3. **Дэвис Т. В.** Теория симмэтричных гравитационных волн конечной амплитуды. I.— В кн.: Теория поверхностных волн. М., ИЛ, 1959.
4. **Некрасов А. Н.** Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Собр. соч. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е. М., «Наука», 1973.
6. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М., «Наука», 1966.
7. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.
8. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Изд. 6-е. М., Физматгиз, 1963.
9. **Иванов В. В.** О применении метода моментов и смешанного метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, № 5.

УДК 532.516

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ВОЛНОВОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Л. Уринцев

(Ростов-на-Дону)

Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости рассматривалось в работах [1, 2]. Существование нелинейных стационарных волн на поверхности вязкой жидкости, стекающей вдоль вертикальной стенки, впервые было строго доказано в работе [3]. Рассмотрению различных режимов течения в падающих пленках посвящена одна из глав монографии [4].

Линейная задача устойчивости плоскопараллельного течения со свободной границей изучалась на основе уравнений Навье — Стокса в [5—9]. Нелинейная задача в рамках уравнения П. Л. Капицы [1] исследовалась в [10—14]; уравнение Кортевега — де - Фриза и близкие к нему для описания движения тонкой пленки жидкости использовались в работах [15, 16]. Нелинейные режимы течения в жидкой пленке и нелинейная устойчивость на основе полной системы уравнений Навье — Стокса в приближении длинных волн изучались в [17—20]. В двух последних работах была вычислена константа Ландау при помощи модифицированного метода Рейнольдса и Поттера [21] и сделан вывод об отсутствии длинноволновых подкритических движений.

1. Волновые режимы вблизи порога устойчивости. Рассмотрим слой вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости ν, стекающей под действием силы тяжести $g = 981$ см/с^2 по плоской поверхности, наклоненной к горизонту под углом χ. На свободной поверхности жидкости пусть действует поверхностное натяжение с коэффициентом T. Будем также считать заданным массовый расход жидкости Γ, определяемый как осредненное по времени значение массы жидкости, протекающей через поперечное сечение и приходящееся на единицу ширины слоя. В качестве масштабов длины, времени и массы выберем соответственно величины $(\nu^2/g)^{1/3}$, $(\nu/g^2)^{1/3}$, $\rho\nu^2/g$ и введем безразмерные параметры

$$\mathrm{Re} = \Gamma/\nu\rho,\quad \gamma = (T/\nu\rho)(\nu g)^{-1/3},$$

первый из которых есть число Рейнольдса, основанное на расходе, а второй характеризует физические свойства жидкости. В такой постановке зависящая от числа Рейнольдса средняя толщина слоя считается неизвестной и подлежит определению. Введем декартову прямоугольную систему координат $O'x'y$, поместив ее начало на дне канала и направив ось x' вниз по потоку, а ось y — к свободной границе. Будем интересоваться периодическими по времени решениями уравнений гидродинамики, имеющими вид стационарных волн, бегущих вдоль оси x' с некоторой неизвестной фазовой скоростью c, т. е. решениями, периодически зависящими от времени t и координаты x' $(x = x' - ct)$. В этом случае уравнения Навье—Стокса удобно записать в форме уравнений движения сплошной среды в напряжениях

$$\begin{aligned} &Du = \tau - v_x,\ Dv = -u_x, \\ &D\sigma = \cos\chi - \tau_x - cv_x + uv_x - vu_x, \\ &D\tau = -\sin\chi - \sigma_x - 4u_{xx} - cu_x + uu_x - vv_x + v\tau, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $D = \partial/\partial y$; индекс x означает частную производную по аргументу x; u и v — продольная и поперечная составляющие вектора скорости; σ и τ — соответственно нормальное ($\sigma = -p + 2Dv$, p — давление) и касательное ($\tau = Du + v_x$) напряжения в жидкой пленке. Первое уравнение системы (1.1) есть фактически определение величины τ, второе — уравнение неразрывности; третье и четвертое уравнения выражают закон сохранения импульса в проекциях на оси y и x' соответственно. Решение системы (1.1) должно быть $2\pi/k$-периодично (k — заданное волновое число) по координате x. На границах слоя жидкости $y = 0$ (твердая стенка) и $y = \zeta(x)$ (свободная поверхность) выполняются условия

$$u = v = 0 \quad (y = 0); \tag{1.2}$$

$$v - (u - c)\zeta_x = 0 \quad (y = \zeta); \tag{1.3}$$

$$\sigma = -p_a + \gamma\zeta_{xx}(1 + \zeta_x^2)^{-3/2} + \tau\zeta_x \quad (y = \zeta); \tag{1.4}$$

$$\tau = 4u_x\zeta_x(1 - \zeta_x^2)^{-1} \quad (y = \zeta), \tag{1.5}$$

где $p_a = \text{const}$ есть безразмерное значение атмосферного давления. Для волновых решений среднее по времени совпадает со средним по переменной x, поэтому условие для расхода принимает в безразмерных переменных вид

$$\mathrm{Re} = \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi/k}\int_0^{\zeta(x)} u(x, y)\,dy\,dx. \tag{1.6}$$

Система (1.1)—(1.6) допускает известное точное решение $u = u'$, $v = v'$, $\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$, $\zeta = \zeta'$, описываемое формулами

$$\begin{aligned} &u' = \sin\chi(\mu y - 0{,}5y^2),\ v' = 0,\quad \sigma' = -p_a + \cos\chi(y - \mu), \\ &\tau' = \sin\chi(\mu - y),\quad \zeta' = \mu,\ \mu = (3\mathrm{Re}/\sin\chi)^{1/3} \end{aligned} \tag{1.7}$$

и соответствующее, как можно видеть, плоскопараллельному течению в слое толщины μ с плоской свободной границей. Задача состоит в нахождении волнового течения жидкости, отличного от (1.7).

