}^{(2)} \rangle, \langle \tau_{\rho\theta}^{(2)} \rangle$ ,

где  $\langle \sigma_{\rho}^{(k)} \rangle + \langle \sigma_{\theta}^{(k)} \rangle = \langle \sigma_x^{(k)} \rangle + \langle \sigma_y^{(k)} \rangle$ ;  $\langle \sigma_{\theta}^{(k)} \rangle - \langle \sigma_{\rho}^{(k)} \rangle + 2i \langle \tau_{\rho\theta}^{(k)} \rangle = (\langle \sigma_y^{(k)} \rangle - \langle \sigma_x^{(k)} \rangle + 2i \langle \tau_{xy}^{(k)} \rangle) e^{i\theta}$ .

Корреляционные функции возьмем в виде [8]

$$\langle q'(z_1) q'(z_0) \rangle = \sigma_{qq}^2 \exp[-(z_1 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)/\alpha^2],$$

$$\langle q'(z_1) \gamma'(z_0) \rangle = \sigma_{q\gamma}^2 \exp[-(z_1 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)/\alpha^2],$$

$$\langle \gamma'(z_1) \gamma'(z_0) \rangle = \sigma_{\gamma\gamma}^2 \exp[-(z_1 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)/\alpha^2].$$

Тогда после некоторых преобразований вычисление выражений (5) сведется к вычислению интегралов вида

$$(6) \quad \int_1^{\infty} dr_0 \int_1^{\infty} dr_1 \int_{\gamma_0} d\sigma \int_{\gamma_1} d\sigma_1 \exp[-R(r_0^2 + r_1^2)/\alpha^2] f(r_0, r_1, \sigma_0, \sigma_1) d\sigma_1,$$

где  $\gamma_0, \gamma_1$  — контуры единичного круга;  $\sigma_0, \sigma_1$  — точки контура. Интегралы по  $\gamma_0, \gamma_1$  вычисляются с помощью теории вычетов с учетом того, в какой области подынтегральная функция голоморфна. Интегралы вида

$$\int_1^{\infty} dr_0 \int_1^{\infty} dr_1 \exp[-R^2(r_1^2 + r_0^2)/\alpha^2] dr_1,$$

к которым сводится выражение (6), вычислялись на ЭЦВМ «Мир-1» [9]. Коэффициент концентрации напряжений  $k$ , представляющий собой отношение  $\langle \sigma_{\theta}^2 \rangle$  к значению нагрузки  $p$ , приложенной на бесконечности, представлен на фиг. 1, где сплошной линией изображена зависимость коэффициента концентрации напряжений в однородном теле от безразмерного расстояния  $r/R$ , штриховыми линиями изображены коэффициен-

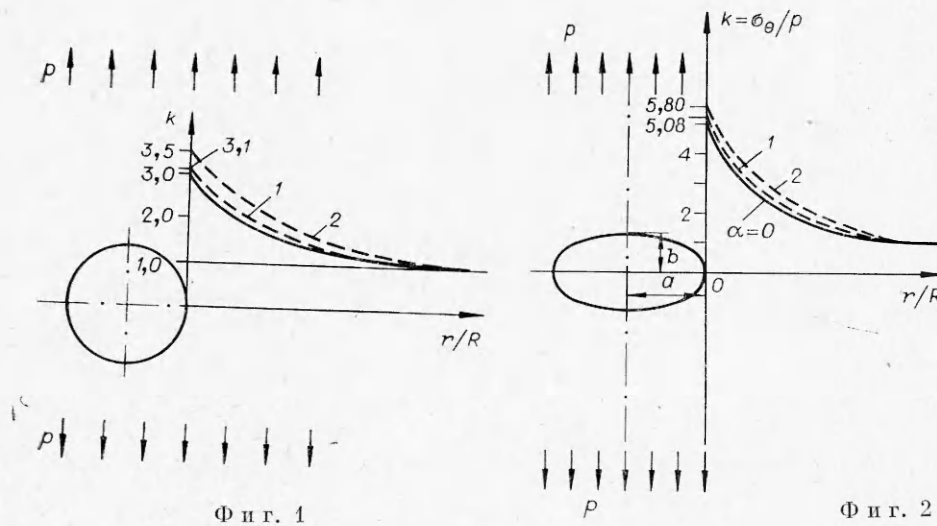
ты концентрации напряжений в случае стохастически неоднородного тела. Отношение характерного линейного размера неоднородности к радиусу  $R$  принято  $\alpha/R = 0,1; 0,3$  (кривые 1, 2 соответственно).

