

турбулентных напряжений с приемлемой точностью описывает экспериментальные данные и она может использоваться для расчета течений с отсосом и вдувом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях.— М.: Наука, 1984.
2. Калинина С. В., Луговской П. П., Миронов Б. П. Гидродинамика течения в проницаемом канале с двухсторонним вдувом // ПМТФ.— 1981.— № 6.
3. Алимиев В. И., Калинина С. В., Луговской П. П. Исследование гидродинамики течения однофазной среды в узких зазорах со вдувом // Турбулентный пограничный слой при сложных граничных условиях.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1977.
4. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками.— М.: Мир, 1968.
5. Хуссейн, Рейнольдс. Экспериментальное исследование полностью развитого турбулентного течения в канале // ТОИР.— 1975.— № 4.
6. Eckelman H. The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 65, pt 3.
7. Laufer J. The structure of turbulence in fully-developed pipe flow.— N. Y., 1954.— (Rep./NASA; N 1174).
8. Hanjalic K., Launder B. E. Fully developed asymmetric flow in a plane channel // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 52, pt 4.
9. Hanjalic K., Launder B. E. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low Reynolds-number turbulence // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 74, pt 4.
10. Chien K. Y. Predictions of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds-number two-equation model of turbulence // AIAA J.— 1982.— V. 20, N 1.
11. Sebeci T. Behaviour of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient // AIAA J.— 1970.— V. 12, N 8.
12. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.— М.: Наука, 1984.
13. Симуни Л. М. Движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской трубе // ЖВМФ.— 1965.— Т. 5, № 6.
14. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. В. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 3.
15. Пейтел В. К., Роди В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малым числом Рейнольдса. Обзор // Аэрокосмич. техника.— 1986.— № 2.
16. Жаибасбаев У. К., Кожахметов Т. Б., Смольянинов А. В. Расчет течения в канале на основе модели турбулентных напряжений, применимой при низких числах Рейнольдса // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1989.— № 3.

г. Алма-Ата

Поступила 7/III 1989 г.,
в окончательном варианте — 29/IX 1989 г.

УДК 532.546

В. В. Воинов

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Рассматривается стационарное движение двух жидкостей в пористой среде со стационарной границей раздела. Получены точные решения плоской и осесимметричной задач движения капель. Закономерности движения капель связываются с механизмом распада фронта вытеснения на нелинейной стадии.

Как известно, при вытеснении вязкой жидкости из пористой среды жидкостью с меньшей вязкостью граница раздела неустойчива. Малые возмущения поверхности быстро растут, принимая на нелинейной стадии форму пальцев. Периодические решения плоской задачи изучались в [1—3]. В [4, 5] численно исследовалась эволюция малых периодических возмущений плоской границы раздела, задавались возмущения в виде суперпозиции возмущений разного периода. При этом не только получены пальцы на нелинейной стадии, но и наблюдалось их дробление на капли.

Представляет интерес аналитическое описание капель и одиночных пальцев, движущихся в пористой среде.

1. Постановка задачи. В вязкой жидкости, фильтрующейся в безграничной однородной пористой среде, движется капля другой жидкости, ограниченная поверхностью S . Потенциал Φ скорости фильтрации V удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.1) \quad \Delta\Phi_{1,2} = 0.$$

Здесь и далее индекс 1 относится к области вне капли, 2 — к внутренней области. Вдали от поверхности S капли задана постоянная скорость фильтрации

$$(1.2) \quad \nabla\Phi_1 \rightarrow V_\infty, r \rightarrow \infty.$$

Условия непротекания жидкости через границу S , движущуюся со скоростью V_0 , дают два граничных условия на поверхности капли:

$$(1.3) \quad \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \right|_S = (V_0 \mathbf{n}).$$

Из условия непрерывности давления на границе следует третье граничное условие, включающее коэффициенты динамической вязкости μ_1, μ_2 :

$$(1.4) \quad \mu_1\Phi_1|_S = \mu_2\Phi_2|_S + \text{const.}$$

Задача (1.1)—(1.4) представляет собой стационарную задачу с неизвестной свободной границей S , содержащую как параметр скорость капли V_0 .

Внутренняя задача для Φ_2 с граничным условием (1.3) имеет единственное решение — потенциал однородного потока $\Phi_2 = V_0 x$, где x — координата по направлению движения капли (или z).

Можно попытаться найти точные решения задачи о капле, рассматривая граничные поверхности, описываемые уравнением второго порядка. При этом естественно использовать соответствующие ортогональные координаты u, v , в которых граничное условие для Φ_1 (1.3) запишется в виде

$$(1.5) \quad \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right|_{v=v_0} = \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial v} \right|_{v=v_0}.$$

Здесь $v = v_0$ — уравнение поверхности капли S . Для простоты далее исследуется ситуация, когда скорость фильтрации вдали от капли V_∞ и скорость капли V_0 коллинеарны.

2. Плоская задача движения параболической капли. Если искать решение плоской задачи о капле, контур которой является параболой, удобно использовать параболические координаты u, v , в которых (1.1) имеет тот же вид, что в декартовых координатах.

