

6. Ward A. L. Effect of space Charge in Cold-Cathode Gas Discharge.—«Phys. Rev. », 1958, vol. 112, N 6.
7. Иванов В. И. Курс дозиметрии. М., Атомиздат, 1970.
8. Ward A. L., Eijonydd J. Electrical Breakdown in Hydrogen at Low Pressures.—«Phys. Rev.», 1961, vol. 122, N 2.

УДК 532.501.34

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ ВЗРЫВНОЙ ПОЛОСТИ В МЯГКОМ ГРУНТЕ

Э. А. Кошелев, Е. Н. Шер

(Новосибирск)

Одной из первых моделей взрыва в грунте была гидродинамическая схема [1]. Несмотря на недостатки и определенные термодинамические противоречия [2] схемы, качественная картина взрыва в грунте [1] описывается достаточно ясно. В дальнейшем появилось много работ, посвященных этой проблеме, в которых в качестве моделирующих сред использовались более сложные пластические и упругопластические модели, но модель взрыва в грунте [1] по-прежнему импонирует своей простотой. В статье в постановке работы [1] исследуется вопрос об устойчивости границы взрывной полости и ударной волны. Рассмотрение ограничивается наиболее простым случаем, когда основное движение является одномерным.

В этом случае схема [1] примет следующий вид. В среде с постоянной плотностью  $\rho_1$  в момент времени  $t=0$  начинает распространяться ударная волна. За фронтом волны — несжимаемая идеальная жидкость с плотностью  $\rho_2$ . Уравнения, характеризующие движение среды, имеют вид

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_0}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0,$$

где  $u_0$  — проекция вектора скорости на ось  $x$ ;  $p_0$  — давление. На границе взрывной полости  $x=a$  давление в жидкости равно давлению в полости. На фронте ударной волны  $x=R$  выполняются условия:

$$u_0(R) = \xi R;$$

$$p_0(R) = \rho_1 \xi R^2 + p_s,$$

где  $\xi = 1 - \rho_1/\rho_2$ , точка означает дифференцирование по времени;  $p_s$  — давление, с которого начинается ударное сжатие. Невозмущенное течение будет характеризоваться следующими соотношениями:

$$a = \xi R + (1 - \xi)a_0, \quad a_0 = R_0 \text{ — начальное состояние;}$$

$$p_0 = - \rho_2 \dot{u}_0 x + \frac{\rho_1 u_0^2}{\xi} + \rho_2 \dot{u}_0 R.$$

Предположим, что основное течение испытывает малое возмущение

$$U_x = u_0 + u; \quad U_y = v; \quad p = p_0 + p;$$

$$X_b = R + \varepsilon; \quad X_n = a + \delta,$$

где  $U_x, U_y$  — компоненты вектора скорости возмущенного течения;  $X_n(y, t), X_b(y, t)$  — соответственно уравнения границы взрывной полости и ударной волны.

Уравнения движения и неразрывности, линеаризованные относительно возмущения, запишутся в виде

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Линеаризация условий на сильных разрывах была проведена в работе [3] при решении задачи об устойчивости ударной волны. В данном случае за фронтом ударной волны среда несжимаема и отсутствует возмущение плотности. По аналогии с [3] можно получить соотношения:

$$\begin{cases} p = 2\rho_1 u_0 \dot{\varepsilon} - \frac{\partial p_0}{\partial x} \varepsilon; \\ u = \dot{\xi} \varepsilon; \\ v = u_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \end{cases}$$

при  $x=R$ , член  $\frac{\partial p_0}{\partial x} \varepsilon$  появляется из-за сноса граничного условия с возмущенной границы  $x=X_b$  на старую границу  $x=R$ .

