ЛИТЕРАТУРА

1. **Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.** Длинноволновые возмущения в газожидкостной среде.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 5.
2. **Соболев В. В., Цвелодуб О. Ю.** Рэлеевская устойчивость гидродинамических течений в среде с дисперсией.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.
3. **Накоряков В. Е., Соболев В. В., Цвелодуб О. Ю.** Рэлеевская устойчивость сдвигового течения в релаксирующих средах.— ПМТФ, 1976, № 3.
4. **Howard L. N.** Note on a paper of John W. Miles.— «J. Fluid. Mech.», 1961, vol. 10, pt 4, p. 509—512.
5. **Drazin P. G., Howard L. N.** Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— In: Advances in applied Mechanics. Vol. 9. 1966, p. 1—89.
6. **Michalke A.** On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile.— «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 19, pt 4, p. 543—556.
7. **Drazin P. G., Howard L. N.** The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow.— «J. Fluid Mech.», 1962, vol. 14, pt 2, p. 257—283.
8. **Blumen W.** Let flow instability of an inviscid compressible fluid.— «J. Fluid Mech.», 1971, vol. 46, pt 4, p. 737—747.

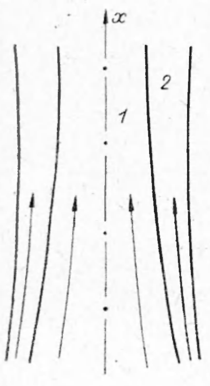
УДК 532.536

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ТЯЖЕЛЫХ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

В. И. Елисеев

(*Днепропетровск*)

Решение задач о течении тяжелых струй идеальной жидкости определяется в ряде работ (см., например, [1—3]). Асимптотическому поведению вязких струй без учета влияния окружающей среды и массовых сил посвящена работа [4]. Наконец, вязкие течения струй несмешивающихся жидкостей без массовых сил рассматриваются в [5], где интегральным методом получено приближенное решение для плоской струи.



Фиг. 1

Рассмотрим задачу об истечении вертикальной ламинарной струи в инородную среду, не смешивающуюся с истекающей жидкостью. Решение проведем для наиболее простой постановки этой задачи. Предположим, что струя на всем протяжении своего течения не разрушается и остается ламинарной и, кроме того, между истекающей жидкостью и средой имеется гладкая граница (фиг. 1). Вследствие наличия трения истекающая жидкость вовлекает в движение прилегающую к струе внешнюю среду, в результате чего образуется присоединенная масса. Пренебрегая узким диффузионным слоем, будем считать, что на границе раздела выполняются условия равенства скоростей, касательных и нормальных напряжений. Принятая схема течения, хотя и обладает рядом существенных недостатков, все же реализуется в действительности.

Так, при течении струи плотной жидкости в воздухе при определенных условиях существует довольно большой участок струи, на котором граница раздела — гладкая поверхность.

Для решения поставленной задачи предлагается асимптотический метод, позволяющий рассчитать струйное течение вдалеке от источника. При этом влияние начального импульса и начального профиля скорости не учитывается. Предлагаемый подход аналогичен рассмотрению струй смешивающихся жидкостей, истекающих из точечных источников [6].

В качестве основных уравнений используем систему уравнений Навье — Стокса в области 1, которую назовем внутренней, и уравнения пограничного слоя в области 2, которую примем за внешнюю. Такое отличие в математическом описании областей может быть объяснено тем, что течение в области 1 представляет собой в некотором роде течение в канале с искривленными стенками. Поэтому здесь возможны поперечные градиенты давления, соизмеримые с продольными. В области же 2 величины поперечных градиентов давления значительно меньше продольных.

1. Плоская струя. Выпишем основные уравнения: в области 1

$$
(1.1)\qquad
\begin{gathered}
u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{\partial p_1}{\rho_1\partial x}+\nu_1\left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right\}-g,\\
u_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}=-\frac{\partial p_1}{\rho_1\partial y}+\nu_1\left\{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^s}\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right\},\\
\frac{\partial y^s u_1}{\partial x}+\frac{\partial y^s v_1}{\partial y}=0,
\end{gathered}
$$

где $s=0$ для плоской и $s=1$ для осесимметричной задач; в области 2

$$u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}=\nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=0.$$

Для получения решений определим первые члены в разложениях функций тока. Пусть

$$
\begin{gathered}
\psi_1\sim a_0UX^rF(n),\ n\sim yX^m/a_0;\\
\psi_2\sim a_0UX^kG(h),\ h\sim(y-a_0X^{-m})/a_0X^p;\\
p_1\sim-\rho_2 gx,\ \rho_2>\rho_1,
\end{gathered}
$$

