ПМТФ, № 6, 1966

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ В ПЛОСКОМ МГД-КАНАЛЕ

Ю. В. Саночкин, С. С. Филиппов

(Москва)

Имеется большое количество работ (см. библиографию в обзоре [1]), в которых вслед за Гартманом были рассмотрены различные варианты задачи о ламинарном установившемся движении проводящей среды в плоском канале в присутствии поперечного магнитного поля. Однако во всех указанных работах предполагалось, что коэффициенты переноса — величины постоянные, не зависящие от характеристик потока, в частности, от температуры. Вследствие этого предположения динамическая и тепловая задачи разделялись, и распределение температуры не оказывало никакого влияния на динамические характеристики потока.

В низкотемпературной плотной плазме, например, проводимость — очень быстро растущая функция температуры (ее аппроксимируют формулами $\sigma \sim e^{-A/T}$ или $\sigma \sim \sim T^{10-13}$). Очевидно, в этом случае необходим учет непостоянства коэффициентов переноса, и даже для несжимаемой жидкости динамическая и тепловая задачи не разделяются. Будем в дальнейшем называть такое течение неизотермическим, сравнивая его с движением, когда коэффициенты переноса считаются постоянными, которое условно для краткости назовем изотермическим.

Важность эффектов, обусловленных неизотермичностью течения, была показана в работах [2, 3]. Гистерезисные явления в поведении сопротивления трения и теплоотдачи, обнаруженные в этих работах, качественно рассматриваются в работе [4]. Наконец, в работе [5] рассмотрено течение жидкости в МГД-канале с проводимостью, зависящей от температуры, и обращено внимание на необходимость учета неизотермичности. В частности, в этой работе продемонстрировано появление немонотонных профилей скорости с точками перегиба. Однако автор делает ряд противоречивых предположений. Так, при рассмотрении задачи с тепловым потоком вдоль течения в то же время предполагается, что проводимость меняется только поперек канала. Принятая в [5] зависимость проводимости от температуры весьма далека от реальности, а температурная зависимость вязкости и теплопроводности вообще не учитывалась.

В настоящей работе изучается течение плазмы в плоском МГД-канале в отсутствие продольного потока тепла с учетом зависимости всех коэффициентов переноса от температуры. В отличие от работы [5], наряду с более реалистичным выбором указанных зависимостей при решении задачи учитывается также вязкая диссипация энергии.

1. Рассмотрим задачу об отыскании распределений скорости $u\,(y)$ и температуры $T\,(y)$ для установившегося течения вязкой проводящей жидкости в плоском канале, образованном параллельными непроводящими стенками $y = \pm a$, которые поддерживаются при постоянной температуре T_0. Пусть вдоль оси x действует градиент давления $\partial p \,/\, \partial x = -P < 0$, вдоль оси y приложено однородное магнитное поле B и вдоль оси z — однородное электрическое поле E. Предполагается, что приложенные поля не нарушают изотропии свойств жидкости. Если стационарное решение задачи, зависящее только от y, существует, то оно должно удовлетворять следующим уравнениям, вытекающим из общей системы уравнений магнитной гидродинамики:

$$\frac{d}{dy}\left(\eta\,\frac{du}{dy}\right) - \sigma\,(E + uB)\,B + P = 0; \quad \frac{d}{dy}\left(\varkappa\,\frac{dT}{dy}\right) + \sigma\,(E + uB)^2 + \eta\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0 \qquad (1.1)$$

с граничными условиями

$$u\,(\pm\, a) = 0,\ \ T\,(\pm\, a) = T_0 \qquad (1.2)$$

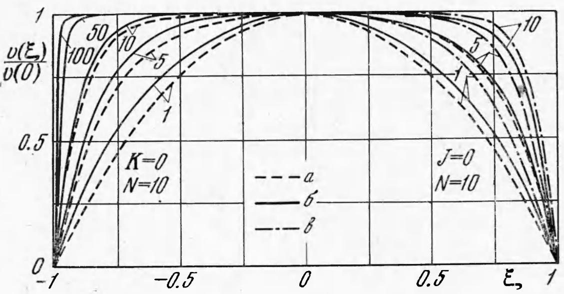
При постоянных коэффициентах переноса σ, $\varkappa$, η уравнения (1.1) линейны, причем первое уравнение решается независимо от второго (задача

Гартмана). В общем случае σ, $\varkappa$, η зависят от температуры, система (1.1) нелинейна и динамическая задача неотделима от тепловой.