На свободной поверхности имеем два соотношения: из условия непрерывности давления

$$p = - \frac{\partial p_0}{\partial x} \delta$$

и из условия кинематичности

$$u = \dot{\delta} \quad \text{при } x=a.$$

Предположим, что возмущения свободной границы и поверхности ударной волны гармонические

$$\varepsilon = \varepsilon(t) \cos ky; \quad \delta = \delta(t) \cos ky.$$

Тогда граничные условия запишутся в виде при  $x=a$

$$(2) \quad \begin{cases} p = \rho_2 \dot{u}_0 \delta \cos ky, \\ u = \dot{\delta} \cos ky, \end{cases}$$

при  $x=R$

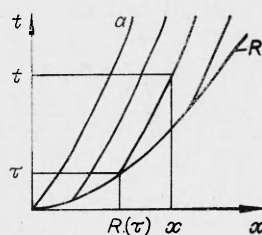
$$(3) \quad \begin{cases} p = (\rho_2 \dot{u}_0 \varepsilon + 2\rho_1 u_0 \dot{\varepsilon}) \cos ky, \\ u = \dot{\xi} \varepsilon \cos ky, \\ du/dx = - u_0 k^2 \varepsilon \cos ky. \end{cases}$$

Последнее из соотношений (3) получено при помощи уравнения неразрывности.

Продифференцировав первое из уравнений (1) по  $x$ , второе — по  $y$  и сложив их, получим для  $p$  уравнение Лапласа. В дальнейшем схема

построения решения следующая: вначале ищем решение уравнения  $\Delta p=0$ , удовлетворяющее первым условиям в соотношениях (2), (3), затем, используя это решение, найдем из уравнения движения функцию  $u(x, y, t)$ , подставив которую в оставшиеся граничные условия, получим искомые соотношения для определения амплитуды возмущений  $\varepsilon(t)$  и  $\delta(t)$ .

Можно убедиться в том, что функция



Фиг. 1

$$p = \frac{(\rho_2 \dot{u}_0 \varepsilon + 2\rho_1 u_0 \dot{\varepsilon}) \operatorname{sh} k(x-a) + \rho_2 \dot{u}_0 \delta \operatorname{sh} k(R-x)}{\operatorname{sh} k(R-a)} \cos ky$$

удовлетворяет необходимым требованиям для  $p$ .

Характеристики первого уравнения системы (1) имеют вид  $\frac{\partial x}{\partial t} = u_0(t)$ .

Вдоль характеристик  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x}$  и  $u(x, t) = u(R, \tau) -$

$$- \int_{\tau}^t \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} [a(z) + x - a(t), z] dz,$$

где  $\tau$  — момент прихода ударной волны в точку с координатой  $R(\tau)$  (фиг. 1).

$$R(\tau) - a(\tau) = x - a(t)$$

При  $x=a$

$$u(a, t) = u(R(0), 0) - \int_0^t \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} (a(z), z) dz.$$

Продифференцируем это выражение один раз по времени и, подставив во второе условие соотношений (2), получим

$$(4) \quad \ddot{\delta} \cos ky = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} (a, t).$$

Определим  $\frac{\partial u}{\partial x}$  при  $x=R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u(R, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \int_{\tau}^t \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} [a(z) + x - a(t), z] dz + \\ &+ \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p(R(\tau), \tau)}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x}; \end{aligned}$$

при  $x=R, t=\tau$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u(R, t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p(R, t)}{\partial x} \right] \frac{\partial \tau}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{\dot{R} - \dot{a}} = \frac{\xi}{(1 - \xi) u_0}.$$

Используя второе и третье условия из соотношений (3), получим

$$(5) \quad u_0 k^2 \varepsilon \cos ky = -\frac{\xi}{(1 - \xi) u_0} \left[ \ddot{\varepsilon} \cos ky + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p(R, t)}{\partial x} \right].$$

Подставив в уравнения (4), (5) выражение  $p(x,t)$ , получим для определения  $\delta$  и  $\varepsilon$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{2k(1-\xi)u_0}{\text{sh } k(R-a)} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{k\dot{u}_0}{\text{sh } k(R-a)} \varepsilon - \\ - k\dot{u}_0 \text{cth } k(R-a) \delta = 0; \\ \xi \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2k(1-\xi)u_0 \text{cth } k(R-a) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left[ \frac{u_0^2 k^2 (1-\xi)}{\xi} + \right. \\ \left. + k\dot{u}_0 \text{cth } k(R-a) \right] \varepsilon - \frac{k\dot{u}_0}{\text{sh } k(R-a)} \delta = 0, \\ \varepsilon(0) = \delta(0). \end{cases}$$

