Так как для $v_2' = 0$ решение редуцируется к плоской деформации, то необходимо считать $v_2' \neq 0$. Тогда из последних уравнений находятся выражения для $S_{12}$, $S_2$, $S_{23}$. Подставляя их в условие Мизеса, получаем квадратичное уравнение на $S_{13}$, из которого следует $|S_1(h+1)h^{-1/2}/(2k)| \leqslant \leqslant 1$ $(h \equiv (v_2')^2 + (v_3')^2)$. Вводится угол $\theta$ такой, что $\sin\theta = S_1(h+1)h^{-1/2}/ /(2k)$.

Если $S_1 = S_1(v_1)$ (или $\theta = \theta(v_1)$), то $\sigma = \sigma(v_1)$ и решение редуцируется к простой волне. Поэтому в качестве параметров двойной волны выбираются $S_1$ и $v_1$. Подставив $\sigma = \sigma(S_1, v_1)$ в (1) с учетом первых двух независимых уравнений (46), запишем

$$b_{i\alpha}\partial S_1/\partial x_\alpha + b_{i4}w_1 = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{47}$$

вид коэффициентов $b_{ij}$ ($i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4$) довольно громоздок и здесь не приводится. Все последующие выкладки также проделывались на ЭВМ, и здесь даются только ход рассуждений и окончательные результаты.

Для того чтобы не было редукции двойной волны к инвариантному решению в (47), независимых уравнений должно быть не больше двух. Значит, ранг матрицы $B = (b_{ij})$ не больше двух. Если обозначить через $B_j$ квадратную матрицу, составленную из матрицы $B$ без $j$-го столбца, то $\det(B_j) = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), приравнивая нулю $\det(B_4)$,

$$\partial\sigma/\partial S_1((\partial\sigma/\partial S_1)^2 - (h+1)^2/(4h\cos^2\theta)) = 0.$$

Откуда следует: либо $\sigma = \sigma(v_1)$, либо $\sigma = \pm S_1(h+1)h^{-1/2}/(2\cos\theta) + + \varphi(v_1)$. Подставив выражения для $\sigma$ в $\det(B_3) = 0$, в обоих случаях получим полином относительно $\operatorname{tg}\theta$ с коэффициентами, зависящими от $v_1$. Так как $\theta$ и $v_1$ считаются функционально независимыми, то эти коэффициенты должны обращаться в нуль. Но среди соотношений имеются противоречивые равенства, например $h + 1 = 0$. Таким образом, в данном случае, когда $v_i = v_i(v_1)$ ($i = 2, 3$), двойных волн, нередуцируемых к инвариантным решениям или к простым волнам, нет.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
2. **Peradzynski Z.** Hyperbolic flows in ideal plasticity // Arch. Mech.— 1975.— V. 27, N 1.
3. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.
4. **Мелешко С. В.** Двойные волны в идеальном жесткопластическом теле при плоской деформации // ПМТФ.— 1990.— № 2.
5. **Ганжа В. Г., Мелешко С. В., Шапеев В. П.** Промежуточные выкладки в аналитических исследованиях дифференциальных уравнений на ЭВМ // Моделирование в механике/АН СССР, Спб. отд-ние, ИТПМ.— 1989.— Т. 3, № 4.


*г. Новосибирск* *Поступила 14/VIII 1989 г.*

---

УДК 539.412

*Л. Г. Смирнов, И. И. Федик*

# ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВОГО ПЯТНА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Задача об определении термонапряженного состояния тела при нагреве по пятну, занимающему некоторую область, сводится к задаче об определении упругих напряжений при заданных разрывах перемещений на границе пятна [1]. Последняя эквивалентна задаче об определении упругих напряжений, вызванных наличием включения, предварительно подвергнутого собственной деформации и имеющего упругие характеристики, что и окружающая среда, а затем вставленного в отверстие, занимае-

мое областью пятна [2]. В плоском случае использование метода Мусхелишвили позволяет свести эту задачу к стандартной краевой задаче теории упругости для всей области, занимаемой телом, с измененными внешними усилиями [2]. Когда же пятно имеет круговую форму, решение может быть найдено в замкнутом виде [3—5]. Решение задачи об определении напряжений в полуплоскости при эллиптической форме пятна и постоянной величине подогрева $\Delta T$ также записывается в замкнутом виде [6]. Данная работа посвящена получению такого решения для плоскости с круговым инородным включением при эллиптической форме пятна и $\Delta T = \text{const}$.