Следуя методу расчета автоколебаний сплошных сред, предложенному в [22—24], и ограничиваясь волновыми режимами малой амплитуды, ответвляющимися от плоскопараллельного течения (1.7), будем разыскивать решение поставленной задачи в виде

$$\{u, v, \sigma, \tau, \zeta, c\} = \{u', v', \sigma', \tau', \zeta', c_0\} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \{u_m, v_m, \sigma_m, \tau_m, \zeta_m, c_m\},$$

$$\mu = [3(\mathrm{Re}_0 + \delta\varepsilon^2)/\sin\chi]^{1/3} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{2m} (\delta\varepsilon^2)^m, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 + \delta\varepsilon^2, \quad \mu_0 = (3\mathrm{Re}_0/\sin\chi)^{1/3}, \quad \mu_2 = (9\mathrm{Re}_0^2 \sin\chi)^{-1/3},$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; Re_0, c_0 и μ_0 — критические значения числа Рейнольдса, фазовой скорости и толщины слоя, определяемые по линейной теории; величина δ, равная $+1$ или -1, ответственна за знак приращения числа Рейнольдса. Значение последней заранее неизвестно и определяется в процессе решения задачи.

Снесем граничные условия при $y = \zeta(x)$ на невозмущенную границу $y = \mu_0$, разложив все функции координаты y, входящие в (1.3) — (1.5), в ряды Тейлора в окрестности точки $y = \mu_0$. Затем подставим разложения (1.8) в уравнения (1.1)—(1.6) и соберем члены с одинаковыми степенями параметра ε. В результате приходим к серии рекуррентных линейных задач ($m = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\begin{gathered}
Du_m = \tau_m - v_{mx}, \quad Dv_m = -u_{mx}, \quad D\sigma_m = (U - c_0)v_{mx} - \tau_{mx} + F_m, \\
D\tau_m = (U - c_0)u_{mx} + \mathrm{D}Uv_m - 4u_{mxx} - \sigma_{mx} + G_m, \\
U = \sin\chi(\mu_0 y - y^2/2), \quad u_m = v_m = 0 \quad (y = 0), \\
v_m - V\zeta_{mx} = K_m (y = \mu_0), \quad V = \frac{1}{2}\mu_0^2 \sin\chi - c_0, \\
\sigma_m + \zeta_m \cos\chi - \gamma\zeta_{mxx} = L_m(y = \mu_0), \quad \tau_m - \zeta_m \sin\chi = S_m(y = \mu_0),
\end{gathered} \tag{1.9}$$

для которых требуется найти $2\pi/k$-периодическое по x решение, удовлетворяющее дополнительному условию

$$\int_0^{2\pi/k} \left(\frac{1}{2}\mu_0^2 \sin\chi\zeta_m + \int_0^{\mu_0} u_m dy + Q_m |_{y=\mu_0} \right) dx = 0, \tag{1.10}$$

вытекающему из условия для расхода (1.6) и служащему, как видно из дальнейшего, для определения средней толщины пленки. Здесь F_m, G_m, L_m, S_m, Q_m — известные неоднородности, зависящие от величин с индексом, меньшим номера m. В частности,

$$\begin{gathered}
F_1 = G_1 = K_1 = L_1 = S_1 = Q_1 = 0, \quad F_2 = u_1 v_{1x} - v_1 u_{1x}, \\
G_2 = u_1 u_{1x} - v_1 v_{1x} + v_1\tau_1 - c_1 u_{1x}, \\
K_2 = (\zeta_1 u_1)_x - c_1\zeta_{1x}, \quad L_2 = -\zeta_1 D\sigma_1, \\
S_2 = 4\zeta_{1x} u_{1x} - \zeta_1 D\tau_1, \quad Q_2 = \zeta_1 u_1, \\
F_3 = u_1 v_{2x} + u_2 v_{1x} - v_1 u_{2x} - v_2 u_{1x} - c_2 v_{1x} - c_1 v_{2x} + \delta\mu_2 \sin\chi y v_{1x}, \\
G_3 = (u_1 u_2 - v_1 v_2)_x + v_1\tau_2 + v_2\tau_1 - c_2 u_{1x} - c_1 u_{2x} + \delta\mu_2 \sin\chi(y u_{1x} + v_1), \\
K_3 = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\delta\mu_2(u_1 + \mu_0 \sin\chi\zeta_1) + \zeta_1 u_2 + \zeta_2 u_1 + \frac{1}{2}\zeta_1^2 D u_1 - \\
- \frac{1}{6}\sin\chi\zeta_1^3 - c_2\zeta_1 - c_1\zeta_2\Big], \\
L_3 = 4u_{1x}\zeta_{1x}^2 - \frac{3}{2}\gamma\zeta_{1xx}\zeta_{1x}^2 - \zeta_2 D\sigma_1 - \zeta_1 D\sigma_2 - \delta\mu_2 D\sigma_1 - \frac{1}{2}\zeta_1^2 D^2\sigma_1,
\end{gathered}$$

$$S_3 = 4(u_{1x}\zeta_{2x} + u_{2x}\zeta_{1x} + \zeta_1\zeta_{1x}Du_{1x}) - 8\mu_2 D\tau_1 - \zeta_2 D\tau_1 - \zeta_1 D\tau_2,$$
$$Q_3 = \zeta_2 u_1 + \zeta_1 u_2 + \frac{1}{2}\zeta_1^2 Du_1 - \frac{1}{6}\zeta_1^3 \sin\chi.$$

При $m = 1$ получаем линейную однородную задачу для вычисления собственного вектора и критических значений параметров Re_0 и c_0. Ее решение разыскиваем в форме

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix} = \beta \left\{ e^{ikx} \begin{Bmatrix} u_{1,1}(y) \\ v_{1,1}(y) \\ \sigma_{1,1}(y) \\ \tau_{1,1}(y) \\ \zeta_{1,1} \end{Bmatrix} + e^{-ikx} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1,1}(y) \\ \bar{v}_{1,1}(y) \\ \bar{\sigma}_{1,1}(y) \\ \bar{\tau}_{1,1}(y) \\ \bar{\zeta}_{1,1} \end{Bmatrix} \right\},$$

где β — постоянная, подлежащая определению, которую, не теряя в общности, можно считать положительной (в противном случае следовало бы осуществить сдвиг начала отсчета $x \to x + \pi/k$). Черта означает комплексное сопряжение. В качестве нормировки удобно выбрать условие $\zeta_{1,1} = 1$. При таком выборе $\zeta_1 = 2\beta\cos kx$ и, следовательно, при малых ε величину $2\beta\varepsilon$ можно интерпретировать как амплитуду волн на свободной поверхности жидкости. После отделения переменной x приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$Du_{1,1} = \tau_{1,1} - ikv_{1,1},\ Dv_{1,1} = -iku_{1,1},$$
(1.11)
$$D\sigma_{1,1} = ik[(U - c_0)v_{1,1} - \tau_{1,1}],$$
$$D\tau_{1,1} = ik[(U - c_0)u_{1,1} - \sigma_{1,1}] + 4k^2u_{1,1} + \mathrm{D}Uv_{1,1}$$