Эта система решается численно для трех различных типов движения: равномерного —  $u_0 = \text{const}$ ,  $a = u_0 t$ ;

равноускоренного —  $u_0 = \alpha t$ ,  $a = \alpha t^2/2$ ;

замедленного —  $u_0 = \beta/\sqrt{2\beta t+1}$ ,  $a = \sqrt{2\beta t+1}$ .

Последнее решение для  $u_0$  получается в модели [1] при условии, что  $p_s = 0$ , а давление на свободной границе изменяется адиабатически:

$$p = p_{00} \left( \frac{a_0}{a} \right)^\gamma \quad \text{при } \gamma = 3.$$

Исследуем поведение решений системы (6) при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда в уравнениях можно пренебречь членами, содержащими в качестве коэффициента  $1/\text{sh } k(R-a)$ . Система уравнений (6) примет вид

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2\delta}{dt^2} - k\dot{u}_0 \delta = 0; \\ \xi \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2k(1-\xi)u_0 \frac{d\varepsilon}{dt} + \left[ \frac{u_0^2 k^2 (1-\xi)}{\xi} + \right. \\ \left. + k\dot{u}_0 \right] \varepsilon = 0. \end{cases}$$

В случае равномерного движения уравнения (7) допускают простые решения

$$\delta = A_1 t + A_2;$$

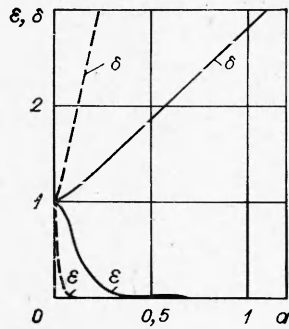
$$\varepsilon = B_1 e^{n_1 t} + B_2 e^{n_2 t};$$

$$n_{1,2} = \frac{k(1-\xi)u_0}{\xi} \left( -1 \pm i \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \right); \quad A_i, B_i - \text{const},$$

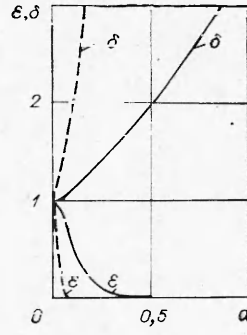
т. е. при больших  $t$  возмущения свободной границы линейно растут, а на ударной волне затухают (затухающие колебания). Результаты численного счета, иллюстрирующие этот случай, представлены на фиг. 2, где сплошная линия соответствует значению  $k=2$ , штриховая —  $k=10$ .

При равноускоренном движении система (7) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{\delta} - k\alpha \delta = 0; \\ \ddot{\varepsilon} + \frac{2k(1-\xi)\alpha t}{\xi} \dot{\varepsilon} + \alpha^2 t^2 k^2 \frac{1-\xi}{\xi^2} \varepsilon = 0. \end{cases}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда  $\delta = C_1 e^{\sqrt{k\alpha}t} + C_2 e^{-\sqrt{k\alpha}t}$ .

Во втором уравнении произведем замену:

$$\varepsilon = w(t) \exp\left[-\frac{k(1-\xi)\alpha}{2\xi} t^2\right].$$

Тогда для  $w(t)$  получим уравнение

$$\ddot{w} + \left[\frac{k^2\alpha^2(1-\xi)}{\xi} t^2 - \frac{k(1-\xi)\alpha}{2\xi}\right] w = 0.$$

Пренебрегая вторым слагаемым в коэффициенте при  $w$ , получим

$$w = \sqrt{t} I_{\pm \frac{1}{4}} \left( k\alpha \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{t^2}{2} \right).$$

Из вышесказанного можно сделать следующее заключение: при равноускоренном движении возмущения на фронте ударной волны уменьшаются, а на свободной поверхности — растут по экспоненциальному закону. Результаты численного счета для  $k=2$  и  $k=10$ , соответствующие данному случаю, представлены на фиг. 3.