Пусть упругая плоскость с круговым инородным включением нагревается по некоторой области $D$, ограниченной контуром $L$, от начальной температуры $T_0$, при которой напряженное состояние отсутствует, до температуры $T_1$. Предполагается, что контур $L$ не пересекается с окружностью $L_0$, ограничивающей инородное включение, и может представлять собой систему непересекающихся замкнутых контуров $L_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Не теряя общности, будем считать, что контур $L$ состоит из двух контуров $L_1$ и $L_2$, ограничивающих области $D_1^+$ и $D_2^+$, которые целиком лежат внутри и вне окружности $L_0$ соответственно. Область, лежащую между контурами $L_0$ и $L_1$, обозначим через $D_1^-$, область между $L_0$ и $L_2$ — через $D_2^-$. Известно [2], что возникающее напряженное состояние эквивалентно тому, которое возникает от предварительно подвергнутых собственной деформации включений, занимающих области $D_j^+$, из того же материала, что и внешняя к ним среда, а затем вставленных в отверстие с контурами $L_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим, что центр кругового инородного включения радиусом $R_0$ совпадает с началом координат плоскости $x, y$; $\mu_j$, $\nu_j$, $\alpha_j$ — модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициенты теплового расширения материалов инородного включения ($j = 1$) и внешней к нему среды ($j = 2$). Для нахождения напряженного состояния воспользуемся методом Мусхелишвили. Считая, что на общей границе включений со средой имеет место идеальный контакт, условия равенства нормальных и касательных напряжений, а также наличие скачка перемещений на линиях раздела сред, вызванных собственной деформацией, записываются в форме

$$(1)\qquad \varphi_0^-(t) + t\overline{\varphi_0^{-\prime}(t)} + \overline{\psi_0^-(t)} = \varphi^-(t) + t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} + \overline{\psi^-(t)} + C_1,$$

$$\left(\varkappa_1\varphi_0^-(t) - t\overline{\varphi_0^{-\prime}(t)} - \overline{\psi_0^-(t)}\right)/\mu_1 = \left(\varkappa_2\varphi^-(t) - t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} - \overline{\psi^-(t)}\right)/\mu_2 \quad (t \in L_0);$$

$$(2)\qquad \varphi_0^+(t) + t\overline{\varphi_0^{+\prime}(t)} + \overline{\psi_0^+(t)} = \varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0^{-\prime}(t)} + \overline{\psi_0^-(t)} + C_2,$$

$$\varkappa_1\varphi_0^+(t) - t\overline{\varphi_0^{+\prime}(t)} - \overline{\psi_0^+(t)} = \varkappa_2\varphi_0^-(t) - t\overline{\varphi_0^{-\prime}(t)} - \overline{\psi_0^-(t)} + 2\mu_1 g_1(t) \quad (t \in L_1);$$

$$(3)\qquad \varphi^+(t) + t\overline{\varphi^{+\prime}(t)} + \overline{\psi^+(t)} = \varphi^-(t) + t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} + \overline{\psi^-(t)} + C_3,$$

$$\varkappa_1\varphi^+(t) - t\overline{\varphi^{+\prime}(t)} - \overline{\psi^+(t)} = \varkappa_2\varphi^-(t) - t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} - \overline{\psi^-(t)} + 2\mu_2 g_2(t) \quad (t \in L_2).$$

Здесь $\varphi_0^+(t)$, $\psi_0^+(t)$ — граничные значения функций, голоморфных в области $D_1^+$; $\varphi_0^-(t)$, $\psi_0^-(t)$ — граничные значения функций, голоморфных в области $D_1^-$; $\varphi^+(t)$, $\psi^+(t)$ — в области $D_2^+$; $\varphi^-(t)$, $\psi^-(t)$ — в области $D_2^-$ $(t = x + iy)$; $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ и $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ — в случаях плосконапряженного и плоскодеформированного состояния; $g_j(t) = u_j + iv_j$ — скачки перемещений на линиях $L_j$ $(j = 1, 2)$. Легко видеть, что постоянные $C_j$ $(j = 1, 2, 3)$ можно включить в состав искомых функций, а потому будем полагать $C_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ [2].

Используя условия (2), (3), как показано в [2], функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ и $\varphi(z)$, $\psi(z)$, равные $\varphi_0^{\pm}(z)$, $\psi_0^{\pm}(z)$ при $z \in D_1^{\pm}$ и $\varphi^{\pm}(z)$, $\psi^{\pm}(z)$ при $z \in D_2^{\pm}$, можно представить как

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varphi_0(z) &= \varphi_1(z) + \varphi_{1*}(z), & \psi_0(z) &= \psi_1(z) + \psi_{1*}(z);\\ \varphi(z) &= \varphi_2(z) + \varphi_{2*}(z), & \psi(z) &= \psi_2(z) + \psi_{2*}(z), \end{aligned}$$

где функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ голоморфны соответственно внутри и вне $L_0$, и имеет место представление

$$
\varphi_{j*}(z) = \frac{\mu_j}{\pi i (1 + \varkappa_j)} \int\limits_{L_j} \frac{g_j(t)\,dt}{t-z}, \tag{5}
$$

$$
\psi_{j*}(z) = \frac{\mu_j}{\pi i (1 + \varkappa_j)} \int\limits_{L_j} \frac{h_j(t)\,dt}{t-z},
$$