с граничными условиями

(1.12) $$u_{1,1} = v_{1,1} = 0\ (y = 0);$$

(1.13) $$\sigma_{1,1} = -\cos\chi - \gamma k^2,\ \tau_{1,1} = \sin\chi\ (y = \mu_0);$$

(1.14) $$v_{1,1} = ikV\ (y = \mu_0).$$

Для построения сопряженной задачи умножим при $m = 1$ первое уравнение системы (1.9) на функцию $\bar{\Lambda}(x, y)$, второе — на $\bar{\Theta}(x, y)$, третье — на $\bar{\Phi}(x, y)$, четвертое — на $\bar{\Psi}(x, y)$ и произведем интегрирование по прямоугольнику $\{0 \leqslant x \leqslant 2\pi/k,\ 0 \leqslant y \leqslant \mu_0\}$, пользуясь периодичностью по x (период $2\pi/k$) и условиями при $y = 0$, μ_0 для величин u_1, v_1, σ_1 и τ_1. Граничные условия для введенных в рассмотрение функций найдем, требуя обращения в нуль внеинтегральных членов, возникающих при интегрировании по частям. В результате придем к сопряженной задаче

$$D\Lambda = 4\Psi_{xx} + (U - c_0)\Psi_x - \Theta_x,\ D\Theta = (U - c_0)\Phi_x - \mathrm{D}U\cdot\Psi - \Lambda_x,$$
$$D\Phi = -\Psi_x,\ D\Psi = -\Lambda - \Phi_x,\ \Phi = \Psi = 0\ (y = 0),\ \Lambda = 0\ (y = \mu_0),$$
$$\sin\chi\cdot\Psi - V\Theta_x + \gamma\Phi_{xx} - \cos\chi\cdot\Phi = 0\ (y = \mu_0),$$

которая после отделения переменной x

$$\{\Lambda, \Theta, \Phi, \Psi\} = e^{ikx}\{\bar{\lambda}(y), \bar{\theta}(y), \bar{\varphi}(y), \bar{\psi}(y)\}$$

и введения нормировки $\theta = 1$ при $y = \mu_0$ приводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$D\lambda = ik[\theta - (U - c_0)\psi] - 4k^2\psi,$$

$$(1.15) \qquad D\theta = ik[\lambda - (U - c_0)\varphi] - \mathrm{D}U\psi, \quad D\varphi = ik\psi, \quad D\psi = ik\varphi - \lambda$$

с граничными условиями

$$(1.16) \qquad \varphi = \psi = 0 \ (y = 0), \ \theta = 1 \ (y = \mu_0);$$

$$(1.17) \qquad (\cos\chi + \gamma k^2)\varphi - \sin\chi\psi = ikV \ (y = \mu_0);$$

$$(1.18) \qquad \lambda = 0 \ (y = \mu_0).$$

Условие разрешимости неоднородных задач (1.9), имеющее вид ($m = 2, 3, 4, \ldots$)

$$(1.19) \qquad \int_0^{\mu_0}\int_0^{2\pi/k} (F_m\varphi + G_m\psi)\,\mathrm{e}^{-ikx}dx\,dy = \int_0^{2\pi/k} (K_m\theta + L_m\varphi + S_m\psi)\,|_{y=\mu_0}\mathrm{e}^{-ikx}dx,$$

позволяет при $m = 2$ заключить, что $c_1 = 0$, если величина

$$I_1 = \theta(\mu_0) - \int_0^{\mu_0} (v_{1,1}\varphi + u_{1,1}\psi)\,dy$$

отлична от нуля. Последнее неравенство проверялось численно и в рассмотренных случаях оказалось выполненным. Решение задачи (1.9), (1.10) при $m = 2$ дается формулами

$$u_2 = \beta^2[y\zeta_{2,0}\sin\chi + u_{2,0}(y) + u_{2,2}(y)\mathrm{e}^{2ikx} + \overline{u}_{2,2}(y)\mathrm{e}^{-2ikx}],$$

$$v_2 = \beta^2[v_{2,2}(y)\mathrm{e}^{2ikx} + \overline{v}_{2,2}(y)\mathrm{e}^{-2ikx}],$$

$$\sigma_2 = \beta^2[-\zeta_{2,0}\cos\chi + \sigma_{2,0}(y) + \sigma_{2,2}(y)\mathrm{e}^{2ikx} + \overline{\sigma}_{2,2}(y)\mathrm{e}^{-2ikx}],$$

$$\tau_2 = \beta^2[\zeta_{2,0}\sin\chi + \tau_{2,0}(y) + \tau_{2,2}(y)\mathrm{e}^{2ikx} + \overline{\tau}_{2,2}(y)\mathrm{e}^{-2ikx}],$$

$$\zeta_2 = \beta^2[\zeta_{2,0} + \zeta_{2,2}\mathrm{e}^{2ikx} + \overline{\zeta}_{2,2}\mathrm{e}^{-2ikx}],$$

причем постоянная $\zeta_{2,0}$, введенная выше, однозначно определяется при помощи условия (1.10) и оказывается равной

$$\zeta_{2,0} = -\frac{1}{\mu_0^2\sin\chi}\left[\int_0^{\mu_0} u_{2,0}(y)\,dy + 2\mathrm{Real}\,u_{1,1}(\mu_0)\right].$$

