26. **Гладков В. М., Кудрявцева Л. А., Сухин В. И.** О соотношении между статическими механическими характеристиками и импульсным напряжением в металлических стержнях.— ПМТФ, 1977, № 5.
27. **Abrahamson G. R., Goodier J. N.** Dynamic plastic flow buckling of a cylindrical shell from uniform radial impulse.— In: Proc. 4th U. S. National Congress Appl. Mech., Berkeley, California. Vol. 2. N. Y.: ASME, 1962.
28. **Lindberg H. E.** Buckling of very thin cylindrical shell due to an impulsive pressure.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, N 2. Рус. пер.— Прикл. механ. Тр. Амер. о-ва инж.-механ., 1964, т. 31, № 2.
29. **Блинов Ю. И., Сериков С. В. и др.** Валок для продольной прокатки труб.— БИ, 1982, № 33.
30. **Черников А. Г.** Разрушение колец из алюминия и дюралюминия под действием интенсивной радиальной нагрузки.— ФГВ, 1976, т. 12, № 4.
31. **Banks E. E.** The fragmentation behavior of thin-walled metal cylinders.— J. Appl. Phys., 1969, N 1.
32. **Сериков С. В.** Нестационарное расширение до разрушения сжимаемого кольца в схеме идеальной пластичности.— ФГВ, 1980, т. 16, № 4.

УДК 539. 30

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБОЛОЧКИ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Л. И. ШКУТИН

(*Новосибирск*)

Сформировавшаяся в [1, 2] нелинейная двумерная модель оболочки типа Тимошенко обобщена в данной работе за счет сохранения поперечного нормального напряжения. При построении обобщенной модели деформация оболочки подчинена кинематической связи, обеспечивающей однородность по толщине оболочки поперечной деформации растяжения — сжатия, и применен разработанный в [3, 4] метод явного выделения поля конечных поворотов.

В результате трехмерная нелинейная задача для оболочки расщеплена на две последовательно решаемые задачи: двумерную нелинейную задачу, определяющую продольные компоненты тензоров деформаций и напряжений, и одномерную (по поперечной координате) линейную задачу, определяющую поперечные компоненты этих тензоров.

В отличие от [1, 2, 4] дифференциальный порядок двумерной нелинейной задачи равен двенадцати, а число ее естественных контурных условий равно шести.

При изложении материала сохранены обозначения, принятые в [4]. Прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2.

1. Формулировка двумерных кинематических и динамических уравнений. Пусть t_M — пространственная система криволинейных координат, связанная с базисной поверхностью b оболочки (параметры t_1 и t_2 — внутренние координаты этой поверхности, параметр t_3 — нормальная к ней координата). Введенной системе координат ставятся в соответствие два начальных базиса: трехмерный базис $\mathbf{A}_{(N)}(t_M)$, определенный во всем объеме оболочки, и двумерный базис $\mathbf{a}_{(N)}(t_m)$, определенный на базисной поверхности.

Деформация оболочки преобразует начальные базисы в соответствующие мгновенные базисы $\mathbf{A}_{\{N\}}(t_M)$ и $\mathbf{a}_{\{N\}}(t_m)$ (возможная зависимость от времени предполагается, но явно не указывается). Из полного их преобразования выделяется жесткий поворот, порождающий повернутые базисы $\mathbf{A}_{[N]}(t_M)$ и $\mathbf{a}_{[N]}(t_m)$. Длина нормального вектора $\mathbf{a}_{(3)}$ принимается по определению постоянной (не обязательно единичной). В процессе деформации этот вектор преобразуется в мгновенный вектор $\mathbf{a}_{\{3\}}$, не являющийся нормальным к деформированной базисной поверхности и имеющий длину, отличную от начальной. Соответствующий повернутый вектор $\mathbf{a}_{[3]}$ принимается по определению коллинеарным мгновенному, так что

$$\mathbf{a}_{\{3\}} = (a_{33} + u_{[33]})\mathbf{a}^{[3]}, \quad \{\mathbf{a}_{[3]} \| \mathbf{a}_{\{3\}} \Rightarrow \mathbf{a}^{[3]} \| \mathbf{a}_{\{3\}}\}.$$

Скалярная функция $u_{[33]}(t_m)$ является мерой удлинения нормального вектора при деформации.