где

$$
h_j(t) = -\overline{g_j(t)} - \bar{t} g_j'(t) \quad (j = 1,\ 2). \tag{6}
$$

Подставляя выражения (4) в условия (1), получим

$$
\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} + f_1(t); \tag{7}
$$

$$
\varkappa_1\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = \gamma\,(\varkappa_2\varphi_2(t) - t\overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)}) + f_2(t), \tag{8}
$$

где

$$
\gamma = \mu_1/\mu_2,\ f_1(t) = p_2(t) - p_1(t),\ f_2(t) = \gamma q_2(t) - q_1(t), \tag{9}
$$

$$
p_j(t) = \varphi_{j*}(t) + t\overline{\varphi_{j*}'(t)} + \overline{\psi_{j*}(t)}, \quad q_j(t) = \varkappa_j\varphi_{j*}(t) - t\overline{\varphi_{j*}'(t)} - \overline{\psi_{j*}(t)}
$$

$$
(j = 1,\ 2).
$$

Таким образом, задача сводится к нахождению голоморфных функций $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ $(j = 1,\ 2)$ внутри $(j = 1)$ и вне $(j = 2)$ окружности $L_0$ $(|t| = R_0)$ по условиям сопряжения (7), (8). Учитывая, что при $t \in L_0$ имеет место равенство $\bar{t} = R_0^2/t$, легко видеть, что функции $\overline{\varphi_1(t)}$, $\overline{\psi_1(t)}$ и $\overline{\varphi_2(t)}$, $\overline{\psi_2(t)}$ — это граничные значения функций, голоморфных соответственно внутри и вне контура $L_0$. Действительно, поскольку $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ голоморфны внутри $L_0$, а $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ — вне $L_0$, то $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$ $(j = 1,\ 2)$ представляются в виде

$$
\varphi_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \quad \psi_1(z) = \sum_0^\infty b_n z^n, \quad \varphi_2(z) = \sum_0^\infty c_n z^{-n}, \quad \psi_2(z) = \sum_0^\infty d_n z^{-n}, \tag{10}
$$

а значит,

$$
\overline{\varphi_1'(t)} = \sum_0^\infty n\overline{a_n t^{n-1}} = \sum_0^\infty n\bar{a}_n R_0^{2n-2} t^{-n+1}, \quad \overline{\psi_1(t)} = \sum_0^\infty \bar{b}_n R_0^{2n} t^{-n},
$$

$$
\overline{\varphi_2'(t)} = -\sum_0^\infty n\overline{c_n t^{-n-1}} = -\sum_0^\infty n\bar{c}_n R_0^{-2n-2} t^{n+1}, \quad \overline{\psi_2(t)} = \sum_0^\infty \bar{d}_n R_0^{-2n} t^n.
$$

Отсюда следует, что $\overline{\varphi_1'(t)}$, $\overline{\psi_1(t)}$ и $\overline{\varphi_2'(t)}$, $\overline{\psi_2(t)}$ — граничные значения функций $\bar{\varphi}_1'(R_0^2/z)$, $\bar{\psi}_1(R_0^2/z)$ и $\bar{\varphi}_2'(R_0^2/z)$, $\bar{\psi}_2(R_0^2/z)$, голоморфных вне и внутри $L_0$ $(\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$, дифференцирование происходит по переменной $\xi = R_0^2/z)$. Умножая обе части равенств (7), (8) на коэффициент $1/(2\pi i(t - z))$ и интегрируя вдоль $L_0$, с учетом вышесказанного из (9), (10) получим для $z$, лежащих внутри круга,

$$
\varphi_1(z) + \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 = c_0 + z\bar{\varphi}_2'(R_0^2/z) + \bar{\psi}_2(R_0^2/z) + f_1^+(z); \tag{11}
$$

$$
\varkappa_1\varphi_1(z) - \bar{a}_1 z - 2\bar{a}_2 = \gamma\left(\varkappa_2 c_0 - z\bar{\varphi}_2'(R_0^2/z) - \bar{\psi}_2(R_0^2/z)\right) + f_2^+(z), \tag{12}
$$

где

$$
f_j^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_j} \frac{f_j(t)}{t-z}\,dt. \tag{13}
$$

Из (11), (12) имеем

$$\varphi_1(z) = \left[\left(f_2^+(z) + \gamma f_1^+(z)\right) + \gamma(1+\varkappa_2)c_0 + (1-\gamma)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2\right)\right]/(\varkappa_1+\gamma). \tag{14}$$

Аналогичным образом при $z$, лежащих вне круга, запишем

$$z\bar{\varphi}_1'\left(R_0^2/z\right) + \bar{\psi}_1\left(R_0^2/z\right) = \varphi_2(z) - c_0 + f_1^-(z); \tag{15}$$

$$-z\bar{\varphi}_1'\left(R_0^2/z\right) - \bar{\psi}_1\left(R_0^2/z\right) = \gamma\left(\varkappa_2\varphi_2(z) - \varkappa_2 c_0\right) + f_2^-(z). \tag{16}$$