Остальные величины находим, решая краевые задачи

$$Du_{2,0} = \tau_{2,0}, \ u_{2,0} = 0 \ (y = 0),$$

$$(1.20) \qquad D\sigma_{2,0} = 4k\,\mathrm{Im}\,(u_{1,1}\overline{v}_{1,1}), \ D\tau_{2,0} = 2\,\mathrm{Real}\,(v_{1,1}\overline{\tau}_{1,1}),$$

$$\sigma_{2,0} = 2k^2V^2 \ (y = \mu_0), \ \tau_{2,0} = 2kV\,\mathrm{Im}u_{1,1} \ (y = \mu_0);$$

$$Du_{2,2} = \tau_{2,2} - 2ikv_{2,2}, \ Dv_{2,2} = -2iku_{2,2},$$

$$D\sigma_{2,2} = 2ik[(U - c_0)v_{2,2} - \tau_{2,2}], \ D\zeta_{2,2} = 0,$$

$$(1.21) \qquad D\tau_{2,2} = 2ik\,[(U - c_0)\,u_{2,2} - \sigma_{2,2}] + 16k^2u_{2,2} + \mathrm{D}U\,v_{2,2} +$$

$$+ v_{1,1}\tau_{1,1} + ik\left(u_{1,1}^2 - v_{1,1}^2\right),$$
$$u_{2,2} = v_{2,2} = 0 \ (y = 0), \ v_{2,2} - 2ikV\zeta_{2,2} = 2iku_{1,1} \ (y = \mu_0),$$
$$\sigma_{2,2} + (\cos\chi + 4\gamma k^2)\zeta_{2,2} = k^2V^2 + ik\sin\chi \ (y = \mu_0),$$
$$\tau_{2,2} - \zeta_{2,2}\sin\chi = -(8k^2 + ikV)u_{1,1} - ik(\cos\chi + \gamma k^2) \ (y = \mu_0).$$

Полагая затем в условиях разрешимости (1.19) $m = 3$, приходим к комплексному уравнению для определения двух вещественных постоянных β и c_2

$$ikc_2I_1 + \beta^2 I_2 = \delta\mu_2 I_3,$$

решая которое, получаем

$$\beta = \sqrt{\delta\mu_2\frac{\mathrm{Real}\left(I_3\bar{I}_1\right)}{\mathrm{Real}\left(I_1\bar{I}_2\right)}}, \quad c_2 = \frac{\delta\mu_2\,\mathrm{Im}\left(I_3\bar{I}_2\right)}{k\,\mathrm{Real}\left(I_1\bar{I}_2\right)}. \tag{1.22}$$

При этом знак δ выбирается таким образом, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным; коэффициенты I_2 и I_3 вычисляются по следующим формулам:

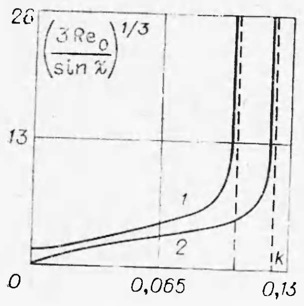
$$I_2 = I_4 - \zeta_{2,0}I_3, \ I_3 = -\sin\chi\int_0^{\mu_0}[iky(v_{1,1}\varphi + u_{1,1}\psi) + v_{1,1}\psi]\,dy +$$
$$+ [ik(u_{1,1} - \mu_0\sin\chi)\,\theta - \varphi D\sigma_{1,1} - \psi D\tau_{1,1}]_{y=\mu_0},$$
$$I_4 = \int_0^{\mu_0}(ik\varphi z_1 + \psi z_2)\,dy - (ik\theta z_3 + \varphi z_4 + \psi z_5)|_{y=\mu_0},$$
$$z_1 = v_{1,1}u_{2,0} + 3(\bar{u}_{1,1}v_{2,2} - u_{2,2}\bar{v}_{1,1}),$$
$$z_2 = v_{1,1}\tau_{2,0} + \bar{v}_{1,1}\tau_{2,2} + v_{2,2}\bar{\tau}_{1,1} + ik(u_{1,1}u_{2,0} + \bar{u}_{1,1}u_{2,2} - \bar{v}_{1,1}v_{2,2}),$$
$$z_3 = u_{2,0} + u_{2,2} + \zeta_{2,2}\bar{u}_{1,1} + Du_{1,1} + 0{,}5(D\bar{u}_{1,1} - \sin\chi),$$
$$z_4 = 1{,}5\gamma k^4 + 4ik^3(\bar{u}_{1,1} + 2u_{1,1}) - \zeta_{2,2}D\bar{\sigma}_{1,1} -$$
$$- D\sigma_{2,0} - D\sigma_{2,2} - D^2\sigma_{1,1} - 0{,}5D^2\bar{\sigma}_{1,1},$$
$$z_5 = 8k^2(\zeta_{2,2}\bar{u}_{1,1} + u_{2,2} + 0{,}5D\bar{u}_{1,1}) - \zeta_{2,2}D\bar{\tau}_{1,1} -$$
$$- D\tau_{2,0} - D\tau_{2,2} - D^2\tau_{1,1} - 0{,}5D^2\bar{\tau}_{1,1}.$$

Как видно из (1.22), значения констант β и c_2 определены и β отлично от нуля, если выполнены условия

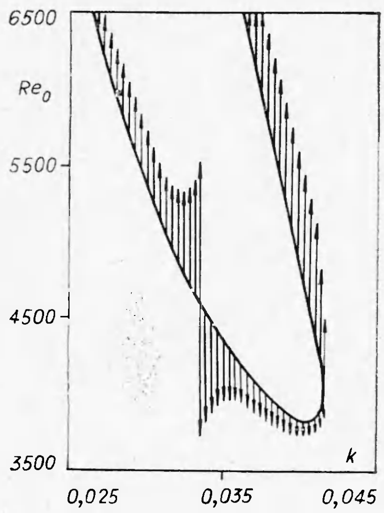
$$\mathrm{Real}(I_3\bar{I}_1) \neq 0, \ \mathrm{Real}(I_1\bar{I}_2) \neq 0, \tag{1.23}$$

из которых вытекает [22, 23] сходимость рядов (1.8) и единственность (с точностью до сдвига $x \to x + \mathrm{const}$) при малых ε автоколебательного режима (1.8), ответвляющегося от плоскопараллельного течения (1.7) и существующего в закритической области $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_0$ при $\delta = +1$ или в докритической $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_0$ в случае $\delta = -1$. Автоколебания имеют вид нелинейных волн, бегущих вследствие положительности скорости c_0 вниз по потоку.