Пусть в любой момент времени деформация оболочки подчиняется кинематической связи

$$\mathbf{A}_{\{3\}} = \mathbf{a}_{\{3\}}, \tag{1.1}$$

обеспечивающей однородность по толщине оболочки поперечной деформации растяжения — сжатия. Следствием связи (1.1) является линейное распределение по нормальной координате поля перемещений оболочки:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + t_3\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{a}_{\{3\}} - \mathbf{a}_{(3)} \tag{1.2}$$

($\mathbf{u}(t_m)$ — поле перемещений точек базисной поверхности). По формулам (1.4) [4] определяется соответствующее распределению (1.2) поле деформаций оболочки:

$$\mathbf{U}_{[n]} = \mathbf{u}_{[n]} + t_3 \mathbf{w}_{[n]}, \quad \mathbf{U}_{[3]} = \mathbf{u}_{[3]}. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{u}_{[N]}(t_m)$ и $\mathbf{w}_{[n]}(t_m)$ — двумерные поля деформаций оболочки, определяемые равенствами

$$\mathbf{u}_{[n]} = \partial_n \mathbf{u} - (1/f)\mathbf{v}\times(\mathbf{a}_{(n)} + (1/2)\mathbf{v}\times\mathbf{a}_{(n)}), \tag{1.4}$$

$$\mathbf{w}_{[n]} = \mathbf{v}_{[n]}\times\mathbf{a}_{[3]} + \partial_n \mathbf{u}_{[3]}, \quad \mathbf{u}_{[3]} = \mathbf{a}_{\{3\}} - \mathbf{a}_{[3]}, \quad \mathbf{v}_{[n]} = (1/f)(\partial_n \mathbf{v} + (1/2)\mathbf{v}\times\partial_n\mathbf{v}),$$

$$f = 1 + (1/4)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

($\mathbf{v}_{[n]}(t_m)$ — поле изгибаний координатных линий $t_m = \mathrm{const}$, порождаемое полем жестких поворотов $\mathbf{v}(t_m)$, ∂_n — оператор частного дифференцирования по t_n).

Из вариационного равенства, формулирующего принцип виртуальных перемещений оболочки с кинематической связью (1.1), следуют определенные на базисной поверхности b двумерные динамические уравнения

$$\nabla_{(n)}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{f} = 0, \quad \nabla_{(n)}\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{a}_{\{N\}}\times\mathbf{x}^{(N)} + \partial_n \mathbf{a}_{\{3\}}\times\mathbf{z}^{(n)} = 0; \tag{1.5}$$

определенные на ее контуре c граничные условия

$$[(\mathbf{e}_{(\nu)}\cdot\mathbf{a}_{(n)})\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{f}_{(\nu)}]\cdot\nabla_0\mathbf{u} = 0, \quad [(\mathbf{e}_{(\nu)}\cdot\mathbf{a}_{(n)})\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{h}_{(\nu)}]\cdot\nabla_0\mathbf{w} = 0; \tag{1.6}$$

формула для поверхностной плотности виртуальной энергии деформации

$$w_0 = \mathbf{x}^{(N)}\cdot(\nabla_0\mathbf{u}_{[N]} - \mathbf{v}_0\times\mathbf{u}_{(N)}) + \mathbf{z}^{(n)}\cdot(\nabla_0\mathbf{w}_{[n]} - \mathbf{v}_0\times\mathbf{w}_{[n]}) \tag{1.7}$$

и равенства, определяющие моменты силовых полей оболочки:

$$\mathbf{x}^{(N)} = \frac{1}{j}\int_{b_-}^{b_+} \mathbf{X}^{(N)} J\,dt_3, \quad \mathbf{z}^{(n)} = \frac{1}{j}\int_{b_-}^{b_+} \mathbf{X}^{(n)} J t_3\,dt_3, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{j}\int_{b_-}^{b_+} \left[\mathbf{F}J + \partial_3\left(\mathbf{X}^{(3)}J\right)\right] dt_3, \quad \mathbf{f}_{(\nu)} = \frac{1}{j}\int_{b_-}^{b_+} \mathbf{F}_{(\nu)} J\,dt_3,$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{j}\int_{b_-}^{b_+} \left[\mathbf{F}J t_3 + \partial_3\left(\mathbf{X}^{(3)}J t_3\right)\right] dt_3, \quad \mathbf{h}_{(\nu)} = \frac{1}{j}\int_{b_-}^{b_+} \mathbf{F}_{(\nu)} J t_3\,dt_3.$$