Потенциал внешнего течения Φ_1 состоит из суммы потенциала однородного течения и потенциала вида βv , где постоянная β определяется условием (1.5): $\Phi_1 = V_\infty x - (V_0 - V_\infty)v_0 v$. Подставляя выражения для потенциалов внешнего и внутреннего течений в граничное условие (1.4), можно найти скорость движения параболической капли

$$(2.1) \quad V_0 = V_\infty \mu_1 / \mu_2.$$

Вышеприведенное решение соответствует предельной ситуации в задаче о движении пузыря между двумя твердыми стенками [1], когда отношение ширины пузыря к ширине канала стремится к нулю.

3. Движение осесимметричного параболоида фильтрующей жидкости. Рассмотрим осесимметричную задачу о движении фронта вытеснения параболической формы. Решение во внешней к параболоиду области имеет вид

$$\Phi_1 = V_\infty z - (V_0 - V_\infty)v_0^2 \ln v.$$

Динамическое граничное условие (1.4) удовлетворяется, если скорость фильтрации внутри параболоида определяется (2.1), т. е. совпадает со скоростью движения плоской параболической капли. Интересно, что скорость движения параболоида фильтрующейся жидкости не зависит от

кривизны в его вершине, решение справедливо для однопараметрического семейства параболоидов.

4. Плоская эллиптическая капля. Для описания движения эллиптических капель удобно воспользоваться эллиптическими координатами. В плоском случае это софокусные u -гиперболы, v -эллипсы [6]. Решение ищется аналогично описанному выше как суперпозиция потенциала однородного потока и потенциала $\beta \sin u \exp(-v)$ для вытянутого и $\beta \cos u \exp(-v)$ для сжатого эллипсов. Находя с помощью (1.5) коэффициент β , получаем выражения для Φ_1 в случае вытянутого и сжатого эллипсов:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \alpha \sin u (V_\infty \operatorname{ch} v + (V_\infty - V_0) \operatorname{sh} v_0 \exp(v_0 - v)), \\ \Phi_1 &= \alpha \cos u (V_\infty \operatorname{sh} v + (V_\infty - V_0) \operatorname{ch} v_0 \exp(v_0 - v)).\end{aligned}$$

Из условия (1.4) находится соотношение скоростей

$$(4.1) \quad V_0/V_\infty = (1 + g)/(\lambda + g), \quad \lambda = \mu_2/\mu_1.$$

Здесь $g = \chi$ для вытянутого эллипса и $g = \chi^{-1}$ для сжатого; $\chi = \sqrt{1 - \delta^2}$ — отношение полуосей; $\delta = \operatorname{ch}^{-1} v_0$ — эксцентриситет. Как видно из (4.1), скорость движения плоской эллиптической капли существенно зависит от степени ее деформации.

5. Движение эллипсоидальной капли. Пусть капля жидкости занимает объем эллипсоида вращения. В качестве координатных поверхностей используем u -гиперboloиды и v -эллипсоиды вращения аналогично п. 4. Для этих координат вид уравнения Лапласа приведен в [6]. Потенциал внешнего течения Φ_1 ищется в виде суперпозиции потенциала однородного потока $V_\infty z$ и потенциала вида $\sin(u)(c_2 Q_1(\operatorname{ch} v) + c_1 \operatorname{ch} v)$ для вытянутого эллипсоида и $\cos(u)(c_2 Q_1(i \operatorname{sh} v) + c_1 \operatorname{sh} v)$ для сжатого ($Q_1(x)$ — функция Лежандра второго рода индекса 1). Константа c_1 определяется из условия, что функция должна быть вещественной и ограниченной при $v \rightarrow \infty$. После этого потенциал выразится для вытянутого и сжатого эллипсоидов при помощи формул $\Phi_1 = \alpha \sin u (V_\infty \operatorname{ch} v + \beta (\operatorname{ch} v \times \operatorname{Arctg}(\operatorname{ch} v) - 1))$ и $\Phi_1 = \alpha \cos u (V_\infty \operatorname{sh} v + \beta (\operatorname{sh} v \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} v) - 1))$. Удовлетворяя граничным условиям (1.4), (1.5), находим отношение скоростей и β : $V_\infty/V_0 = 1 + (\lambda - 1)\psi_+$, $\beta = g_1(\lambda - 1)V_0 \operatorname{sh} 2v_0/2$. Здесь для вытянутого эллипсоида вращения

$$(5.1) \quad \psi_+ = \delta^{-2} - (\delta^{-2} - 1)\delta^{-1} \operatorname{Arth} \delta, \quad g_1 = \operatorname{sh} v_0,$$

для сжатого

$$(5.2) \quad \psi_- = 1 - \delta^{-2} + \delta^{-3} \sqrt{1 - \delta^2} \operatorname{arctg}(\delta/\sqrt{1 - \delta^2}), \quad g_1 = -\operatorname{ch} v_0.$$