Тогда

$$\varphi_2(z) = -\left(f_1^-(z) + f_2^-(z) - (1+\varkappa_2)c_0\right)/(1+\gamma\varkappa_2) \tag{17}$$

(под $f_j^-(z)$ понимается интеграл в правой части (13) при $z$, лежащих вне круга);

$$\psi_1(z) = -R_0^2\left(\varphi_1'(z) - a_1\right)/z + \bar{\varphi}_2\left(R_0^2/z\right) - \bar{a}_0 + \bar{f}_1^+\left(R_0^2/z\right); \tag{18}$$

$$\psi_2(z) = -R_0^2\left(\varphi_2'(z) - a_1\right)/z + \bar{\varphi}_1\left(R_0^2/z\right) - \bar{a}_0 - \bar{f}_1^-\left(R_0^2/z\right). \tag{19}$$

В формулах (14)—(17) постоянную $c_0$ можно положить равной нулю, поскольку задача с условиями (7), (8) сохраняет произвол в определении $\varphi_2(z)$ (либо $\psi_2(z)$) с точностью до аддитивной постоянной. Дифференцируя дважды обе части равенства (14) и затем полагая $z = 0$, находим

$$a_0 = F''(0)/(2(\varkappa_1+\gamma)) \quad \left(F(z) = f_2^+(z) + \gamma f_1^+(z)\right).$$

При однократном дифференцировании обеих частей уравнения (14) при $z = 0$ получим уравнение для нахождения $a_1$:

$$a_1 = \left(F'(0) + (1-\gamma)(\varkappa_1+\gamma)^{-1}\overline{F'(0)}\right)/\left(1 + (\gamma-1)^2(\varkappa_1+\gamma)^{-2}\right). \tag{20}$$

При $z = 0$ из (14) имеем $a_2 = a_0(\varkappa_1+\gamma) - F(0)/(2(1-\gamma))$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда контур $L_j$ — эллипс с полуосями $a_j^0$, $b_j^0$ и углом $\theta_j$ между направлениями полуоси $a_j^0$ и осью $x$, а $T_1^{(j)} - T_0^{(j)} = \Delta T^{(j)} = \text{const}$. Легко видеть, что

$$g_j(t) = -\varepsilon_j(t - z_j),\quad h(t) = -\varepsilon_j(\bar{z}_j - 2\bar{t}),\quad \varepsilon_j = \alpha_j k_j \Delta T^{(j)}, \tag{21}$$

где $z_j$ — центр эллипса с контуром $L_j$; $k_j = 1$ и $k_j = \dfrac{1+\nu_j}{1-\nu_j}$ в случаях плосконапряженного и плоскодеформированного состояний соответственно. Из (5) с учетом (6) и (21) находим выражения для $\varphi_{1*}(z)$ и $\psi_{1*}(z)$, необходимые для вычисления напряжений:

$$\varphi_{j*}(z) = \frac{\mu_j}{\pi i(1+\varkappa_j)}\int\limits_{L_0}\frac{g_j(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} -\beta_j(z - z_j) & (z \in D_j^+),\\ 0 & (z \in D_j^-);\end{cases} \tag{22}$$

$$\psi_{j*}(z) = \frac{\mu_j}{\pi i(1+\varkappa_j)}\int\limits_{L_0}\frac{h_j(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} -\beta_j\bar{z} + 2\beta_j I(z) & (z \in D_j^+),\\ 2\beta_j I(z) & (z \in D_j^-)\end{cases} \tag{23}$$

$$\left(\beta_j = 2\varepsilon_j\mu_j/(1+\varkappa_j),\quad I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\bar{t}\,dt}{t-z}\right).$$

Для вычисления $I(z)$ используем функцию конформного отображения внешности эллипса $L_j$ на внешность единичного круга $\gamma_0$ в плоскости $\zeta$, которая имеет вид

$$z = \omega_j(\zeta) = R_j\left(\zeta + m_j\zeta^{-1}\right)e^{i\theta_j} + z_j \quad \left(R_j = (a_j^0 + b_j^0)/2,\quad m = \frac{a_j^0 - b_j^0}{a_j^0 + b_j^0}\right).$$

Тогда, учитывая равенство $\bar{\sigma} = 1/\sigma$ при $\sigma \in \gamma_0$,

(24) $$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\bar{t}\,dt}{t-z} = \frac{e^{-2i\theta_j}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}\frac{\left(m_j\sigma^2 - \bar{z}_j e^{i\theta_j}\sigma/R_j + 1\right)\left(1 - m_j\sigma^{-2}\right)}{\left(\sigma^2 - (z-z_j)\,e^{-i\theta_j}\sigma/R_j + m_j\right)}\,d\sigma.$$