Здесь $\nabla_{(n)}$ — оператор ковариантного дифференцирования по t_n в начальном базисе $\mathbf{a}_{(N)}$; $\mathbf{e}_{(\nu)}$ — поле единичных нормалей к торцевой поверхности оболочки; $\mathbf{v}_0$ — двумерное поле виртуальных поворотов; ∇_0 — оператор полной вариации; j и J — якобианы базисов $\mathbf{a}_{(N)}$ и $\mathbf{A}_{(N)}$ соответственно; $t_3 = b_-$ и $t_3 = b_+$ — уравнения внешних поверхностей оболочки; $\mathbf{X}^{(N)}(t_M)$ — поле напряжений в оболочке; $\mathbf{F}(t_M)$—поле объемных (в том числе инерционных) сил; $\mathbf{F}_{(\nu)}(\mathbf{t}_M)$ — поле внешних сил, распределенных по торцевой поверхности оболочки.

Равенства (1.8) определяют: двумерное поле внутренних усилий $\mathbf{x}^{(N)}$, двумерное поле внутренних моментов $\mathbf{z}^{(n)}$, двумерные поля внешних (в том числе инерционных) сил $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}_{(\nu)}$, двумерные поля внешних (в том числе инерционных) моментов $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}_{(\nu)}$.

Второе из векторных уравнений (1.5) с помощью третьего приводится к двум уравнениям

$$(\nabla_{(n)}\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{h})\cdot\mathbf{a}^{[3]} = 0,$$

$$\nabla_{(n)}(\mathbf{a}_{\{3\}}\times\mathbf{z}^{(n)}) + \mathbf{a}_{\{n\}}\times\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{a}_{\{3\}}\times\mathbf{h} = 0,$$

первое из которых является условием равновесия моментов в направлении вектора $\mathbf{a}_{\{3\}}$, а второе — условием равновесия моментов в направлениях, нормальных к $\mathbf{a}_{\{3\}}$. Подстановка

$$\mathbf{a}_{\{3\}}\times\mathbf{z}^{(n)} = \mathbf{y}^{(n)}, \quad \mathbf{a}_{\{3\}}\times\mathbf{h} = \mathbf{g}$$

превращает его во второе уравнение (2.6) [4]. Это значит, что динамические уравнения (1.5) содержат в себе как частный случай динамические уравнения более простой модели [4].

Переход к скалярной формулировке двумерных кинематических и динамических уравнений оболочки наиболее просто осуществляется с помощью разложений

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u} = u_{(N)}\mathbf{a}^{(N)}, \ \mathbf{u}_{[n]} = u_{[nM]}\mathbf{a}^{[M]}, \ \mathbf{u}_{[3]} = u_{[33]}\mathbf{a}^{[3]}, \\
\mathbf{v} = v_{(N)}\mathbf{a}^{(N)}, \ \mathbf{v}_{[n]} = v_{[nM]}\mathbf{a}^{[M]}, \ \mathbf{w}_{[n]} = w_{[nM]}\mathbf{a}^{[M]}, \\
\mathbf{x}^{(n)} = x^{[nM]}\mathbf{a}_{[M]}, \ \mathbf{f} = f^{[M]}\mathbf{a}_{[M]}, \ \mathbf{f}_{(\nu)} = f_{(\nu M)}\mathbf{a}^{(M)}, \\
\mathbf{z}^{(n)} = z^{[nM]}\mathbf{a}_{[M]}, \ \mathbf{h} = h^{[M]}\mathbf{a}_{[M]}, \ \mathbf{h}_{(\nu)} = h_{(\nu M)}\mathbf{a}^{(M)}
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

(вектор $\mathbf{u}_{[3]}$ по определению является однокомпонентным в повернутом базисе). С помощью (1.9) формулируются следующие скалярные кинематические и динамические уравнения оболочки.

Уравнения, определяющие компоненты деформационных тензоров через компоненты векторов перемещений и поворотов:

$$
\begin{gathered}
u_{[nM]} = a^{LK}(\nabla_{(n)}u_{(L)} - w_{(nL)})\,(a_{MK} + w_{MK}), \\
v_{[n,M]} = \frac{1}{f}\,\nabla_{(n)}v_{(L)}\left(a^{LK} + \frac{1}{2}\,a^{LKJ}\,v_{(J)}\right)(a_{MK} + w_{(MK)}), \\
w_{[nm]} = (a_{33} + u_{[33]})\,a^{\cdot l3}_{m\cdot\cdot}\,v_{[nl]} + b_{nm}a^{33}u_{[33]}, \\
w_{[n3]} = \partial_n u_{[33]}, \ f = 1 + \frac{1}{4}\,v_{(L)}v^{(L)}, \\
w_{(NM)} = \frac{1}{f}\,a_{NML}v^{(L)} + \frac{1}{2f}\,(v_{(N)}v_{(M)} - a_{NM}v_{(L)}v^{(L)}).
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