Описанным методом проведено при помощи ЭВМ «ODRA-1204» две серии расчетов вторичных волновых течений вблизи порога устойчивости для фиксированных значений параметров χ, γ и различных волновых



Фиг. 1



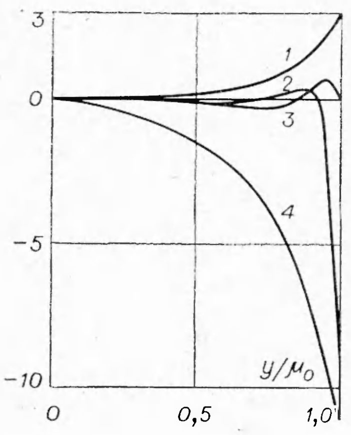
Фиг. 2

чисел: 1) $\chi = 45°$, $\gamma = 3387$; 2) $\chi = 90°$, $\gamma = 2903$. Постоянная γ для первой серии вычислений подсчитана для воды при 20°C ($\rho = 0,9982$ г/см^3, $\nu = 1,004 \cdot 10^{-2}$ см^2/с, $T = 72,75$ дин/см); значения χ и γ второй серии соответствуют условиям эксперимента [2] (вода 15°C, $\rho = 1$ г/см^3, $\nu = 1,14 \cdot 10^{-2}$ см^2/с, $T = 74$ дин/см). При этом исследован характер ветвления решений уравнений гидродинамики как для возмущений типа поверхностных волн [9], так и для волн сдвига. Предварительно путем численного интегрирования уравнений (1.11) найдены с высокой точностью критические значения фазовой скорости c_0 и числа Рейнольдса Re_0; при больших числах Re_0 из-за быстрого роста и осцилляции решений дифференциальных уравнений применялся метод дифференциальной прогонки [25]. Полученные результаты для случая поверхностных волн изображены на фиг. 1. Цифры *1*, *2* у кривых указывают на то, что график построен для набора параметров 1 и 2. Граница устойчивости, соответствующая возникновению волн сдвига Толмина — Шлихтинга, достигается при значительно бо́льших числах Рейнольдса. Нейтральная кривая, имеющая в этом случае форму языка, представлена на фиг. 2 ($\chi = 45°$, $\gamma = 3387$).

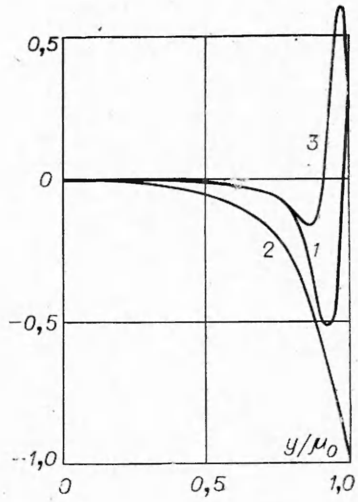
Отметим существование вертикальной асимптоты $k = k_*$ ($k_* \approx 0,102$ в случае 1 и $k_* \approx 0,121$ в случае 2) на графике зависимости $\mathrm{Re}_0(k)$ для моды, соответствующей поверхностным волнам; последние существуют лишь при $k < k_*$ и экспоненциально затухают при $k \geqslant k_*$ вследствие стабилизирующего действия поверхностного натяжения. Критические числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_0(k)$ при $k \to k_*$ неограниченно возрастают, а фазовая скорость волн стремится к скорости невозмущенного параболического течения на свободной границе.

Заметим, что рассчитанные нейтральные кривые отличаются от аналогичных кривых работы [9], где выбраны иные масштабы длины, времени и определяющие параметры: вычисления в [9] проводились для фиксированных значений параметра $W = \gamma\mu_0$ и использовалось безразмерное волновое число $\alpha = k\mu_0$, основанное на толщине слоя.

После нахождения собственных значений проводилось последовательное решение краевых задач (1.11) — (1.13), (1.15) — (1.17), (1.20), (1.21) при помощи комплексного варианта метода ортогонализации [26] на основе алгол-программы, разработанной в [27, 28], подсчитывались функционалы $\zeta_{2,0}$, I_1, I_2, I_3 и находились коэффициенты δ, β и c_2. При этом вычисление интегралов, входящих в функционалы, сводилось к ре-



Фиг. 3



Фиг. 4

шению задачи Коши с нулевым начальным условием при $y = 0$ и осуществлялось одновременно с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений по методу Рунге — Кутта. «Лишние» граничные условия (1.14), (1.18) при решении краевых задач не использовались; точность удовлетворения отброшенных граничных условий определялась точностью задания собственных значений Re_0 и c_0: при идеально точных Re_0, c_0 и идеально точном интегрировании условия (1.14), (1.18) должны автоматически удовлетворяться абсолютно точно. Это обстоятельство использовалось для контроля.

Некоторые из полученных численных результатов приведены в табл. 1. Было найдено, что в случае поверхностных волн для всех волновых чисел из диапазона $0 < k < k_*$ вторичные режимы существуют лишь в закритической области $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_0$. Наиболее четко характерные особенности вторичного течения, имеющего вид поверхностных волн, проявляются при больших числах Рейнольдса. Графики некоторых компонентов решения приведены для этого случая на фиг. 3,4 ($\chi = 45°$, $\gamma = 3387$, $k = 0{,}1019$, $\mathrm{Re}_0 = 2900$, $c_0 = 200{,}5$, $\beta = 8{,}40 \cdot 10^{-4}$, $c_2 = 4{,}33 \times 10^{-2}$, $\zeta_{2,0} = -1{,}41 \cdot 10^{-2}$, $\zeta_{2,2} = -9{,}40 \cdot 10^{-2} - 3{,}91 \cdot 10^{-3} i$), на фиг. 3 кривая *1* — Real $u_{1,1}$, *2* — 100 Im$u_{1,1}$, *3* — 100 Real $v_{1,1}$, *4* — 10 Im $v_{1,1}$; на фиг. 4 кривая *1* — $5u_{2,0}$, *2* — Real $u_{2,2}$, *3* — 10 Im $u_{2,2}$.

Вычисления показали, что характер ветвления стационарного течения (1.7) при образовании волн сдвига определяется величиной волнового числа k. Найденные значения константы β изображены на фиг. 2 в виде стрелок ($\chi = 45°$, $\gamma = 3387$), при этом стрелка направлена вверх, если вторичный волновой режим ответвляется при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_0$ и вниз в противоположном случае. Длина стрелки характеризует численное значение константы β, обращающейся соответственно в бесконечность (нуль) на левом (правом) конце интервала волновых чисел, для которых ветвление является докритическим (см. фиг. 2). Обращение β в нуль в крайней правой точке $k = k_{\max}$ вызвано слиянием верхней и нижней ветви нейтральной кривой ($\beta \sim \mathrm{const}\sqrt{k_{\max} - k}$ при $k \to k_{\max} - 0$); при подходе к левому концу $k = k_0$ интервала волновых чисел знаменатель $\mathrm{Real}(I_1 \bar{I}_2)$ стремится к нулю, так что величина β неограниченно возрастает: $\beta \sim$