Поскольку уравнение $\sigma^2 - (z - z_j)\,e^{-i\theta_j}\sigma/R_j + m_j = 0$ является записью конформного отображения плоскости $z$ с эллиптическим отверстием как на внешность, так и на внутренность круга $|\zeta| = 1$, то корни его $\sigma_1$ и $\sigma_2$ лежат внутри и вне круга $|\zeta| = 1$. Используя теорию вычетов, из (24) получим

(25)

$$I(z) = \begin{cases} e^{-2i\theta_j}\left(m_j - m_j^{-1}\right)\left(z - z_j - \sqrt{(z - z_j)^2 - 4m_jR_j^2e^{2i\theta_j}}\right)\Big/ 2 & (z \in D_j^-), \\ e^{-2i\theta_j}m_j\,(z - z_j) & (z \in D_j^+) \end{cases}$$

(выбирается ветвь, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{|z|\to\infty} I(z) = 0$). Учитывая (22), (23), из (9) находим

(26) $$f_1(t) = \psi_{2*}(t) - \psi_{1*}(t), \quad f_2(t) = \psi_{1*}(t) - \gamma\psi_{2*}(t).$$

Так как $\psi_{1*}(z)$ и $\psi_{2*}(z)$ голоморфны соответственно в областях $D_2^+ + D_2^-$ и $D_1^+ + D_1^-$, функции $\overline{\psi_{1*}(t)}$ и $\overline{\psi_{2*}(t)}$ — граничные значения функций $\bar{\psi}_{1*}(R_0^2/z)$ и $\bar{\psi}_{2*}(R_0^2/z)$, голоморфных в областях $D_1^+ + D_1^-$ и $D_2^+ + D_2^-$. Используя (13) и (26), имеем

(27) $$f_1^-(z) = -\bar{\psi}_{2*}(R_0^2/z), \quad f_2^-(z) = \gamma\bar{\psi}_{2*}(R_0^2/z) \quad (|z| > R_0),$$
$$f_1^+(z) = -\bar{\psi}_{1*}(R_0^2/z), \quad f_2^+(z) = \bar{\psi}_{1*}(R_0^2/z) \quad (|z| < R_0).$$

Продифференцировав равенства (14), (17) и (18), (19), с учетом (27) получим

(28) $$\varphi_1'(z) = (1-\gamma)/(\varkappa_1+\gamma)\left(\bar{\psi}_{1*}'(R_0^2/z) + \bar{a}_1\right),$$
$$\varphi_1''(z) = (1-\gamma)/(\varkappa_1+\gamma)\,\bar{\psi}_{1*}''(R_0^2/z),$$
$$\psi_1'(z) = R_0^2\varphi_1'(z)/z^2 - R_0^2\varphi_1''(z)/z + \bar{\varphi}_2'(R_0^2/z) - R_0^2a_1/z^2 + \psi_{2*}'(z);$$

(29)
$$\varphi_2'(z) = (1-\gamma)/(1+\gamma\varkappa_2)\,\bar{\psi}_{2*}'(R_0^2/z), \quad \varphi_2''(z) = (1-\gamma)/(1+\gamma\varkappa_2)\,\bar{\psi}_{2*}''(R_0^2/z),$$
$$\psi_2'(z) = R_0^2\varphi_2'(z)/z^2 - R_0^2\varphi_2''(z)/z + \bar{\varphi}_1'(R_0^2/z) - R_0^2a_1/z^2 + \psi_{1*}'(z).$$

Производные $\bar{\psi}_{j*}'(R_0^2/z)$ и $\bar{\psi}_{j*}''(R_0^2/z)$ в (28), (29) находятся по формулам

(30) $$\bar{\psi}_{j*}'(R_0^2/z) = d\overline{\psi_{j*}(R_0^2/\bar{z})}/dz = \left(\overline{d\psi_{j*}(R_0^2/\bar{z})/d\bar{z}}\right)(d\bar{z}/dz) =$$
$$= \overline{\psi_{j*}(R_0^2/\bar{z})_\eta'\left(-R_0^2/\bar{z}^2\right)(d\bar{z}/dz)}\,(d\bar{z}/dz) = -R_0^2\overline{\psi_{j*}(R_0^2/\bar{z})_\eta'}/z^2,$$
$$\bar{\psi}_{j*}''(R_0^2/z) = 2R_0^2\overline{\psi_{j*}(R_0^2/\bar{z})_\eta'}/z^3 + R_0^4\overline{\psi_{j*}(R_0^2/\bar{z})_\eta''}/z^4 \quad (\eta = R_0^2/\bar{z}).$$

Из (14) следует, что

$$\bar{\varphi}_1(R_0^2/z) = \overline{\varphi_1(R_0^2/\bar{z})} = (1-\gamma)/(\varkappa_1+\gamma)\left(\psi_{1*}(z) + a_1R_0^2/z\right),$$

откуда

(31) $$\bar{\varphi}_1'(R_0^2/z) = (1-\gamma)/(\varkappa_1+\gamma)\left(\psi_{1*}'(z) - a_1R_0^2/z^2\right).$$