Когда эксцентриситет эллипсоида стремится к единице и вытянутый эллипсоид превращается в «иголку», а сплюснутый — в диск, формулы для коэффициента скорости ψ (5.1), (5.2) принимают вид

$$(5.3) \quad \psi_+ \approx 1 + (1 - \delta) \ln(1 - \delta), \quad \psi_- \approx (\pi/\sqrt{2})\sqrt{1 - \delta}.$$

Отсюда следует, что сплюснутый эллипсоид вращения движется почти с той же скоростью, с какой фильтруется окружающая жидкость, а вытянутый — в μ_1/μ_2 раз быстрее. В случае малого эксцентриситета формулы (5.1), (5.2) дают

$$(5.4) \quad \psi_+ \approx (2/3)(1 + \delta^2/5), \quad \psi_- \approx (2/3)(1 - \delta^2/5).$$

Если $\lambda = \mu_2/\mu_1 < 1$, то сжатая капля движется медленнее, чем вытянутая. Для плоских капель при малом δ из (4.1), (4.2) следуют формулы, аналогичные (5.4), причем $V_\infty/V_0 = (\lambda + 1)/2$. Для сильно вытянутых или сжатых плоских капель, когда $\delta = 1$, формулы (4.1), (4.2) дают те же скорости движения, что (5.3).

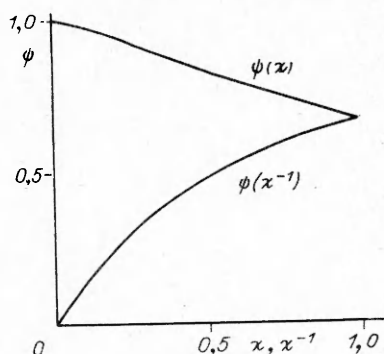
Зависимость коэффициента скорости эллипсоидальной капли от степени ее деформации $\psi(\chi)$, равной отношению полуосей эллипсоида (полуось вдоль оси вращения — в знаменателе), представлена на рисунке, где

видна сильная зависимость скорости движения каплей от их деформации. Интересно, что сильно вытянутая капля движется с той же скоростью, что параболический «язык» согласно (2.1), (4.1), (5.1).

Если $\mu_2/\mu_1 > 1$, то скорость как сплюснутых, так и вытянутых каплей меньше скорости жидкости на бесконечности. Следовательно, они сближаются с фронтом вытеснения, если находятся впереди него и отстают от фронта вытеснения, оказавшись сзади него. В первом случае фронт вытеснения, очевидно, устойчив, во втором — нет.

Важно, что скорость движения вытянутой эллиптической капли при $\lambda > 1$ в λ раз меньше скорости движения жидкости на бесконечности. Поэтому при вытеснении нефти водой для того, чтобы переместить водой некоторый объем более вязкой нефти, необходимо прокачать значительно больший объем воды, если нефть рассеяна в виде вытянутых каплей.

Интересно также, что, как вытекает из полученных формул, вытянутые капли при малой внутренней вязкости $\mu_2 < \mu_1$ обгоняют менее вытянутые капли, причем медленнее всего движутся сильно сплюснутые капли. Таким образом, впереди неустойчивого фронта вытеснения движутся наиболее вытянутые капли. Этот эффект наблюдается на фотографиях в экспериментальной работе [7], где вытянутая капля догоняет менее вытянутую и сливается с ней. Обратный эффект имеет место для отстающих от фронта вытеснения каплей более вязкой жидкости, где сильнее всего отстают от фронта вытеснения наиболее вытянутые капли.



ЛИТЕРАТУРА

1. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc.— 1958.— V. 245A, N 1242.
2. Taylor Sir Geoffrey, Saffman P. G. A note on the motion of bubbles in a Hele — Shaw cell and porous medium // Quart. J. Appl. Mech. and Math.— 1959.— V. XII, pt 3, N 8.
3. Saffman P. G. Viscous fingering in Hele — Shaw cells // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 173, N 12.
4. Tryggvason G., Aref H. Numerical experiments on Hele — Shaw flow with a sharp interface // J. Fluid. Mech.— 1983.— V. 136, N 11.
5. Tryggvason G., Aref H. Finger-interaction mechanisms in stratified Hele — Shaw flow // J. Fluid. Mech.— 1985.— V. 154, N 5.
6. Маделунг Э. Математический аппарат физики.— М.: Наука, 1968.
7. Maxworthy T. Bubble formation, motion and interaction in Hele — Shaw cell // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 173, N 12.

г. Москва

Поступила 25/XI 1988 г.,
в окончательном варианте — 22/IX 1989 г.

УДК 536.25

Б. Г. Петражицкий, Н. М. Станкевич

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ГРАНИЦ

Изучению естественной конвекции в горизонтальном цилиндре посвящено много работ. Нестационарная естественная конвекция в замкнутой прямоугольной и сферической плоскостях рассматривалась в [1, 2]. Обзор ранних исследований содержится в [3], последних — в [4]. В некоторых обсуждается влияние неоднородного распределения температуры границ. В частности, в [5, 6] с помощью приближенных ана-