Таблица 1

h	Re_0	c_0	β	c_2	$\zeta_{2,0}$	δ	Примечание
0,03	4,525	5,037	0,1980	0,5063	—0,7385	+1	Поверхностные волны $\chi=45°$, $\gamma=3387$
0,06	18,41	12,23	0,2351	0,1524	—0,3892	+1	
0,08	40,35	19,28	0,2224	$0{,}9548\cdot10^{-1}$	—0,1839	+1	
0,10	275,0	50,82	$0{,}6609\cdot10^{-1}$	$0{,}8990\cdot10^{-1}$	$-0{,}5609\cdot10^{-1}$	+1	
$2{,}802\cdot10^{-2}$	6000	67,33	$0{,}250\cdot10^{-1}$	$0{,}223\cdot10^{-1}$	0,694	+1	Волны сдвига $\chi=45°$, $\gamma=3387$
$3{,}260\cdot10^{-2}$	4800	62,64	$0{,}519\cdot10^{-1}$	$0{,}775\cdot10^{-1}$	0,741	+1	
$3{,}693\cdot10^{-2}$	4100	59,98	$0{,}217\cdot10^{-1}$	$0{,}366\cdot10^{-2}$	0,810	—1	
$4{,}044\cdot10^{-2}$	3830*	59,84	$0{,}898\cdot10^{-2}$	$-0{,}749\cdot10^{-2}$	0,924	—1	
$4{,}014\cdot10^{-2}$	4792	68,83	$0{,}532\cdot10^{-2}$	$0{,}104\cdot10^{-1}$	$0{,}128\cdot10^{1}$	+1	
$3{,}739\cdot10^{-2}$	5992	76,87	$0{,}557\cdot10^{-2}$	$0{,}986\cdot10^{-2}$	$0{,}150\cdot10^{1}$	+1	
0,036	3,499	4,490	0,1594	0,7312	—0,9318	+1	Поверхностные волны $\chi=90°$, $\gamma=2903$
0,070	14,23	11,59	0,2165	0,1941	—0,4969	+1	
0,115	110,3	34,87	0,1183	0,1163	$-0{,}9862\cdot10^{-1}$	+1	

Примечание. Звездочкой отмечено минимальное значение числа Рейнольдса на нейтральной кривой, соответствующей волнам сдвига.

$\sim \mathrm{const}|k - k_0|^{-1/2}$ ($k \to k_0$). В этих двух исключительных точках $k = k_0$ и $k = k_{\max}$ условия (1.23) не выполняются и разложения (1.8) теряют силу.

2. Волны конечной амплитуды. Метод, использованный в п. 1 для расчета нелинейных волн малой амплитуды, вынуждает ограничиться некоторой окрестностью нейтральной кривой и оставляет открытым вопрос о применимости найденного решения, содержащего два члена разложения, при конкретных числовых значениях параметра ε. Предлагаемый ниже прямой численный метод расчета поверхностных волн сводит задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений и оказывается пригодным до чисел Рейнольдса, в несколько раз больших критического.

Движение жидкости будем изучать в подвижной системе координат Oxy, перемещающейся вдоль наклонной плоскости со скоростью c, равной фазовой скорости волны. В этой системе отсчета волновое течение становится установившимся. Уравнения движения запишем в форме Громеко-Лемба

$$\begin{gathered}\partial U/\partial y = V_x - \Omega,\ \partial V/\partial y = -U_x,\\ \partial\Omega/\partial y = \sin\chi + \Omega V - H_x,\\ \partial H/\partial y = -\cos\chi - \Omega U + \Omega_x,\end{gathered} \tag{2.1}$$

выбрав в качестве зависимых переменных: $U(x, y)$ — продольную составляющую скорости (относительно системы отсчета Oxy), $V(x, y)$ — поперечную составляющую вектора скорости, $\Omega(x, y)$ — вихрь, $H(x, y) = p - p_a + (U^2 + V^2)/2$ — полное давление, отсчитываемое от уровня p_a. Эти величины вместе с функцией $\zeta(x)$, описывающей форму свободной границы, периодичны по x с заданным периодом $2\pi/k$ и удовлетворяют условиям

$$U = -c,\ V = 0\ (y = 0),\ \tau = 2V_x - \Omega; \tag{2.2}$$

$$\mathrm{Re} - \int\limits_0^\zeta U dy - \frac{ck}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/k}\zeta dx = 0; \tag{2.3}$$

$$(\zeta_x^2 - 1)\tau + 4\zeta_x U_x = 0 \qquad (y = \zeta); \tag{2.4}$$

$$H - 0{,}5(U^2 + V^2) + 2U_x + \tau\zeta_x + \gamma\zeta_{xx}(1 + \zeta_x^2)^{-3/2} = 0 \qquad (y = \zeta), \tag{2.5}$$

эквивалентным соотношениям (1.2) — (1.6).

Приведем задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для этого разложим функции U, V, Ω и H в степенные ряды по поперечной координате y

$$\{U, V, \Omega, H\} = \sum_{m=0}^{M}\{U_m(x), V_m(x), \Omega_m(x), H_m(x)\}\,y^m, \tag{2.6}$$

ограничиваясь конечным числом членов, а затем используем разложение в ряды Фурье

$$\{U_m(x), V_m(x), \Omega_m(x), H_m(x), \zeta(x)\} = \sum_{n=-N}^{N}\{U_{m,n}, V_{m,n}, \Omega_{m,n}, H_{m,n}, \eta_n\}\,e^{inkx}, \tag{2.7}$$