Легко видеть, что из параметров задачи можно образовать три независимых безразмерных комбинации. Будем использовать в качестве критериев подобия следующие величины:

$$M = aB\sqrt{\frac{\sigma_0}{\eta_0}} \qquad (1.3)$$

$$K = -\frac{E\eta_0}{BPa^2}, \qquad N = \frac{P^2a^4}{\varkappa_0\eta_0T_0}$$



Фиг. 1

Выберем в качестве масштабов скорости и температуры величины $u_P = Pa^2/\eta_0$ и $T_P = P^2a^4/\varkappa_0\eta_0$. Положив

$$\xi = \frac{y}{a}, \quad v = \frac{u}{u_P}, \quad w = v - K, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_P}, \quad s = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad k = \frac{\varkappa}{\varkappa_0}, \quad h = \frac{\eta}{\eta_0}$$

где $\sigma_0, \varkappa_0, \eta_0$— значения σ, $\varkappa$, η при $T = T_0$, и обозначая дифференцирование по ξ штрихом, запишем систему уравнений (1.1) в безразмерном виде

$$(hw')' - M^2sw + 1 = 0, \quad (k\theta')' + M^2sw^2 + h(w')^2 = 0 \qquad (1.4)$$

Ввиду симметрии задачи по ξ достаточно найти решение на отрезке (0,1). В этом случае граничные условия следует взять в виде

$$w'(0) = 0, \quad w(1) = -K, \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(1) = 0 \qquad (1.5)$$

От абсолютной температуры зависят только σ, $\varkappa$, η, поэтому N входит лишь в функции s, k, h. Для линейной задачи эти функции тождественно равны единице и критерий N выпадает. Здесь предполагается степенная зависимость σ, $\varkappa$, η от температуры

$$\sigma = \sigma_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^\alpha, \qquad \varkappa = \varkappa_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta, \qquad \eta = \eta_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma \qquad (1.6)$$

или

$$s = (1 + N\theta)^\alpha, \quad k = (1 + N\theta)^\beta, \quad h = (1 + N\theta)^\gamma \qquad (1.7)$$

Этот случай представляет интерес при рассмотрении течений плазмы. Так, для полностью ионизованной плазмы $\alpha = 3/2$, $\beta = \gamma = 5/2$; для слабо ионизованного газа характерна очень сильная зависимость коэффициента электропроводности от температуры, которую аппроксимируют обычно степенной функцией с $\alpha \sim 10$. При $\alpha = \beta = \gamma = 0$ задача вырождается в линейную, для которой имеется всего два критерия подобия M и K. Показатели α, β, γ следует рассматривать как дополнительные критерии подобия. Таким образом, решение поставленной нелинейной краевой задачи (1.4, 5) зависит от шести безразмерных параметров, т. е. имеет вид

$$v = v(\xi; K, M, N, \alpha, \beta, \gamma), \quad \theta = \theta(\xi; K, M, N, \alpha, \beta, \gamma) \qquad (1.8)$$

В общем случае оно может быть получено лишь численным способом. При сравнительно небольших значениях M и N использовался метод сопряженных уравнений с итерациями [6]. При больших значениях M и N единственно приемлемым оказался метод конечных разностей.