Динамические уравнения, связывающие компоненты силовых тензоров:

$$
\begin{gathered}
\nabla_{(n)}x^{[nM]} + a^{ML\cdot}_{\cdot\cdot K}\,v_{[nL]}x^{[nK]} + f^{[M]} = 0, \\
\nabla_{(n)}z^{[nM]} + a^{ML\cdot}_{\cdot\cdot K}\,v_{[nL]}z^{[nK]} - x^{[3M]} + h^{[M]} = 0, \\
a^{M\cdot\cdot}_{\cdot LK}\left[(a_{NM} + u_{[NM]})\,x^{[NL]} + (b_{nM} + w_{[nM]})\,z^{[nL]}\right] = 0.
\end{gathered} \tag{1.11}
$$

Граничные условия на контуре базисной поверхности:

$$
\begin{gathered}
[e_{(\nu n)}x^{[nL]}(a_{LM} + w_{(LM)}) - f_{(\nu M)}]\nabla_0 u^{(M)} = 0, \\
[e_{(\nu M)}z^{[nL]}(a_{LM} + w_{(LM)}) - h_{(\nu M)}]\nabla_0 w^{(M)} = 0.
\end{gathered} \tag{1.12}
$$

Уравнение, определяющее поверхностную плотность виртуальной энергии деформации и обнаруживающее энергетическое соответствие между компонентами деформационных и силовых тензоров в повернутом базисе:

$$
w_0 = x^{[nM]}\nabla_0 u_{[nM]} + x^{[33]}\nabla_0 u_{[33]} + z^{[nM]}\nabla_0 w_{[nM]}. \tag{1.13}
$$

При формулировке задач в моментах напряжений вместо кинематических уравнений (1.10) для деформационных тензоров $u_{[nM]}$ и $v_{[nM]}$ привлекаются уравнения совместности деформаций [4], имеющие скалярное представление

$$
\begin{gathered}
\nabla_{(n)}\widehat{v}^{[nM]} + \frac{1}{2}\,a^{ML\cdot}_{\cdot\cdot K}\,v_{[nL]}\widehat{v}^{[nK]} = 0, \\
\nabla_{(n)}\widehat{u}^{[nM]} + a^{ML\cdot}_{\cdot\cdot K}\,(a_{nL} + u_{[nL]})\,\widehat{v}^{[nK]} = 0, \\
\widehat{v}^{[nM]} = a^{LM}a^{nm3}v_{[mL]}, \ \widehat{u}^{[nM]} = a^{LM}a^{nm3}u_{[mL]},
\end{gathered} \tag{1.14}
$$

При выводе уравнений (1.10)—(1.14) использованы следующие правила варьирования и дифференцирования векторных и тензорных полей:

$$
\begin{gathered}
\nabla_0\mathbf{a}_{[M]} = \mathbf{v}_0\times\mathbf{a}_{[M]}, \ \nabla_0\mathbf{u}_{[N]} - \mathbf{v}_0\times\mathbf{u}_{[N]} = \mathbf{a}^{[M]}\nabla_0 u_{[NM]}, \\
\nabla_{(n)}\mathbf{a}_{[M]} = \mathbf{v}_{[n]}\times\mathbf{a}_{[M]}, \ \nabla_0\mathbf{w}_{[n]} - \mathbf{v}_0\times\mathbf{w}_{[n]} = \mathbf{a}^{[M]}\nabla_0 w_{[nM]}, \\
\nabla_0 u_{[3n]} = 0, \ \nabla_{(n)}w_{(M)} = \partial_n w_{(M)} - c^{L}_{\cdot nM}w_{(L)}, \\
\nabla_{(n)}y^{[mM]} = \partial_n y^{[mM]} + c^{m}_{\cdot nl}y^{[lM]} + c^{M}_{\cdot nL}y^{[mL]}
\end{gathered}
$$

и введены обозначения: a_{NM}, a_{NML} — метрический и дискриминантный тензоры начального и повернутого базисов, b_{nm} — тензор начальной кривизны базисной поверхности, $e_{(\nu n)} = \mathbf{e}_{(\nu)}\cdot\mathbf{a}_{(n)}$, $c^{K}_{\cdot nM}$ — кристофели 2-го рода начального базиса, определяемые равенствами

$$c^{K}_{\cdot nM} = \begin{cases} \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_n a_{ml} + \partial_m a_{ln} - \partial_l a_{nm}) \quad \{M = m,\ K = k\}, \\ -a^{33} b_{nm} \quad \{M = m,\ K = 3\}, \\ a^{kl} b_{nl} \quad \{M = 3,\ K = k\}, \\ 0 \quad \{M = 3,\ K = 3\}. \end{cases}$$