отбрасывая все гармоники с номером $|n| > N$ и полагая одновременно с этим $\mathrm{Im}\,\eta_1 = 0$. Последнее требование позволяет исключить произвольные сдвиги начала отсчета на оси x. Отметим, что коэффициенты Фурье с отрицательным индексом — n получаются из коэффициентов с индексом n посредством операции комплексного сопряжения. Это гарантирует вещественность суммы в (2.7). В качестве неизвестных искомой нелинейной алгебраической системы выберем скорость волны c и числа η_n, $\Omega_{0,n}$, $H_{0,n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, N$), что с учетом вещественности η_0, η_1, $\Omega_{0,0}$, $H_{0,0}$ дает $6N + 3$ неизвестных в вещественной форме. Уравнения для их определения дают условия (2.3)—(2.5). В самом деле, уравнения движения (2.1) после подстановок (2.6), (2.7) сведутся к рекуррентной системе относительно числовых коэффициентов

$$(m+1)U_{m+1,n} = iknV_{m,n} - \Omega_{m,n}, \quad (m+1)V_{m+1,n} = -iknU_{m,n},$$

$$(2.8)\quad (m+1)\,\Omega_{m+1,n} = \sin\chi\delta_{m,n} - iknH_{m,n} + \sum_{s=0}^{m}\langle\Omega_s(x)\,V_{m-s}(x)\rangle_n,$$

$$(m+1)\,H_{m+1,n} = -\cos\chi\delta_{m,n} + ikn\Omega_{m,n} - \sum_{s=0}^{m}\langle\Omega_s(x)\,U_{m-s}(x)\rangle_n,$$

$$U_{0,n} = -c\delta_{0,n}, \quad V_{0,n} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, N;\ m = 0, 1, \ldots, M-1),$$

позволяющей при назначенных c, $\Omega_{0,n}$, $H_{0,n}$ ($n = 0, 1, \ldots, N$) последовательно вычислить все коэффициенты $U_{m,n}$, $V_{m,n}$, $\Omega_{m,n}$, $H_{m,n}$ с индексом $m > 0$. Величина $\delta_{m,n}$, фигурирующая в (2.8), полагается равной единице, если $m = n = 0$, и равной нулю в противоположном случае; символ $\langle\ \rangle_n$ означает коэффициент Фурье при гармонике $\exp(inkx)$, причем можно показать, что если функции $a(x)$ и $b(x)$ представляют собой отрезки ряда Фурье

$$a(x) = \sum_{n=-N_a}^{N_a} a_n e^{inkx}, \quad b(x) = \sum_{n=-N_b}^{N_b} b_n e^{inkx},$$

то имеет место формула

$$\langle a(x)\,b(x)\rangle_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=-\min(N_a,N_b-n)}^{\min(N_a,N_b+n)} a_s b_{n-s}, & |n| \leqslant N_a + N_b, \\ 0, & |n| > N_a + N_b, \end{cases}$$

позволяющая при помощи ЭВМ найти коэффициенты разложения в ряд Фурье величин U, V, U_x, V_x и т. п. на свободной границе $y = \zeta(x)$ с использованием (2.6) и алгоритма Горнера вычисления значений полинома. Коэффициенты Фурье для кривизны $C(x) = \zeta_{xx}(1 + \zeta_x^2)^{-3/2}$ можно вычислить, воспользовавшись формулами гармонического анализа периодической функции [29]

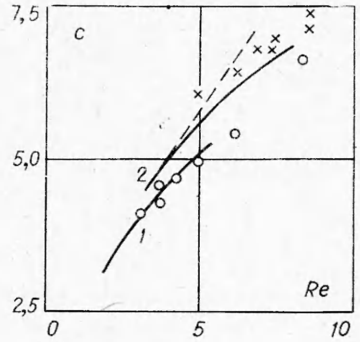
$$\langle C(x)\rangle_n = \frac{1}{2(N+1)}\sum_{s=0}^{2N+1} C(x_s)\,e^{-inkx_s}, \quad x_s = \frac{\pi s}{k(N+1)}, \quad |n| \leqslant N.$$

Подставляя затем найденные фурье-разложения в левую часть равенств (2.3) — (2.5), произведем необходимые умножения рядов Фурье, соберем коэффициенты при гармониках $\exp(inkx)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, N$) и приравняем их в соответствии с видом правых частей нулю. В итоге это и даст в вещественной форме систему из $6N + 3$ нелинейных уравнений относительно такого же количества неизвестных.

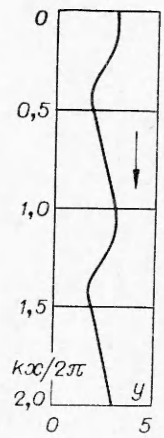
Таблица 2

Re	c	$\mu-\eta_0$	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	Примечание
3,58	4,75	$8,96\cdot10^{-3}$	0,1	$-2,96\cdot10^{-3}$ $-8,05\cdot10^{-}$[illegible]i	$-1,90\cdot10^{-4}$ $+5,56\cdot10^{-4}i$	$3,76\cdot10^{-5}$ $-2,90\cdot10^{-5}i$	$-4,16\cdot10^{-6}$ $+4,66\cdot10^{-7}i$	
4,61	5,39	$3,27\cdot10^{-2}$	0,2	$-1,15\cdot10^{-2}$ $-3,02\cdot10^{-2}i$	$-1,25\cdot10^{-3}$ $+4,04\cdot10^{-3}i$	$4,96\cdot10^{-4}$ $-4,14\cdot10^{-4}i$	$-1,02\cdot10^{-4}$ $+1,65\cdot10^{-5}i$	Вода
6,26	6,20	$6,60\cdot10^{-2}$	0,3	$-2,61\cdot10^{-2}$ $-6,37\cdot10^{-2}i$	$-3,29\cdot10^{-3}$ $+1,26\cdot10^{-2}i$	$2,20\cdot10^{-3}$ $-2,04\cdot10^{-3}i$	$-6,17\cdot10^{-4}$ $-7,84\cdot10^{-5}i$	$k=0,036$
7,35	6,65	$8,50\cdot10^{-2}$	0,35	$-3,54\cdot10^{-2}$ $-8,41\cdot10^{-2}i$	$-3,40\cdot10^{-3}$ $+1,87\cdot10^{-2}i$	$4,25\cdot10^{-3}$ $-5,14\cdot10^{-3}i$	$-1,45\cdot10^{-3}$ $-1,47\cdot10^{-3}i$	$\gamma=2903$
2,20	3,40	$1,04\cdot10^{-2}$	0,1	$-2,77\cdot10^{-3}$ $-1,25\cdot10^{-2}i$	$-6,65\cdot10^{-4}$ $+9,58\cdot10^{-4}i$	$1,18\cdot10^{-4}$ $-3,26\cdot10^{-5}i$	$-1,29\cdot10^{-5}$ $-5,16\cdot10^{-6}i$	Спирт
3,30	4,19	$3,65\cdot10^{-2}$	0,2	$-1,04\cdot10^{-2}$ $-4,55\cdot10^{-2}i$	$-4,24\cdot10^{-3}$ $+6,63\cdot10^{-3}i$	$1,46\cdot10^{-3}$ $-4,62\cdot10^{-4}i$	$-2,78\cdot10^{-4}$ $-1,08\cdot10^{-4}i$	$k=0,062$
5,07	5,13	$7,12\cdot10^{-2}$	0,3	$-2,27\cdot10^{-2}$ $-9,21\cdot10^{-2}i$	$-6,51\cdot10^{-3}$ $+2,17\cdot10^{-2}i$	$1,02\cdot10^{-2}$ $-4,86\cdot10^{-3}i$	$1,13\cdot10^{-4}$ $-4,05\cdot10^{-3}i$	$\gamma=530,5$