Задачу можно поставить иначе, задавая вместо поля E силу тока I на единицу длины канала. Тогда в качестве критерия подобия вместо

K удобно ввести безразмерную среднюю плотность тока в канале

$$J = IB \,/\, 2Pa \tag{1.9}$$

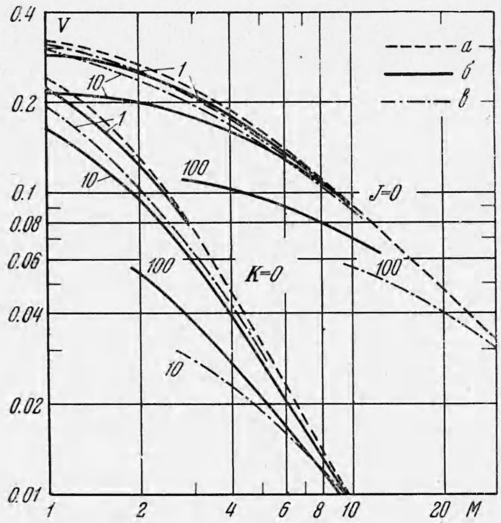
а граничные условия (1.5) заменить следующими:

$$w'(0) = 0, \quad w'(1) = J - 1, \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(1) = 0 \tag{1.10}$$

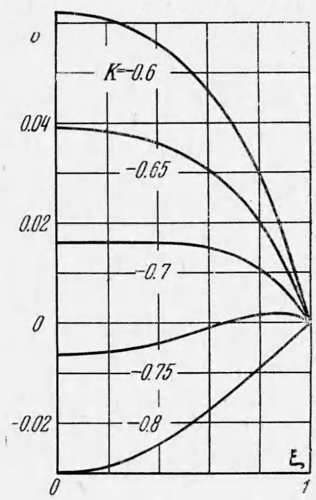
Таким образом, сила тока однозначно связана с производной скорости у стенки. Из уравнений (1.4) может быть получено выражение для безразмерной средней скорости (половины объемного расхода жидкости)

$$V = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{u(y)}{u_P}\,dy = -w(1)\,[1 + w'(1)] - \theta'(1) = KJ + Q \tag{1.11}$$

где Q — величина безразмерного теплового потока в стенку канала.



Фиг. 2



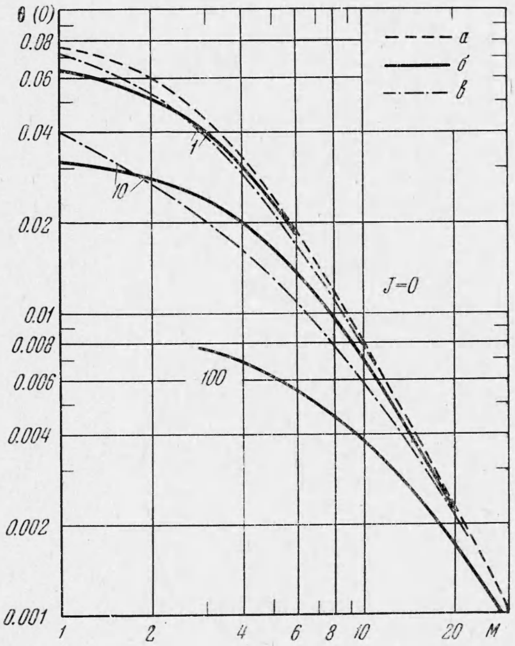
Фиг. 3

Приводим краткую классификацию возможных режимов течения:

(1) $V < 0$, $K < 0$, $J > 0$ — режим кондукционного насоса;
(2) $V = 0$, $K < 0$, $J > 0$ — запирание канала;
(3) $V > 0$, $K < 0$, $J > 0$ — режим электромагнитного тормоза;
(4) $V > 0$, $K = 0$, $J > 0$ — режим короткозамкнутого МГД-генератора;
(5) $V > 0$, $K > 0$, $J > 0$ — режим МГД-генератора;
(6) $V > 0$, $K > 0$, $J = 0$ — режим МГД-генератора на холостом ходу;
(7) $V > 0$, $K > 0$, $J < 0$ — режим МГД-ускорителя.