здесь ψ — функция тока; $X=A\dfrac{\nu_1}{Ua_0^2}x$; A — некоторая постоянная величина; U — масштаб скорости; a_0 — линейный масштаб; r, m, k и p — постоянные коэффициенты. Из условия сохранения массы во внутренней области следует $r=0$. Для нахождения оставшихся коэффициентов имеем следующие условия: а) условие сохранения в уравнении для G во внешней области динамических и вязких членов, т. е. $k+p=1$; б) условие равенства скоростей на границе раздела $m=k-p$; в) условие равенства приращения импульса присоединенной массы $\dfrac{d}{dx}\rho_2\int\limits_{y^*}^{\infty}u_2^2dy$ результирующей силе, действующей на истекающую жидкость $(\rho_2-\rho_1)gy_*$, где y_* — полуширина внутренней области ($y_*\sim a_0X^{-m}$). Первое условие указывает на равноправность вязких и динамических членов во внешнем пограничном слое. Последнее условие показывает, что архимедова сила, приложенная к собственно струе, через свободную поверхность передается присоединенной массе, увеличивая ее импульс. Из этих трех условий можно найти $m=1/5$, $k=3/5$, $p=$

$=2/5$. Таким образом, решения в областях 1 и 2 будем искать в виде

$$\psi_1 = a_0 U [F_0(n) + X^{-1/5} F_1(n) + \ldots], \tag{1.2}$$

$$n = y X^{1/5} / (a_0 + a_1 X^{-1/5} + a_2 X^{-2/5} + \ldots);$$

$$\psi_2 = a_0 U\, X^{3/5} [G_0(h) + X^{-1/5} G_1(h) + \ldots], \tag{1.3}$$

$$h = \frac{y - X^{-1/5}(a_0 + a_1 X^{-1/5} + \ldots)}{X^{2/5}(a_0 + a_1 X^{-1/5} + \ldots)}.$$

В выражениях (1.2), (1.3) a_j $(j > 0)$ — поправочные величины. Для того, чтобы избежать логарифмических членов в решениях, необходимо положить $a_4 = 0$. В противном случае из условия в) видно, что импульс присоединенной массы, кроме степенных членов, будет иметь и логарифмический.

Граничные условия на оси струи и на бесконечности задаются выражениями

$$F_j(0) = 0,\ F_j''(0) = 0,\ G_j'(\infty) = 0.$$

На границе раздела $(n = 1)$ условия равенства скоростей и касательных напряжений для рассматриваемого количества приближений выражаются в виде соотношений

$$G_j'(0) = F_j'(1),\ G_j''(0) = \gamma F_{j+3}''(1),\ \gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{1.4}$$

Равенства (1.4) являются условиями сопряжения решений во внешней и внутренней областях. Подставляя (1.2) в уравнения (1.1), получим следующую систему:

$$F_0''' = 0,\ F_1''' = 0,\ F_2''' = 0,\ F_3''' = -B,\ F_4''' = -3\frac{a_1}{a_0}B,$$

$$F_5''' = -3\left(\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)B,\ F_6''' = -3\left(\frac{a_3}{a_0} + 2\frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1^3}{a_0^3}\right)B + \frac{1}{5}A,\ F_7 = -3\left(\frac{a_1 a_3}{a_0^2} + \frac{a_2^2}{a_0^2} + \frac{a_1^2 a_2}{a_0^3}\right)B + \frac{2}{5}\frac{a_1}{a_0}A,$$

где $B = g\dfrac{a_0^2}{U\nu_1}\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$. Учитывая, что на свободной поверхности

$$F_0(1) = 1,\ F_j(1) = 0\ (j > 0),$$

и принимая во внимание граничные условия на оси струи, можно записать решения в виде

$$F_0 = n,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = (B/6)n(1 - n^2),\ F_4 = 0,\ F_5 = 0, \tag{1.5}$$

$$F_6 = (1/6)(3(a_3/a_0)B - (1/5)A)n(1 - n^2),\ F_7 = 0.$$

В выражениях (1.5) решения выписаны с учетом того, что $a_1 = a_2 = 0$. Последнее равенство следует из анализа решений во внутренней и внешней областях.