Фактические вычисления поверхностных волн были проведены при $\chi = 90°$ и различных числах Рейнольдса для значений γ, соответствующих опытам [2] с водой ($\gamma = 2903$) и спиртом ($\gamma = 530{,}5$, $\rho = 0{,}79$ г/см^3, $\nu = 2{,}02 \times 10^{-2}$ см^2/с, $T = 22{,}9$ дин/см). При этом в окончательной серии расчетов было принято $M = 10$, $N = 5$; для решения системы 33 нелинейных алгебраических уравнений использовался метод Ньютона с аппроксимацией частных производных, входящих в якобиан, конечными разностями. Безразмерное волновое число задавалось на основе экспериментальных данных равным 0,036 для воды и 0,062 для спирта. Некоторые из полученных численных результатов приведены в табл. 2. Найдено, что средняя толщина пленки η_0 при волновом стекании жидкости оказывается меньше толщины слоя для плоскопараллельного течения (1.7) при том же самом числе Рейнольдса (разность $\mu - \eta_0$ положительна, см. табл. 2). Это обстоятельство отмечается и в ряде экспериментов [30]. Рассчитанная зависимость фазовой скорости от числа Рейнольдса для спирта (сплошная линия *1*) и для воды (сплошная линия *2*) представлена вместе с экспериментальными данными работы [2] на фиг. 5 (кружки — опыты со спиртом, крестики — с водой), штриховой линией нанесен график зависимостей $c = c_0 + c_2(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_0)$, построенный для случая $\gamma = 2903$, $k = 0{,}036$ на основе вычислений п. 1. Характерный профиль нелинейной волны на свободной поверхности изображен на фиг. 6 ($\gamma = 530{,}5$, $k = 0{,}062$, $M = 10$, $N = 5$, $\mathrm{Re} = 5{,}07$, $c = 5{,}13$), направление течения жидкости указано стрелкой.



Фиг. 5



Фиг. 6

Автор благодарен В. И. Юдовичу, Б. Г. Покусаеву, И. Р. Шрейберу и участникам семинара, руководимого Г. И. Петровым, за внимание к работе и полезное обсуждение.

Поступила 26 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1, с. 3.
2. **Капица П. Л., Капица С. П.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2, с. 105—120.
3. **Пухначев В. В.** К теории катящихся волн.— ПМТФ, 1975, № 5, с. 47—58.
4. **Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.** Гидродинамика газожидкостных систем. М., «Энергия», 1976.
5. **Benjamin T. B.** Wave formation in laminar flow down an inclined plane.— «J. Fluid Mech.», 1957, vol. 2, N 6, p. 554.
6. **Иванилов Ю. П.** Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном.— ПММ, 1960, т. 24, № 2, с. 280—281.
7. **Yih C. S.** Stability of liquid flow down an inclined plane.— «Phys. Fluids», 1963, vol. 6, p. 321—334. Рус. пер.— Сб. Механика, 1963, № 5 (81), с. 77—100.

8. **Lin S. P.** Instability of a liquid film flowing down an inclined plane.—«Phys.Fluids», 1967, vol. 10, N 2, p. 308—313.
9. **Гончаренко Б. Н., Уринцев А. Л.** Об устойчивости течения вязкой жидкости по наклонной плоскости.— ПМТФ, 1975, № 2, с. 172—176.
10. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонких жидких пленок под действием силы тяжести.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 1, с. 43—51.
11. **Шкадов В. Я.** К теории волновых течений тонкой пленки жидкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1968, № 2, с. 20—25.
12. **Есманль М. Набиль, Шкадов В. Я.** К нелинейной теории волн в слое вязкой жидкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 4, с. 54—59.
13. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.—«Научн. труды Ин-та механики МГУ», 1973, вып. 25.
14. **Маурин Л. Н.** Развитые установившиеся волновые движения жидкой пленки, стекающей по вертикальной плоскости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1975, № 2, с. 24—30.
15. **Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р.** Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости.— ПМТФ, 1973, № 2, с. 109—113.
16. **Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.** Нелинейные волны в неравновесных средах.— «Радиофизика», 1976, т. XIX, № 5—6, с. 721—766.
17. **Непомнящий А. А.** Волновое движение в слое вязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости.— В кн.: Гидродинамика. Вып. VIII. Пермь, 1976, с. 114—126.
18. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3, с. 28—33.
19. **Lin S. P.** Finite-amplitude stability of a parallel flow with a free surface.— «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, N 1, p. 113—126.
20. **Lin S. P.** Roles of surface tension and Reynolds stresses on the finite amplitude stability of a parallel flow with a free surface.— «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, N 2, p. 307—314.
21. **Reynolds W. C., Potter M. C.** Finite-amplitude instability of parallel shear flows.— «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 27, N 3, p. 465—492. Рус. пер.— Сб. Механика, 1968, № 2 (108), с. 71—98.
22. **Юдович В. И.** Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, № 4, с. 638—655.
23. **Юдович В. И.** Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима.— ПММ, 1972, т. 36, № 3, с. 450—459.
24. **Андрейчиков И. П., Юдович В. И.** Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4, с. 791—794.
25. **Сапожников В. А.** Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки.— В кн.: Труды II Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, «Наука», 1969, с. 212—220.
26. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— «Усп. мат. наук», 1961, т. XVI, вып 3 (99), с. 171—174.
27. **Уринцев А. Л.** Возникновение автоколебаний в пограничном слое.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Труды XVIII Сибирского теплофизического семинара. I. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975, с. 165—172.
28. **Уринцев А. Л.** Расчет автоколебаний, возникающих при потере устойчивости спирального течения вязкой жидкости в кольцевой трубе.— ПМТФ, 1976, № 3, с. 57—63.
29. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967, с.319.
30. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В.** Течение тонких пленок жидкости.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.