В дальнейшем основное внимание будет уделено рассмотрению режимов (4) и (6).

2. Для рассматриваемой тепловой задачи распределение температуры монотонно, и коэффициенты переноса плазмы также монотонно возрастают к центру канала. Это означает, что при прочих равных условиях плотность тока и пондеромоторная сила в середине потока должны превосходить соответствующие величины в изотермическом случае, т. е. неизотермичность приводит к уплощению профиля скорости и уменьшению ее среднего значения, если пондеромоторная сила тормозит поток; этот эффект увеличивается с ростом N и α. Степень деформации профиля скорости и изменение ее величины зависят и от режима течения. Например, при $K = 0$ плотность тока нарастает к центру, не меняя знака по сечению канала. Увеличение проводимости еще более вытягивает профиль тока, плавно увеличивая тормозящую силу в центре. В случае $J = 0$, когда плотность тока по сечению знакопеременна, имеет место дополнительное неизотермическое торможение ядра потока, тогда как ускорение пондеромоторной силой внешних областей увеличивается слабее. Хотя в обоих случаях в результате приходим к более наполненному профилю скорости, можно ожидать, что эффекты неизотермичности сильнее проявятся в случае $K = 0$. Приведенные рассуждения иллюстрируются профилями скорости, изображенными на фиг. 1. Цифры на кривых указывают значения числа M. На всех фигурах принято следующее соответствие между значениями α, β, γ и видом кривых: *а*) $\alpha = \beta = \gamma = 0$; *б*) $\alpha = {}^3/_2$, $\beta = \gamma = {}^5/_2$; *в*) $\alpha = 10$, $\beta = \gamma = 0$. В случае $J = 0$ при $M \geqslant 10$ сплошные и пунктирные линии сливаются, тогда как в случае $K = 0$ при $M = 10$ имеется еще заметная разница. На фиг. 2 показано изменение средней скорости V от M для тех же случаев (цифры на кривых указывают значения N). Как видно, учет неизотермичности приводит к уменьшению расхода, причем с ростом N и α разница увеличивается. С ростом M, как и в изотермическом случае, наблюдается более сильное торможение потока при $K = 0$, чем при $J = 0$.



Фиг. 4

Наиболее наглядно разница между линейной и нелинейной задачами проявляется при рассмотрении течения в режиме запирания канала. Как известно, в изотермическом случае при $K = -M^{-2}$ одновременно с V меняется знак v для всех значений ξ. В неизотермическом случае это оказывается невозможным, и вблизи режима $V = 0$ существует некоторая переходная область, в которой $v(\xi)$ знакопеременна, т. е. профиль скорости имеет точки перегиба. На фиг. 3 показано, как влияет изменение K на величину и профиль скорости при $M = 1$, $N = 1$, $\alpha = {}^3/_2$, $\beta = \gamma = {}^5/_2$.

Заметим, что немонотонные профили скорости с точками перегиба появляются с ростом N и при других режимах течения (например, при $K = 0$, $N \gtrsim 100$). Их форма может быть объяснена распределением температур, токов и балансом сил в каждом конкретном случае, однако неясно, могут ли реализоваться такие состояния. Если выполнены условия применимости теоремы Рэлея — Толлмина, то последняя определенно указывает на их неустойчивость. Это, видимо, имеет место, когда параметр гидромагнитного взаимодействия $S = M^2/R$ и магнитное число Рейнольдса $R_m = \sigma_0 \mu u a$ малы. В других случаях вопрос требует особого рассмотрения.

На фиг. 4 показана зависимость максимальной температуры $\theta(0)$ от M для случая $J = 0$. (В случае $K = 0$ имеет место аналогичная картина.) Обращает на себя внимание тот факт, что учет неизотермичности уменьшает температуру в канале как для полностью ионизованной, так и для слабо ионизованной плазмы. Физически это объясняется уменьшением джоулева нагрева вследствие увеличения проводимости. Уменьшение нагрева сильно зависит от числа N (цифры на кривых).