Кинематические уравнения (1.11) сформулированы с точностью до произвольного поворота относительно вектора $\mathbf{a}_{(3)}$. Для исключения этого произвола необходимо подчинить вектор поворота одному скалярному условию. Наиболее простым является условие $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{(3)}$, которое исключает жесткий поворот базиса относительно нормали к базисной поверхности. С этой же целью можно использовать условия $u_{[12]} = u_{[21]}$, или $u_{[12]} = 0$, или $u_{[21]} = 0$, однако их реализация в нелинейных задачах гораздо *сложнее*, чем условия

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{(3)} = \mathbf{v}_{(3)} = 0. \tag{1.15}$$

При необходимости переход от разложения по повернутому базису к разложениям по начальному и мгновенному базисам осуществляется по следующим формулам преобразования базисов:

$$\mathbf{a}_{(N)} = (a_{MN} + w_{(MN)}) \mathbf{a}^{[M]}, \quad \mathbf{a}_{\{N\}} = (a_{NM} + u_{[NM]}) \mathbf{a}^{[M]}.$$

2. Формулировка двумерных определяющих уравнений. Пусть известны уравнения, определяющие симметрический пространственный тензор напряжений

$$X^{(NM)} = \mathbf{X}^{(N)} \cdot \mathbf{A}^{\{M\}}$$

через симметрический пространственный тензор деформаций Грина

$$U_{(NM)} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{[M]} \cdot \mathbf{U}_{[N]} + \mathbf{A}_{[N]} \cdot \mathbf{U}_{[M]} + \mathbf{U}_{[N]} \cdot \mathbf{U}_{[M]}), \tag{2.1}$$

т. е. предполагаются известными трехмерные определяющие уравнения вида

$$X^{(NM)} = X^{(NM)}(U_{(LK)}). \tag{2.2}$$

Так как трехмерный тензор $U_{(LK)}$ с помощью (2.1), (1.3), (1.9) и (1.10) выражается через двумерные параметры $u_{[lK]}$, $u_{[33]}$, $w_{[lK]}$, то объемная плотность виртуальной энергии деформации оболочки, определяемая равенством

$$W_0 = X^{(NM)} \nabla_0 U_{(NM)}, \tag{2.3}$$

может быть представлена в виде

$$W_0 = X^{(NM)} [(\partial U_{(NM)} / \partial u_{[lK]}) \nabla_0 u_{[lK]} + (\partial U_{(NM)} / \partial u_{[33]}) \nabla_0 u_{[33]} + (\partial U_{(NM)} / \partial w_{[lK]}) \nabla_0 w_{[lK]}].$$

Поверхностная плотность виртуальной энергии деформации определяется через объемную по формуле

$$w_0 = \frac{1}{j} \int_{b_-}^{b_+} w_0 J dt_3.$$

Сравнение этой формулы с (1.13) дает двумерные определяющие уравнения оболочки

$$x^{[lK]} = \frac{1}{j} \int_{b_-}^{b_+} (\partial U_{(NM)} / \partial u_{[lK]}) X^{(NM)} J dt_3, \tag{2.4}$$

$$x^{[33]} = \frac{1}{j} \int_{b_-}^{b_+} (\partial U_{(NM)} / \partial u_{[33]}) X^{(NM)} J dt_3,$$

$$z^{[lK]} = \frac{1}{j} \int_{b_-}^{b_+} (\partial U_{(NM)} / \partial w_{[lK]}) X^{(NM)} J dt_3.$$

Эти уравнения замыкают сформулированную в п. 1 систему двумерных кинематических и динамических уравнений (1.10)—(1.12) и (1.15). Замкнутую систему образуют тридцать четыре уравнения относительно функций $u_{(N)}$, $v_{(N)}$, $u_{[33]}$, $u_{[nM]}$, $w_{[nM]}$, $x^{[NM]}$, $z^{[nM]}$. Шестнадцать из этих уравнений являются алгебраическими. В результате их исключения может быть образована система из восемнадцати дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $u_{(N)}$, $v_{(n)}$, $u_{[33]}$, $x^{[nM]}$, $z^{[nM]}$. Последняя допускает исключение функций $x^{[nM]}$, $z^{[nM]}$ и приводится к системе шести уравнений второго порядка относительно кинематически независимых параметров $u_{(N)}$, $v_{(n)}$, $u_{[33]}$. Полный дифференциальный порядок разрешающей системы по каждой из переменных t_m равен двенадцати, число контурных граничных условий (1.12) равно шести.