В области 2, заменив

$$G_j = C g_j(t),\ t = Dh,$$

где $C = (\varkappa A)^{-1/2}$; $D = (\varkappa A)^{1/2}$; $\varkappa = \nu_1/\nu_2$, получим следующие уравнения и граничные условия:

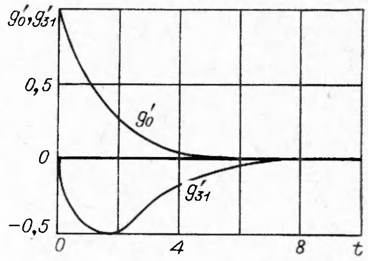
$$g_0''' - \frac{1}{5}\left(g_0'^2 - 3 g_0 g_0''\right) = 0, \tag{1.6}$$

$$g_0(0)=0,\ g_0'(0)=1,\ g_0'(\infty)=0,\ g_0''(0)=-\gamma D^{-1}B;$$

$$g_3''' + \frac{1}{5}\left(g_0'g_3' + 3g_0g_3''\right) = \frac{1}{5}\frac{a_3}{a_0}\left(4g_0'^2 - 3g_0g_0''\right), \tag{1.7}$$

$$g_3(0)=C^{-1},\ g_3'(0) = -\frac{B}{3},\ g_3'(\infty)=0,\ g_3''(0)=\gamma D^{-1}\left(\frac{A}{5} - 3\frac{a_3}{a_0}B\right).$$

Выписанные граничные условия обеспечивают непрерывность функций тока скоростей и касательных напряжений на границе раздела. В выражениях (1.6), (1.7) не выписаны уравнения для g_1, g_2 и g_4, так как решения этих уравнений тривиальны: $g_1 = g_2 = g_4 = 0$. Решение уравнения (1.6), найденное численно, показано на фиг. 2. Из последнего граничного условия для $g_0''(0)$ можно найти



Фиг. 2

$$A = \varkappa^{-1}\gamma^2 B^2/(0{,}594)^2.$$

Решение уравнения (1.7) можно представить в виде

$$g_3 = C_3 g_0' + D_3 + \frac{a_3}{a_0} g_{31}.$$

Определив численно g_{31} при граничных условиях (см. фиг. 2): $g_{31}(0) = 0$, $g_{31}'(0) = 0$ и $g_{31}'(\infty) = 0$, найдем

$$C_3 = 0{,}561\,B,\ D_3 = C^{-1} - C_3,\ a_3/a_0 = -0{,}362(1/3 - \varkappa^{-1}\gamma^2)B.$$

Выпишем теперь импульс для всей струи

$$I = \int_0^{y_*} \rho_1 u_1^2 dy + \int_{y_*}^{\infty} \rho_2 u_2^2 dy.$$

Подставляя сюда найденные решения, имеем

$$I = \rho_2 U^2 a_0 X^{4/5}\left[\int_0^{\infty} G_0'^2 dh + X^{-3/5}\int_0^{\infty}\left(2G_0'G_3' - \frac{a_3}{a_0}G_0'^2\right)dh\right] + \rho_1 U^2 a_0 X^{1/5}.$$

Величина этого импульса равна результирующей силе, действующей на истекающую жидкость,

$$I = \rho_1 B (U^2/A) a_0 [(5/4)X^{4/5} + 5(a_3/a_0)X^{1/5}].$$

Положив $B = 1$, из условия сохранения массы

$$G = \int_0^{y_*} \rho_1 u_1 dy = \mathrm{const}$$

найдем U и a_0

$$U = \left[g\frac{G^2}{\nu_1\rho_1^2}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\right]^{1/3},\quad a_0 = \frac{G}{\rho_1}\left[g\frac{G^2}{\nu_1\rho_1^2}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\right]^{-1/3}.$$

Равенство $B = 1$ было положено для простоты, так как значение B (в этом легко убедиться) не оказывает влияния на величины параметров струи.

Оценим теперь величину давления во внутренней области. Из условия равенства нормальных напряжений на границе раздела без учета капиллярных сил

$$(1.8)\qquad -p_1+2\mu_1\frac{1+y_*'^2}{1-y_*'^2}\frac{\partial v_1}{\partial y}\bigg|_{y_*}=-p_2+2\mu_2\frac{1+y_*'^2}{1-y_*'^2}\frac{\partial v_2}{\partial y}\bigg|_{y_*}$$

можно получить

$$p_1=-\rho_2gx+\frac{2}{5}\frac{\nu_1}{a_0^2}(\mu_1-\mu_2)AX^{-4/5}.$$

Используя полученные решения, выпишем выражения для скорости на оси струи и формулы для скорости и трения на границе раздела

$$(1.9)\qquad u_m/U=X^{1/5}[1+(1/6-a_3/a_0)X^{-3/5}];$$

$$(1.10)\qquad u_*/U=X^{1/5}[1-(1/3+a_3/a_0)X^{-3/5}];$$

$$\tau_*=-\mu_1(U/a_0)X^{-1/5}[1+(a_3/a_0-A/5)X^{-3/5}].$$

Из формул (1.9), (1.10) видна разница между струей при вязкостном взаимодействии ее с окружающей средой и струей идеальной жидкости, для которой $u/U\sim X^{1/2}$.