3. Остановимся, наконец, на влиянии неизотермичности течения на коэффициенты поверхностного трения и теплоотдачи в стенки. В рассматриваемую задачу не входит величина плотности жидкости (и, стало быть, формально решения справедливы для любых чисел R). Поэтому удобно вместо обычного коэффициента трения

$$C_f = \frac{-\eta_0 [du / dy]_{y=a}}{\rho u^2 (0) / 2}$$

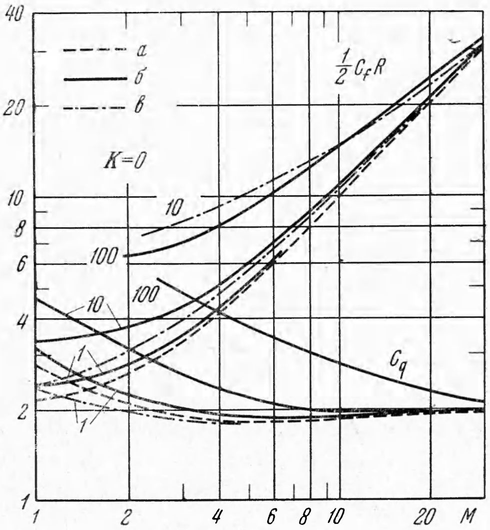
рассматривать безразмерную комбинацию

$$C_f R / 2 = -v' (1) / v (0) \quad (3.1)$$

Безразмерный коэффициент теплоотдачи имеет вид

$$C_q = -\frac{\varkappa_0}{q^\circ} \left[\frac{dT}{dy}\right]_{y=a} = -\frac{\theta' (1)}{\theta (0)}$$

$$\left(q^\circ = \varkappa_0 \frac{T (0) - T_0}{a}\right) \quad (3.2)$$



Фиг. 5

Здесь в качестве масштаба теплового потока выбрана величина q°.

Величины (3.1) и (3.2) в функции M построены на фиг. 5 для случая $K = 0$ (цифры на кривых указывают значения числа N). Как и следовало ожидать, вследствие большей наполненности профилей скорости сопротивление трения в неизотермическом случае больше, причем разница увеличивается с ростом N и α. Семейство убывающих кривых показывает поведение коэффициента C_q. В случае $J = 0$ поведение кривых для коэффициента трения остается качественно таким же, тогда как поведение коэффициента C_q резко меняется: кривые C_q (M) ведут себя подобно кривым поверхностного трения. Указанные зависимости нетрудно понять из рассмотрения поведения v и θ при больших M для случаев $K = 0$ и $J = 0$ в изотермической задаче, где все формулы элементарны.

Напомним в заключение, что во многом обсуждавшиеся выше неизотермические эффекты обусловлены предположением положительности параметров α, β, γ, как это имеет место в случае плазмы. Для других сред, например жидких металлов, α может быть отрицательным, и не будет удивительным, если некоторые из полученных эффектов изменят величину или даже знак.

Авторы глубоко благодарны М. В. Масленникову и Ю. С. Сигову за ценные советы по выбору численного метода решения.

Поступила 18 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Ламинарные течения проводящей жидкости в трубах и каналах при наличии магнитного поля. Магнитная гидродинамика, 1965, № 1.
2. Blewiss Z. O. Magnetogasdynamics of hypersonic Couette flo. J. Aerospace Sci., 1958, vol. 25, No. 10.
3. Bush W. B. Compressible flat-plate boundary-layer flow with an applied magnetic field. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, No. 1.
4. Вулис Л. А., Джаугаштин К. Е. Магнитогидродинамическое течение Куэтта. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 12.
5. Heywood J. B. An MHD channel flow with temperature dependent electrical conductivity. AIAA J., 1965, vol. 3, No. 9.
6. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Изд. иностр. лит., 1962.