3. Определение пространственных тензоров напряжений и деформаций. В результате решения двумерной задачи, формулируемой замкнутой системой уравнений (1.10)—(1.12), (1.15) и (2.4), определяются двумерные кинематические параметры оболочки: вектор перемещений $u_{(N)}$ и вектор поворотов $v_{(N)}$ ($v_{(3)} = 0$), первый тензор деформаций $u_{[NM]}$($u_{[3m]}=0$) и второй тензор деформаций $w_{[nM]}$. По формулам (1.2), (1.3) и (2.1) через них определяются трехмерные кинематические параметры: вектор перемещений $\mathbf{U}(t_M)$ и симметрический тензор деформаций $U_{(NM)}(t_L)$. Уравнения (2.2) определяют симметрический тензор напряжений $X^{(NM)}$ (t_L). Однако определение компонент $X^{(N3)} = X^{(3N)}$ таким способом нельзя считать удовлетворительным, поскольку оно не обеспечивает выполнения условий на ограничивающих оболочку поверхностях $t_3 = b_-(t_m)$ и $t_3 = b_+(t_m)$. Для более точного определения этих компонент может быть применен следующий способ, обоснованный при асимптотическом анализе линейной задачи упругости для оболочки [5]: из уравнений связи определяются компоненты $X^{(NM)}$ и отвечающие им векторы напряжений $\mathbf{X}^{(n)} = X^{(nM)}\mathrm{A}_{\{M\}}$, а вектор $\mathbf{X}^{(3)} = X^{(3M)}\mathrm{A}_{\{M\}}$ определяется из динамического уравнения (1.5) [4] квадратурой по нормальной координате t_3:

$$\mathbf{X}^{(3)} = \frac{1}{J}\left\{\mathbf{f}^{(3)} - \int \left[\mathbf{F}J + \partial_n\left(\mathbf{X}^{(n)}J\right)\right] dt_3\right\}, \tag{3.1}$$

причем вектор $\mathbf{f}^{(3)}(t_m)$ определяется при подчинении вектора $\mathbf{X}^{(3)}(t_M)$ граничному условию на одной из внешних поверхностей оболочки (его выполнение на другой поверхности обеспечивается за счет двумерных уравнений (1.5)).

Тем самым будет определен полный пространственный тензор напряжений в оболочке. Посредством обращения уравнений (2.2) может быть определен соответствующий ему пространственный тензор деформаций. Этим завершается процедура решения нелинейной пространственной задачи деформирования оболочки.

Нелинейная модель оболочки, формулируемая системой уравнений (1.10)—(1.12), (1.15), (2.4) и (3.1), свободна от трех существенных недостатков, свойственных модели, сформировавшейся в [1, 2].

Во-первых, она позволяет решением двумерной задачи точно выполнить на торцевой поверхности оболочки кинематическое граничное условие $\mathbf{U} = 0$ трехмерной задачи, тогда как у двумерной задачи [1, 2] для этого не хватает одного контурного условия.

Во-вторых, определяющие уравнения (2.4) двумерной задачи однозначно формулируются через определяющие уравнения (2.2) трехмерной задачи и поэтому не содержат, как в [1, 2], неопределенных «коэффициентов сдвига».

В-третьих, поперечные компоненты тензора напряжений определяются из уравнения (3.1) как однозначные функции нормальной координаты, удовлетворяющие граничным условиям на внешних поверхностях оболочки, тогда как в [1, 2] эти компоненты содержат в качестве множителей неопределенные функции нормальной координаты.

4. Переход к физическим составляющим. Пусть t_N — главная система координат оболочки; u_N, v_N — физические компоненты векторов перемещений и поворотов в начальном базисе; u_{NM}, v_{nM}, w_{nM}, x_{NM}, z_{nM} — физические компоненты деформационных и силовых тензоров в повернутом базисе.

Замкнутую систему для физических компонент векторов и тензоров, определяющих нелинейную деформацию оболочки с кинематической связью (1.1), образуют следующие группы двумерных уравнений.