В случае замедленного движения

$$a = \sqrt{2\beta t + 1}; \quad u_a = \frac{\beta}{\sqrt{2\beta t + 1}},$$

и система(7) запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{\delta} + \frac{k\beta^2}{(2\beta t + 1)^{3/2}} \delta = 0; \\ \ddot{\varepsilon} + \frac{2k(1-\xi)}{\xi} \frac{\beta}{\sqrt{2\beta t + 1}} \dot{\varepsilon} + \left[ \frac{k^2\beta^2(1-\xi)}{(2\beta t + 1)\xi^2} - \right. \\ \left. - \frac{k\beta^2}{\xi(2\beta t + 1)^{3/2}} \right] \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Пренебрегая единицей по сравнению с  $2\beta t$  и вторым слагаемым в ко-

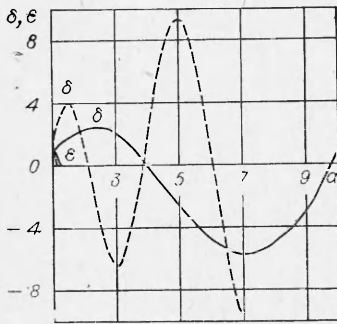
эффиценте при  $\varepsilon$ , после замены  $r = \sqrt{t}$  получим

$$\begin{cases} r \frac{d^2 \delta}{dr^2} - \frac{d\delta}{dr} + k \sqrt{2\beta} \delta = 0; \\ r \frac{d^2 \varepsilon}{dr^2} + \left[ \frac{2 \sqrt{2\beta} k (1 - \xi)}{\xi} r - 1 \right] \frac{d\varepsilon}{dr} + \\ + \frac{2\beta k^2 (1 - \xi)}{\xi^2} r \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Здесь тоже можно пренебречь единицей во втором члене уравнения для  $\varepsilon$ . Тогда данная система допускает следующее решение:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= D_1 e^{i\gamma_1 \sqrt{t}} + D_2 e^{i\gamma_2 \sqrt{t}}; \\ \gamma_{1,2} &= \frac{k(1-\xi)\sqrt{2\beta}}{\xi} \left( -1 \pm i \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \right); \\ \delta &= \sqrt{t} J_{\pm 2} \left( 2\sqrt{k\sqrt{2\beta}t} \right). \end{aligned}$$

Решение для  $\varepsilon$  — затухающие гармонические колебания, а для  $\delta$  — гармонические колебания, амплитуда которых растет при больших  $t$ , как  $\delta \sim t^{3/8}$ . На фиг. 4 проведены кривые для  $\varepsilon$  и  $\delta$  при значениях  $k=2$  и  $k=10$ , иллюстрирующие данный случай движения при небольших временах.



Фиг. 4

Во всех рассмотренных типах основного движения ударная волна ведет себя устойчиво по отношению к малым возмущениям, а свободная граница — неустойчиво, причем скорость роста неустойчивости зависит от вида невозмущенного движения. Наиболее быстро растет неустойчивость в случае ускоренного движения, медленнее всего — при замедленном движении границы взрывной полости.

При проведении взрывов в грунтах давно замечено, что значительный объем грунта вокруг взрывной полости пронизан многочисленными радиальными трещинами, выходящими на ее поверхность. Обнаруженная неустойчивость возможно является «спусковым механизмом» для процесса трещинообразования при взрыве в грунте.

Поступила 4 VI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Зволлинский В. Н., Степаненко Н. З. К динамике грунтовых масс. — Докл. АН СССР, 1954, т. 95, № 4.
2. Григорян С. С. О постановке динамических задач для идеальных пластических сред. — ПММ, 1955, т. 19, вып. 6.
3. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн. — ЖЭТФ, 1954, т. 27, № 3.