Аналогичным образом из (17) получим

$$\bar{\varphi}_2'(R_0^2/z) = (\gamma-1)/(1+\gamma\varkappa_1)\,\psi_{2*}'(z).$$

Коэффициент $a_1$ находится по (20), где $F(z) = (1-\gamma)\overline{\psi}_{j*}(R_0^2/z)$. С учетом (23) и (25) функции $\psi'_{j*}(z)$, $\overline{\psi}'_{j*}(R_0^2/z)$, $\overline{\psi}''_{j*}(R_0^2/z)$ имеют вид

$$\psi'_{j*}(z) = \begin{cases} \delta_j\beta_j\left[1-(z-z_j)/((z-z_j)^2-\gamma_j^2)^{1/2}\right] & (z\in D_j^-), \\ \lambda_j\beta_j & (z\in D_j^+); \end{cases} \tag{32}$$

$$\overline{\psi}'_{j*}(R_0^2/z) = -\overline{\delta}_j\beta_jR_0^2\left[1-(R_0^2/z-\overline{z}_j)/\left((R_0^2/\overline{z}-z_j)^2-\gamma_j^2\right)^{1/2}\right]z^{-2}; \tag{33}$$

$$\overline{\psi}''_{j*}(R_0^2/z) = \overline{\delta}_j\beta_j\left[2R_0^2\left(1-(R_0^2/z-\overline{z}_j)/\left((R_0^2/\overline{z}-z_j)^2-\gamma_j^2\right)^{1/2}\right.\right. + \tag{34}$$

$$+ \left.\left. R_0^4\overline{\gamma}_j^2/\left((R_0^2/\overline{z}-z_j)^2-\gamma_j^2\right)^{3/2}z^{-1}\right)\right]z^{-3}.$$

Здесь $\delta_j = (m_j - m_j^{-1})e^{-2i\theta_j}$; $\gamma_j^2 = 4m_jR_j^2e^{2i\theta_j}$; $\lambda_j = 2m_je^{-2i\theta_j}$, а в (32), (33) $|z| < R_0$ при $j=1$, $|z| > R_0$ при $j=2$. В случае, когда $L_j$ — окружность, переходя к пределу при $m_j \to 0$, из (32)—(34) имеем

$$\psi'_{j*}(z) = \begin{cases} 2\beta_jR_j^2(z-z_j)^{-2} & (z\in D_j^-), \\ 0 & (z\in D_j^+), \end{cases}$$

$$\overline{\psi}'_{j*}(R_0^2/z) = 2\beta_jR_0^2R_j^2(R_0^2-z\overline{z}_j)^{-2}, \quad \overline{\psi}''_{j*}(R_0^2/z) = 4\beta_jR_0^2R_j^2\overline{z}_j(R_0^2-z\overline{z}_j)^{-3}$$
$$(j = 1,\ 2).$$

Искомые напряжения находятся по формулам [2]

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy} = 4\mathrm{Re}(\Phi_j(z)),$$
$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\tau_{xy} = 2(\overline{z}\Phi_j(z)+\Psi_j(z)) \quad (j=1,\ 2);$$

$$\Phi_j(z) = \varphi'_{j*}(z)+\varphi'_j(z), \quad \Psi_j(z) = \psi'_{j*}(z)+\psi'_j(z) \quad (j=1,\ 2). \tag{35}$$

Из (28), (29) с учетом (30), (31) и (35) нетрудно получить решение для случая, когда окружность вырождается в прямую $x = 0$. Действительно, функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ при замене координат $z = z' - R_0$ преобразуются по формулам [2]

$$\Phi_j(z) = \Phi(z'-R_0), \quad \Psi_j(z) = \Psi_j(z'-R_0) - R_0\Phi'_j(z'-R_0).$$

Обозначим $\Phi_j(z) = \widetilde{\Phi}_j(z')$ и $\Psi_j(z) = \widetilde{\Psi}_j(z')$:

$$\widetilde{\Phi}_j(z') = \Phi_j(z'-R_0) = l_j\overline{\psi}'_{j*}(R_0^2/(z'-R_0)) + \varphi_{j*}(z'-R_0) + \tag{36}$$
$$+ l_j(2-j)\overline{a}_1 = -l_j\beta_j\overline{\delta}_jR_0^2/(R_0-z')^2\times$$
$$\times\left[1-\left(R_0^2/(z'-R_0)-(\overline{z}'_j-R_0)\right)/\left((R_0^2/(\overline{z}'-R_0)-z'+\overline{R}_0)^2-\gamma_j^2\right)^{1/2}\right] +$$
$$+ \varphi'_{j*}(z'-R_0) + l_j(2-j)\overline{a}_1 \quad (j=1,\ 2).$$

Здесь

$$l_1 = (1-\gamma)/(\varkappa_1+\gamma), \quad l_2 = (\gamma-1)/(1+\gamma\varkappa_2),$$

$$\varphi'_{j*}(z'-R_0) = \varphi'_{j*}(z) = \begin{cases} -\beta_j & (z\in D_j^+), \\ 0 & (z\in D_j^-) \end{cases} \quad (j=1,\ 2).$$