2. Осесимметричная струя. В этом случае к уравнениям (1.1) добавим уравнения пограничного слоя в области 2

$$(2.1)\qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r\partial x}-\frac{y_*'}{y_*}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right)-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2}=\nu_2\frac{\partial^3\psi_2}{\partial r^3},$$

где y_* — поверхность раздела; $r=y-y_*$; ψ_2 — функция тока в осесимметричном течении, т. е. $u_2=(1/y_*)\partial\psi_2/\partial r$, $v_2=-(1/y_*)\partial\psi_2/\partial x$. В отличие от плоского случая при рассмотрении задачи в осесимметричной постановке следует учитывать, что уравнение (2.1) справедливо, когда толщина пограничного слоя значительно меньше радиуса внутренней области. После нахождения решений можно записать ограничивающее условие применимости используемого уравнения и полученных ниже решений. Проведя все рассуждения, которые были в предыдущем случае, можно получить первые члены разложений для функций тока во внешней и внутренней областях. Не останавливаясь на подробностях, выпишем сразу вид решений в первой и второй областях

$$\psi_1=a_0^2U\left[F_0(n)+X^{-1/8}F_1(n)+\dots\right],$$

$$n=\frac{yX^{1/8}}{a_0+a_1X^{-1/8}+\dots};$$

$$\psi_2=a_0^2UX^{1/2}\left[G_0(h)+X^{-1/8}G_1(h)+\dots\right],$$

$$h=\frac{r}{X^{3/8}(a_0+a_1X^{-1/8}+\dots)}.$$

Чтобы исключить появление логарифмических членов, следует положить $2a_6+a_3^2/a_0=0$. Граничные условия на оси струи и на бесконечности имеют вид

$$F_j(0)=0,\ F_j'(0)=0,\ G_j'(\infty)=0.$$

На границе раздела двух жидкостей ($n=1$) в пределах того количества приближений, которые рассмотрены, выполняются условия

$$G_j'(0)=F_j'(1),\ G_j''(0)=\gamma\left[F_{j+4}''(1)-F_{j+4}'(1)\right].$$

После подстановки разложений в систему (1.1) получим уравнения во внутренней области. Не выписывая их, сразу же дадим решения этих уравнений

$$F_0 = (1/2)n^2,\ F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0,$$
$$F_4 = (B/16)n^2(1 - n^2),\ F_5 = 0,\ F_6 = 0,\ F_7 = 0,$$
$$F_8 = (1/16)(4Ba_4/a_0 - A/4)n^2(1 - n^2),\ F_9 = 0,\ F_{10} = 0,$$

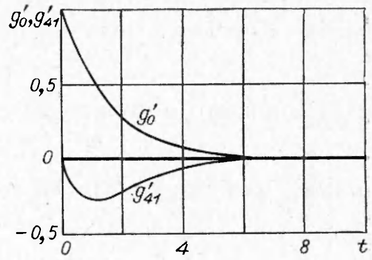
где $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$. Учитывая последнее равенство, выпишем систему уравнений во внешней области, предварительно заменив $G_j = Cg_j(t)$, $t = Dh$, где $C = (\varkappa A)^{-1/2}$, $D = (\varkappa A)^{1/2}$, $\varkappa = \nu_1/\nu_2$:

(2.2)
$$g_0''' - \frac{1}{4}\left(g_0'^2 - 2g_0g_0''\right) = 0,$$
$$g_0(0) = 0,\ g_0'(0) = 1,\ g_0'(\infty) = 0,\ g_0''(0) = -\frac{1}{2}\gamma D^{-1}B;$$

(2.3)
$$g_4''' + \frac{1}{2}g_0g_4'' = \frac{a_4}{a_0}g_0'^2,$$
$$g_4(0) = \frac{1}{2}C^{-1},\ g_4'(0) = -\frac{1}{4}B,\ g_4'(\infty) = 0,$$
$$g_4''(0) = \frac{1}{2}\gamma D^{-1}\left(\frac{A}{4} - 4\frac{a_4}{a_0}B\right).$$