Уравнения, определяющие компоненты первого тензора деформаций оболочки через перемещения и повороты:

$$\begin{gathered}
u_{nL} = (u_{(nM)} - w_{(nM)})(e_{LM} + w_{(LM)}),\\
u_{(nM)} = [\partial_n(a_M u_M) - c_{LnM} a_L u_L]/a_n a_M,\\
w_{(NM)} - \frac{1}{f} e_{NML} v_L + \frac{1}{2f}(v_N v_M - e_{NM} v_L v_L),\\
f = 1 + \frac{1}{4} v_L v_L,\ v_3 = 0.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Уравнения, определяющие компоненты тензора изгибаний через повороты:

$$v_{nJ} = \frac{1}{f} v_{(nM)} \left(e_{ML} + \frac{1}{2} e_{MLK} v_K\right)(e_{JL} + w_{(JL)}), \tag{4.2}$$

$$v_{(nM)} = [\partial_n(a_M v_M) - c_{LnM} a_L v_L)/a_n a_M, \ v_3 = 0.$$

Уравнения, определяющие компоненты второго тензора деформаций оболочки через компоненты тензора изгибаний и относительное удлинение нормали u_{33}:

$$w_{nM} = e_{3Ml} v_{nl}(1 + u_{33}) + [\partial_n(a_M u_{3M}) - c_{LnM} a_L u_{3L}]/a_n a_M. \tag{4.3}$$

Уравнения движения (равновесия):

$$\nabla_n x_{nM} + e_{MLK} v_{nL} x_{nK} + f_M = 0, \tag{4.4}$$

$$\nabla_n z_{nM} + e_{MLK} v_{nL} z_{nK} - x_{3M} + h_M = 0,$$

$$e_{MLk}[(e_{NM} + u_{NM}) x_{NL} + (b_{nM} + w_{nM}) z_{nL}] = 0.$$

Уравнение для поверхностной плотности виртуальной энергии деформации:

$$w_0 = x_{nM} \nabla_0 u_{nM} + x_{33} \nabla_0 u_{33} + z_{nM} \nabla_0 w_{nM}. \tag{4.5}$$

Граничные условия на контуре базисной поверхности могут иметь либо динамическую формулировку

$$e_{(\nu n)} x_{nL}(e_{LM} + w_{(LM)}) = f_{(\nu M)}, \ e_{(\nu n)} z_{nL}(e_{LM} + w_{(LM)}) = h_{(\nu M)}, \tag{4.6}$$

когда на торцевой поверхности оболочки заданы напряжения, либо кинематическую формулировку

$$\nabla_0 u_M = 0, \ \nabla_0 w_M \equiv \nabla_0(u_{3M} - w_{(M3)}) = 0, \tag{4.7}$$

когда на этой поверхности заданы перемещения, либо смешанную формулировку, когда на одной части торцевой поверхности заданы напряжения, а на другой — перемещения.

В уравнениях (4.1)—(4.7) по связанным индексам производится суммирование; a_n — метрические параметры Ламэ недеформированной базисной поверхности; b_{nn} — ее главные кривизны; $e_{(\nu n)}$ — направляющие косинусы нормали к ее контуру; $f_{(\nu M)}$ и $h_{(\nu M)}$ — физические компоненты главного вектора и главного момента торцевой нагрузки в начальном базисе; f_M и h_M — физические компоненты главного вектора и главного момента поверхностной нагрузки в повернутом базисе; e_{NM} — тензор Кронекера; e_{NML} — тензор Леви — Чивита,

$$a_3 = 1, \ b_{12} = b_{21} = b_{n3} = 0, \ u_{3n} = 0, \ c_{nnn} = \partial_n a_n / a_n, \ c_{112} = c_{121} = \partial_2 a_1 / a_1,$$

$$c_{mn3} = a_n b_{nm} / a_m, \ c_{212} = c_{221} = \partial_1 a_2 / a_2, \ c_{mnn} = -a_n \partial_m a_n / (a_m)^2 (m \neq n),$$

$$c_{3nm} = -a_n a_m b_{nm}, \ c_{3n3} = 0,$$

$$\nabla_n y_{nM} = \frac{a_M}{a_1 a_2} \left[\partial_n \left(\frac{a_1 a_2}{a_n a_M} y_{nM}\right) + c_{MnL} \frac{a_1 a_2}{a_n a_L} y_{nL}\right].$$

Физические компоненты пространственных тензоров напряжений и деформаций определяются в метрике начального базиса равенствами

$$X_{NM} = A_N A_M X^{(NM)}, \ U_{NM} = U_{(NM)} / A_N A_M,$$

где

$$A_3 = 1; \ A_n = a_n B_n; \ B_n = 1 + b_{nn} t_3.$$

При этом физические тензоры X_{NM} и U_{NM} остаются симметрическими и энергетически соответствующими друг другу в смысле равенства (2.3).