Поскольку $F(z) = (1-\gamma)\overline{\psi}_{1*}(R_0^2/(z'-R_0))$, то, используя (20), (23) и (25), запишем $\lim\limits_{R_0\to\infty} F(z) = \widetilde{F}(z') = 0$, значит, $a_1 = 0$. Переходя к пределу в выражении (36), получим

$$\widetilde{\Phi}_j(z') = \lim_{R_0\to\infty}\Phi_j(z'-R_0) = -l_j\beta_j\overline{\delta}_j\left(1-(z'-\overline{z}'_j)/\left((\overline{z}'-z'_j)^2-\gamma_j^2\right)^{1/2}\right) +$$
$$+ \psi'_{j*}(z'),$$

$$\widetilde{\Phi}'_j(z') = \gamma_j^{-2}l_j\beta_j\overline{\delta}_j/\left((\overline{z}'-z'_j)^2-\gamma_j^2\right)^{3/2} + \varphi''_{j*}(z') \quad (j=1,\ 2).$$

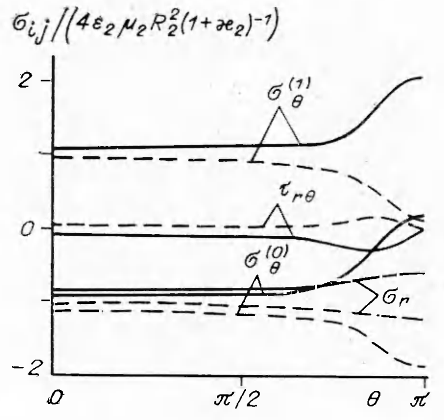


Рис. 1

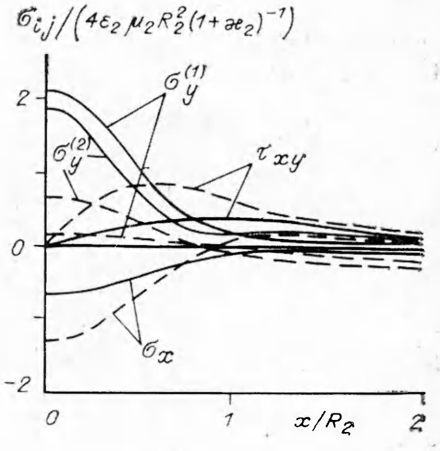


Рис. 2

Аналогичным образом

$$\widetilde{\Psi}_j(z') = \lim_{R_0\to\infty}\{\Psi_j(z'-R_0) - R_0\Phi_j'(z'-R_0)\} =$$

$$= \lim_{R_0\to\infty}\{R_0^2(z'-R_0)^{-2}\varphi_j'(z'-R_0) - R_0^2(z'-R_0)^{-1}\varphi_j''(z'-R_0) +$$

$$+ l_{(3-j)}\psi_{(3-j)*}'(z'-R_0) + \psi_{j*}(z'-R_0) + \psi_{(3-j)*}'(z'-R_0) - R_0\varphi_j''(z-R_0)\} =$$

$$= \widetilde{\Phi}_j(z') + (l_{(3-j)}+1)\,\widetilde{\psi}_{(3-j)}'(z') + \widetilde{\psi}_{j*}(z') \quad (j=1,\ 2).$$

Области $x > 0$ и $x < 0$ отвечают областям $D_1^+ + D_1^-$ и $D_2^+ + D_2^-$. Когда $L_j$ — окружность, находим, возвращаясь к старым обозначениям ($z \to z'$, $(\Phi,\ \Psi) \to (\widetilde{\Phi},\ \widetilde{\Psi})$):

$$\Phi_j(z) = b_j\left((z-\bar{z}_j)^{-2} - d_j/2\right),\quad \Phi_j'(z) = -2b_j(z-\bar{z}_j)^{-3},$$

$$\Psi_j(z) = b_j\left(\bar{z}_j(z-\bar{z}_j)^{-3} - (z-\bar{z}_j)^{-2}/2\right) +$$

$$+ (l_{(3-j)}+1)c_{(3-j)}(z-\bar{z}_j)^{-2} + c_jd_j(z-z_j)^{-2},$$

$$c_j = 4\varepsilon_j\mu_jR_0^2/(1+\varkappa_j),\quad b_j = l_jc_j,\quad d_j = \begin{cases}1 & (z\in D_j^+),\\ 0 & (z\in D_j^-)\end{cases}\quad (j=1,\ 2).$$