Вычисления выполнены при следующих значениях параметров:

$$\sigma_{qq}^2/\langle\gamma^2\rangle = 0,1, \sigma_{\gamma q}/\langle\gamma^2\rangle = 0,01, \sigma_{\gamma\gamma}/\langle\gamma^2\rangle = 0,005.$$

Таким образом, масштабный эффект, свойственный стохастически неоднородным телам [1], приводит к значительному увеличению концентрации напряжений вблизи отверстия.

Аналогично проводятся вычисления для случая бесконечного тела, ослабленного эллиптическим отверстием: эффективный коэффициент концентрации напряжений в случае эллиптического отверстия представлен



на фиг. 2 для случая  $a/b = 2$  (кривая 1 —  $\alpha/R = 0,1$ ; 2 —  $\alpha/R = 0,3$ ).

В случае, когда эллипс превращается в разрез, в рамках линейной теории упругости, как известно, напряжения в окрестности вершины трещины имеют особенность порядка  $(r)^{-1/2}$ . В работе [10] показано, что особенность в окрестности вершины трещины в стохастически неоднородном теле имеет тот же порядок, что и в однородном теле, т.е. может быть введен эффективный коэффициент интенсивности напряжений.

Поступила 25 V 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М., «Наука», 1976.
2. Лавренко В. И. Растяжение стохастически неоднородной плоскости с круговым отверстием. — ПМ, 1974, т. 10, вып. 7.
3. Лавренко В. И. Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала. — ПМ, 1973, т. 9, вып. 4.
4. Ромалис Н. Б. Об эффективном коэффициенте интенсивности напряжений в стохастически неоднородном теле. — ПМ, 1975, т. 11, вып. 11.
5. Борзникова В. В., Ромалис Н. Б. Распространение трещины сдвига в стохастически неоднородном теле. — ПМТФ, 1976, № 1.
6. Мишику М., Теодоску К. Решение при помощи теории функций комплексного переменного статистической плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.

7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
8. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
9. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решение краевой задачи теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М., «Выш. школа», 1970.
10. Ромалис Н. Б. Применение методов Н. И. Мухелишвили к решению задач деформирования стохастически неоднородных тел.— В кн.: Исследования по прикладной математике. Вып. 2. Воронеж, изд. Воронежск. ун-та, 1974.

УДК 624.131 + 539.24

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕСЧАНОГО ГРУНТА ПРИ СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

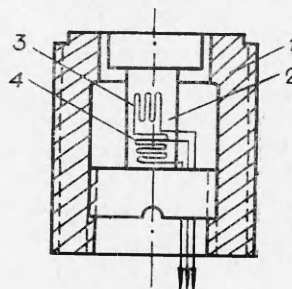
Ю. М. Глухов, Ю. В. Кулинич, Г. В. Рыков

(Москва)

Излагаются результаты экспериментальных исследований сжимаемости песчаного грунта различной влажности при статических нагрузках интенсивностью до  $\sigma_1 = 400-600 \text{ кг/см}^2$ . Рассмотрена методика и описана конструкция датчика для измерения таких напряжений. Показано, что траектория нагружения при одноосном сжатии воздушно-сухого песка в случае нагрузки и разгрузки не совпадает. Для влажных песчаных грунтов показано, что условие пластичности [1] пригодно вплоть до нагрузок  $\sigma_1 = 400-600 \text{ кг/см}^2$  как при однократном, так и при повторных нагружениях.

Экспериментальные исследования проводились в лаборатории динамических испытаний отдела динамики неупругих сред ИПМ АН СССР на установке одноосного сжатия УДН-100, представлявшей собой дальнейшую модернизацию установки УДН-150, описанной в [2]. В отличие от УДН-150 диаметр образца в установке УДН-100 составляет  $D=100 \text{ мм}$ , а высота  $h_0 = 20 \text{ мм}$ . Новая конструкция обоймы, в которой размещается образец, поршня, передающего нагрузку на образец, и датчиков для измерения компонента тензора напряжения в образце позволяет расширить диапазон исследуемых напряжений и деформации до  $10^3 \text{ кг/см}^2$  и 0,5 соответственно. Конструктивная схема разработанных к установке УДН-100 тензометрических датчиков стержневого типа для измерения нормальных напряжений интенсивностью до  $10^3 \text{ кг/см}^2$  показана на фиг. 1, где 1 — корпус датчика, 2 — измерительный элемент-стержень, 3, 4 — рабочее и компенсационное тензосопротивления. Измерительный элемент выполнен из титанового сплава ВТ-12 с пределом прочности  $[\sigma] = 165 \text{ кг/мм}^2$ , модулем упругости  $E = 2,4 \times 10^4 \text{ кг/см}^2$  и предельной деформацией  $[\varepsilon] = 0,15$ .

Для измерения меньших главных напряжений  $\sigma_2$  применялись аналогичные по конструкции датчики, вмонтированные в обойму. Контактная поверхность такого датчика имела



Ф и г. 1