Пространственный тензор деформаций оболочки определяется через ее двумерные тензоры деформаций равенствами

$$U_{nm} = \frac{1}{2} \left[B_n^{-1}(u_{nm} + t_3 w_{nm}) + B_m^{-1}(u_{mn} + t_3 w_{mn}) + \right. \tag{4.8}$$

$$\left. + B_n^{-1} B_m^{-1} (u_{nL} + t_3 w_{nL})(u_{mL} + t_3 w_{mL})\right],$$

$$U_{n3} = U_{3n} = \frac{1}{2} B_n^{-1}(1 + u_{33})(u_{n3} + t_3 w_{n3}), \quad U_{33} = u_{33} + \frac{1}{2}(u_{33})^2.$$

При известной функциональной зависимости тензора напряжений X_{NM} от тензора деформаций U_{LK} устанавливаются следующие уравнения связи между двумерными силовыми и деформационными тензорами оболочки:

$$x_{lK}=\int\limits_{b_-}^{b_+}(\partial U_{NM}/\partial u_{lK})\,X_{NM}B_1B_2dt_3, \tag{4.9}$$

$$x_{33}=\int\limits_{b_-}^{b_+}(\partial U_{NM}/\partial u_{33})\,X_{NM}B_1B_2dt_3,$$

$$z_{lK}=\int\limits_{b_-}^{b_+}(\partial U_{NM}/\partial w_{lK})\,X_{NM}B_1B_2dt_3.$$

Уравнения (4.1)—(4.9) образуют замкнутую систему уравнений относительно неизвестных функций u_N, v_n, u_{33}, u_{nM}, w_{nM}, x_{NM}, z_{nM} и их частных производных первого порядка. Тензор изгибаний v_{nM} играет в этой системе вспомогательную роль краткого обозначения дифференциального выражения (4.2).

После решения двумерной системы (4.1)—(4.9) пространственные параметры напряженно-деформированного состояния оболочки определяются по схеме, изложенной в п. 3.

Поступила 6 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айнола Л. Я.** Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек.— Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1965, т. 14, № 3.
2. **Галимов К. З.** Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 11. Казань, 1975.
3. **Шкутин Л. И.** Нелинейные модели деформируемых моментных сред.— ПМТФ, 1980, № 6.
4. **Шкутин Л. И.** Нелинейная модель оболочки с недеформируемыми поперечными волокнами.— ПМТФ, 1982, № 1.
5. **Федорова Н. А., Шкутин Л. И.** Асимптотика осесимметричной задачи упругости для анизотропной цилиндрической оболочки.— ПМТФ, 1981, № 5.

УДК 539.214 + 539.374 + 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ГЕНКИ

А. М. ХЛУДНЕВ

(*Новосибирск*)

Существование слабого решения в теории идеальной пластичности Генки получено лишь в частном случае условия текучести Мизеса и в предположении изотропности материала [1]. Вектор деформаций при этом находится из пространства, сопряженного к $L^\infty(\Omega)$. В данной работе доказывается существование решения при произвольном условии текучести и без предположения изотропности. Вектор перемещения принадлежит пространству $L^{3/2}(\Omega)$.

Определяющие уравнения рассматриваемой теории пластичности дают представление полных деформаций в виде суммы упругих и пластических составляющих

$$\varepsilon_{ij}(u)=c_{ijkl}\sigma_{kl}+\xi_{ij},\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

причем напряжения не превосходят предела текучести $\Phi(\sigma)\leqslant 0$, а пластические деформации ξ_{ij} удовлетворяют неравенству [1—3]

$$\xi_{ij}(\tau_{ij}-\sigma_{ij})\leqslant 0\ \ \forall\tau,\ \ \Phi(\tau)\leqslant 0. \tag{2}$$

В области $\Omega\subset R^3$ выполнены уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}=f_i,\quad i=1,\ 2,\ 3. \tag{3}$$

На границе области Г справедливо условие

$$u=0. \tag{4}$$

Здесь f_i — заданные массовые силы; функция Ф описывает условие текучести. Предполагается, что Ф непрерывна, выпукла и множество $\widetilde{K}=\{\lambda\in R^6|\Phi(\lambda)\leqslant 0\}$ содер-