На рис. 1, 2 представлены графики напряжений в безразмерном виде в соответствии с формулой $\bar{\sigma}_{kl}^{(j)} = \sigma_{kl}^{(j)}/\left(4\varepsilon_2\mu_2R_2^2(1+\varkappa_2)^{-1}\right)$ на внешней и внутренней границах контуров $L_2$ и $L_0$ в случае, когда контур $L_2$ — окружность $z - z_2 = R_2e^{i\theta}$, контур $L_0$ — прямая $x = 0$, а $\varepsilon_1 = 0$. Напряжения $\sigma_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\tau_{r\theta}$ (см. рис. 1) рассчитываются по формулам

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\mathrm{Re}\,(\varphi'(z)),$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\alpha}\,(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z))$$

($e^{2i\alpha} = z^2r^{-2}$), а $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$, $\tau_{xy}$ (см. рис. 2) — по тем же формулам при $\alpha = 0$. Расчеты производились при $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2$; $\gamma = 3^{-1}$; 3; $z_2 = 1{,}001R_2$. На рис. 1, 2 $\gamma = 1/3$ — сплошные линии, $\gamma = 3$ — штриховые, верхние индексы $j = 0,\ 1,\ 2$ отвечают областям $D_2^+$, $D_2^-$, $D_1^-$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
2. **Эшелби Д.** Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
3. **Вайнберг Д. В., Угодчиков А. Г.** Напряжения изгиба в тонкой плите при соединениях с натягом // Прикл. механика (АН УССР).— 1958.— Т. 4, вып. 4.

4. **Угодчиков А. Г.** Определение напряжений при запрессовке круглых шайб в пластинку, ограниченную кривой частного вида // ДАН СССР.— 1951.— Т. 77, № 2.
5. **Перлин П. И., Толченова Л. Ф.** Контейнеры для плоских слитков // Тр. ВНИИметмаш.— 1960.— № 1.
6. **Колесов В. С., Смирнов Л. Г.** Температурные напряжения в полуплоскости с произвольным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1982.— Вып. 2.

*г. Подольск* *Поступила 24/V 1989 г.*

---

УДК 539.3

*А. О. Ватульян, А. Я. Кацевич*

# КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ

В настоящее время в связи с развитием методов вибросейсморазведки, дефектометрии чрезвычайно актуальными стали проблемы расчета волновых полей в упругой среде с полостями, трещинами, включениями. Отметим, что некоторые испытуемые материалы являются анизотропными (стали аустенитного класса, композиты, грунты), что требует соответствующей математической модели, учитывающей анизотропию механических свойств.

1. Исследуются установившиеся антиплоские волны в ортотропном упругом слое толщины $h$ с цилиндрической полостью, направляющая которой — гладкая замкнутая кривая $l_0$. Считаем, что колебания в слое возбуждаются касательной нагрузкой $p(x_1)$, приложенной к границе $x_3 = h$ слоя. Оси упругой симметрии совпадают с осями координат, из компонент вектора перемещений отлична от нуля компонента $u_2 = u(x_1, x_3) \times \times \exp(-i\omega t)$, а из компонент тензора напряжений — $\sigma_{12} = c_{66}u_{,1}$, $\sigma_{23} = c_{44}u_{,3}$. Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид

$$c_{66}u_{,11} + c_{44}u_{,33} + \rho\omega^2 u = 0,$$
$$x_3 = h,\ c_{44}u_{,3} = p(x_1),\ x_3 = 0,\ u = 0,$$
$$(x_1,\ x_3) \in l_0,\ c_{66}u_{,1}n_1 + c_{44}u_{,3}n_3 = 0 \tag{1.1}$$

($n_1$, $n_3$ — компоненты единичного вектора нормали к кривой $l_0$, внешнего по отношению к области, занятой упругой средой). Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения.

Введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу относительно функции $U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3)$

$$c_{66}U_{,11} + c_{44}U_{,33} + \rho\omega^2 U = -\delta(x_1 - \xi_1,\ x_3 - \xi_3),$$
$$x_3 = h,\ U_{,3} = 0,\ x_3 = 0,\ U = 0. \tag{1.2}$$

Решение задачи (1.2) строится при помощи интегрального преобразования Фурье в рамках принципа предельного поглощения:

$$U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) = \frac{1}{4\pi c_{44}} \int\limits_\sigma \exp(i\alpha_1(\xi_1 - x_1))\, \lambda^{-1} \Big[\exp(-\lambda|\xi_3 - x_3|) - $$
$$- \exp(-\lambda\xi_3)\operatorname{ch}\lambda x_3 + \frac{\operatorname{sh}\lambda x_3}{\operatorname{ch}\lambda h}\langle\exp(\lambda(\xi_3 - h)) + \operatorname{sh}\lambda h \exp(-\lambda\xi_3)\rangle\Big]\, d\alpha_1, \tag{1.3}$$

где $\lambda = (\nu\alpha_1^2 - k^2)^{1/2}$; $\nu = c_{66}/c_{44}$; $k^2 = \rho\omega^2/c_{44}$; контур $\sigma$ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и огибает положительные полюса и точки ветвления подынтегральной функции снизу, а отрицательные — сверху [1]. Используя теорему взаимности [2], нетрудно получить представление поля перемещений в среде