Так же, как и в предыдущей задаче, выписанные граничные условия обеспечивают непрерывность указанных физических параметров. В выражениях (2.2), (2.3) не выписаны уравнения для g_1, g_2, g_3, g_5 и g_6, так как решения их равны нулю. Решение уравнения (2.2), найденное численно, показано на фиг. 3. Используя его, можно найти

$$A = \varkappa^{-1}\gamma^2B^2/4(0{,}587)^2.$$



Фиг. 3

Функцию g_4 представим в виде суммы решений

$$g_4 = C_4g_0' + D_4 + \frac{a_4}{a_0}g_{41},$$

где g_{41}, показанная на фиг. 3, определялась из решения неоднородного уравнения при следующих граничных условиях: $g_{41}(0) = 0$, $g_{41}'(0) = 0$, $g_{41}'(\infty) = 0$. Из полученного решения и соответствующих граничных условий определим постоянные

$$C_4 = 0{,}213\,B,\ D_4 = C^{-1}/2 - C_4,\ a_4/a_0 = -0{,}062\left(1/2 - \varkappa^{-1}\gamma^2\right)B.$$

Выписав интегральное выражение для импульса

$$I = \int_0^{y_*}\rho_1 yu_1^2dy + \int_{y_*}^{\infty}\rho_2y_*u_2^2dy$$

и подставляя сюда полученные решения, будем иметь

$$I = \rho_2a_0^2U^2X^{6/8}\left\{\int_0^{\infty}G_0'^2dh + \right.$$
$$\left. + X^{-4/8}\int_0^{\infty}\left(2G_0'G_4' - \frac{a_4}{a_0}G_0'^2\right)dh\right\} + \frac{1}{2}\rho_1a_0^2U^2X^{2/8}.$$

Величина этого импульса равна результирующей массовой силе, т. е.

$$I = \rho_1 B \frac{U^2}{A} a_0^2 \left(\frac{2}{3} X^{6/8} + 4 \frac{a_4}{a_0} X^{2/8} \right).$$

Используя условие сохранения массы истекающей жидкости

$$G = \int_0^{y_*} \rho_1 y u_1 dy = \text{const}$$

и положив $B = 1$, получим

$$U = \left[2g \frac{G}{\nu_1 \rho_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right]^{1/2}, \quad a_0 = \left(2 \frac{G}{\rho_1} \right)^{1/2} \left[2g \frac{G}{\nu_1 \rho_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right]^{-1/4}.$$

Оценку величины давления здесь также можно сделать с помощью выражения (1.8), так как напряжения, соответствующие осям x и y в цилиндрической системе координат, совпадают по форме с напряжениями в плоской задаче [7]. После подстановки решений в (1.8) имеем

$$p_1 = -\rho_2 g x + \frac{1}{4} \frac{\nu_1}{a_0^2} (\mu_1 - \mu_2) A X^{-6/8}.$$

Получим теперь условие, при котором справедливо использование уравнения (2.1). Из фиг. 3 видно, что при $t = 8$ функцию g_0' практически можно считать равной нулю. Принимая в этой точке величину $r_* = 8D^{-1}X^{3/8}a_0$ за толщину пограничного слоя во внешней струе, из условия $r_*/y_* \ll 1$ получим $X \ll D^2/64$. Учитывая асимптотический характер решения, получим

$$1 < X \ll \gamma^2/88{,}2.$$

Выпишем формулы для скорости на оси струи

$$u_m/U = X^{2/8}[1 + (1/8 - 2a_4/a_0)X^{-4/8}],$$

а также для скорости и трения на границе раздела

$$u_*/U = X^{2/8}[1 - (1/8 + 2a_4/a_0)X^{-4/8}],$$

$$\tau_* = -\mu_1(U/a_0)X^{-1/8}(1/2)[1 + (a_4/a_0 - A/4)X^{-4/8}].$$

В заключение работы укажем, что для истечения тяжелой жидкости вниз выписанные решения будут справедливы при $\rho_1 > \rho_2$ и

$$B = g \frac{a_0^2}{\nu_1 U} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}.$$

Поступила 9 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Woronetz K.** L'influence de la pesanteur sur la forme du jet liquide.— «Comptes rendus de l'academie des sciences», 1953, t. 236, N 3. Рус. пер.— Сб. Механика, 1953, № 5.
2. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. **Киселев О. М.** Задача об истечении тяжелой жидкости из отверстия в вертикальной стенке.— «Изв. высш. учеб. заведений. Математика», 1964, № 6.
4. **Иванилов Ю. П., Семенов Е. В.** О коэффициенте сужения струй.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 1.
5. **Генкин А. Л., Кукес В. И., Ярин Л. П.** О распространении струи несмешивающихся жидкостей.— В кн.: Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Вып. 9. Алма-Ата, «Наука», 1973.
6. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
7. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.